삼각함수에는 어떤 성질이 있을까?

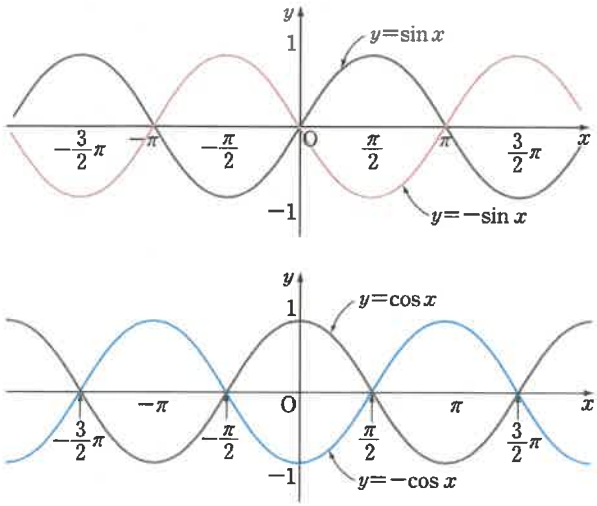
$\pi+x$의 삼각함수

다음 그림에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동하면 각각 $y=-\sin x$, $y=-\cos x$의 그래프와 일치함을 알 수 있다.

이전에 배운 내용

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=f(x-a)+b$



두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프에서 π 간격으로 각 함숫값의 부호가 바뀐다.

따라서 임의의 실수 x에 대하여

$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$

이다.

한편 함수 $y=\tan x$는 주기가 π이므로 임의의 실수 x에 대하여

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\pi+x$의 삼각함수

❶ $\sin(\pi+x)=-\sin x$ ❷ $\cos(\pi+x)=-\cos x$

❸ $\tan(\pi+x)=\tan x$

참고 위의 정리에서 x 대신 $-x$를 대입하면

$$\sin(\pi-x)=-\sin(-x)=\sin x$$
$$\cos(\pi-x)=-\cos(-x)=-\cos x$$
$$\tan(\pi-x)=\tan(-x)=-\tan x$$

개념 확인

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

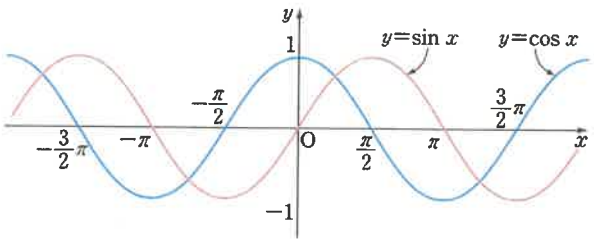
$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

문제 8 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{4}{3}\pi$ (2) $\cos\frac{5}{4}\pi$ (3) $\tan\frac{5}{6}\pi$

$\frac{\pi}{2}+x$의 삼각함수

다음 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치함을 알 수 있다.



따라서 임의의 실수 x에 대하여

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 이때 ㉠의 양변에 x 대신 $\frac{\pi}{2}+x$를 대입하면

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이고, ㉡의 양변에 x 대신 $\frac{\pi}{2}+x$를 대입하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(\pi+x)=-\sin x \quad \cdots\cdots ㉢$$

이다. 한편 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로 ㉡, ㉢에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\tan x}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\frac{\pi}{2}+x$의 삼각함수

❶ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ ❷ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

❸ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$

참고 위의 정리에서 x 대신 $-x$를 대입하면

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(-x)=\cos x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{\tan(-x)}=\frac{1}{\tan x}$$

개념 확인

$\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$

문제 9 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi$ (2) $\cos\frac{3}{4}\pi$ (3) $\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

생각을 넓히는 수학 문제 해결

다음 식의 값을 구하여 보자.

(1) $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{2}{19}\pi+\cos\frac{3}{19}\pi+\cdots+\cos\frac{18}{19}\pi+\cos\frac{19}{19}\pi$

(2) $\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{2}{18}\pi+\sin^2\frac{3}{18}\pi+\cdots+\sin^2\frac{7}{18}\pi+\sin^2\frac{8}{18}\pi$