빠른 정답

어려운 3점 쉬운 4점 핵 / 심 / 문 / 제

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

SET							
SET 01	001 ⑤	002 5	003 ④	004 ①	005 21	006 ⑤	007 27
	008 ⑤	009 ④	010 ③				
SET 02	011 ②	012 ⑤	013 ③	014 ③	015 ④	016 ②	017 ③
	018 3	019 625	020 ④				
SET 03	021 ③	022 ②	023 ⑤	024 93	025 ②	026 6	027 ②
	028 ④	029 ②	030 4				
SET 04	031 33	032 ⑤	033 ③	034 ②	035 17	036 ⑤	037 ④
	038 ③	039 9	040 ④				
SET 05	041 ②	042 ③	043 13	044 9	045 ⑤	046 64	047 ③
	048 1	049 247	050 ②				
SET 06	051 ⑤	052 ④	053 1	054 ②	055 81	056 5	057 ②
	058 ①	059 ②	060 6				
SET 07	061 138	062 ③	063 18	064 ⑤	065 13	066 266	067 ④
	068 370	069 32	070 10				
SET 08	071 ②	072 ③	073 ⑤	074 6	075 ③	076 5	077 128
	078 ⑤	079 34	080 ⑤				

Ⅱ. 삼각함수

SET							
SET 09	081 ①	082 ④	083 ③	084 ④	085 54	086 ③	087 ①
	088 6	089 ③	090 ③				
SET 10	091 48	092 ①	093 ④	094 ②	095 14	096 8	097 3
	098 8	099 20	100 9				
SET 11	101 ⑤	102 ④	103 ①	104 ①	105 ①	106 9	107 ①
	108 ③	109 ③	110 ②				
SET 12	111 ③	112 ④	113 ②	114 ①	115 27	116 ④	117 5
	118 20	119 12	120 96				
SET 13	121 ②	122 ②	123 ⑤	124 ①	125 ③	126 62	127 ①
	128 ①	129 ③	130 8				
SET 14	131 ④	132 ⑤	133 27	134 ④	135 10	136 ⑤	137 ①
	138 ①	139 7	140 ①				
SET 15	141 ⑤	142 ⑤	143 ①	144 ④	145 ⑤	146 ④	147 ③
	148 ③	149 ③	150 ②				
SET 16	151 216	152 3	153 9	154 ③	155 ③	156 ⑤	157 ③
	158 ③	159 ①	160 180				

Ⅲ. 수열

SET							
SET 17	161 ⑤	162 30	163 30	164 ②	165 ②	166 ③	167 ④
	168 ①	169 ②	170 42				
SET 18	171 11	172 ⑤	173 ③	174 1	175 ④	176 ①	177 ②
	178 159	179 ②	180 ③				
SET 19	181 ④	182 9	183 9	184 692	185 108	186 287	187 16
	188 ⑤	189 28	190 21				
SET 20	191 24	192 ①	193 ⑤	194 ③	195 118	196 ②	197 108
	198 ⑤	199 150	200 ②				
SET 21	201 ①	202 35	203 ③	204 ③	205 560	206 ⑤	207 ②
	208 8	209 ②	210 ③				
SET 22	211 ①	212 225	213 ③	214 ①	215 287	216 ⑤	217 81
	218 ③	219 ③	220 ②				
SET 23	221 3	222 ③	223 ③	224 ①	225 ③	226 31	227 ④
	228 55	229 29	230 ①				
SET 24	231 ⑤	232 ②	233 19	234 ①	235 118	236 ①	237 ③
	238 ④	239 ②	240 18				

이투스북

빠른 정답

부록 핵심 문제 **짝기출**

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

SET 01	001 25 002 10 003 ⑤ 004 ① 005 ④ 006 ③
SET 02	007 ③ 008 ⑤ 009 ⑤ 010 ⑤ 011 ③
SET 03	012 ② 013 16 014 6 015 ③ 016 ④
SET 04	017 ④ 018 ④ 019 ③ 020 ② 021 ③
SET 05	022 ④ 023 ① 024 27 025 ④ 026 15 027 ④ 028 ③
SET 06	029 ② 030 ② 031 ④ 032 ④ 033 ③
SET 07	034 ⑤ 035 ③ 036 16 037 15 038 426 039 192
SET 08	040 ② 041 ① 042 75 043 ① 044 24 045 ①

Ⅱ. 삼각함수

SET 09	046 ④ 047 ④ 048 ② 049 7 050 ④ 051 ①
SET 10	052 ④ 053 ① 054 ① 055 ③ 056 ⑤ 057 ③
SET 11	058 ② 059 ① 060 ③ 061 ②
SET 12	062 6 063 24 064 ⑤ 065 ③ 066 98 067 ③
SET 13	068 ④ 069 14 070 ⑤ 071 ③
SET 14	072 ① 073 ⑤ 074 ② 075 ① 076 ③ 077 ①
SET 15	078 8 079 ③ 080 ④ 081 ② 082 ②
SET 16	083 ⑤ 084 ① 085 ② 086 ③ 087 ⑤

Ⅲ. 수열

SET 17	088 20 089 10 090 ④ 091 8 092 ⑤
SET 18	093 10 094 ② 095 ② 096 13 097 ① 098 ① 099 64
SET 19	100 ⑤ 101 ① 102 22 103 ① 104 ④ 105 25
SET 20	106 ① 107 9 108 ④ 109 12 110 ①
SET 21	111 ① 112 ④ 113 ④ 114 63 115 ② 116 ⑤ 117 ② 118 ①
SET 22	119 ① 120 ① 121 ⑤ 122 ① 123 162 124 ⑤
SET 23	125 43 126 ② 127 ① 128 19 129 ②
SET 24	129 ③ 130 ② 131 ④ 132 11 133 ③

이투스북

어삼쉬사 Plus+

| 정답과 풀이 |

수학 I

240제

3 4

어삼쉬사를 넘어야 1등급 도전이 시작된다.

이투스북

학습진단표

약점 유형 확인

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 지수와 로그	유형 01 거듭제곱근과 지수법칙의 계산	001, 011, 025, 031, 039, 052, 063, 075	/ 8개
	유형 02 지수법칙의 실생활 활용	003	/ 1개
	유형 03 로그의 뜻과 성질	004, 012, 024, 032, 042, 055, 062, 066, 072	/ 9개
	유형 04 로그의 실생활 활용	027, 035	/ 2개
	유형 05 상용로그의 뜻	021, 041, 051, 073	/ 4개
	유형 06 상용로그의 실생활 활용	017	/ 1개
② 지수함수와 로그함수	유형 07 지수함수의 뜻과 그래프	005, 009, 015, 019, 028, 033, 045, 059, 070, 077	/ 10개
	유형 08 로그함수의 뜻과 그래프	008, 016, 022, 037, 050, 057, 067, 071	/ 8개
	유형 09 지수·로그함수의 최대·최소	014, 018, 036, 046, 061	/ 5개
	유형 10 지수·로그함수의 역함수	006, 020, 023, 034, 049, 053, 068, 079	/ 8개
	유형 11 지수·로그방정식의 풀이	002, 013, 043, 048, 058, 078	/ 6개
	유형 12 지수·로그부등식의 풀이	026, 040, 047, 056, 065, 074	/ 6개
	유형 13 지수·로그방정식과 부등식 (치환)	007, 029, 038, 044, 064, 069, 076	/ 7개
	유형 14 지수·로그부등식의 실생활 활용	054	/ 1개
	유형 15 지수·로그함수와 개수 세기	010, 030, 060, 080	/ 4개

Ⅱ. 삼각함수

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 삼각함수	유형 01 호도법과 삼각함수의 뜻	081, 097, 101, 116, 131, 142, 155	/ 7개
	유형 02 삼각함수 사이의 관계	087, 092, 103, 117, 126, 132, 147, 152	/ 8개
	유형 03 삼각함수의 그래프	084, 096, 100, 106, 110, 111, 122, 129, 133, 144, 153, 154	/ 12개
	유형 04 삼각함수의 성질	082, 090, 095, 104, 114, 124, 134, 148, 157	/ 9개
	유형 05 삼각함수의 활용(1) – 기본형	089, 094, 099, 102, 112, 113, 121, 125, 135, 141, 156	/ 11개
	유형 06 삼각함수의 활용(2) – 치환	086, 098, 105, 115, 123, 136, 139, 145, 150, 158	/ 10개
	유형 07 사인법칙의 이해	083, 091, 109, 118, 127, 140, 143, 151	/ 8개
	유형 08 코사인법칙의 이해	085, 093, 108, 120, 128, 137, 146, 159	/ 8개
	유형 09 사인법칙과 코사인법칙의 활용	088, 107, 119, 130, 138, 149, 160	/ 7개

Ⅲ. 수열

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 등차수열과 등비수열	유형 01 등차수열의 뜻과 등차중항	166, 180, 187, 190, 198, 209, 214, 222, 231	/ 9개
	유형 02 등차수열의 합	161, 171, 185, 192, 201, 212, 220, 233	/ 8개
	유형 03 등비수열의 뜻과 등비중항	162, 172, 177, 181, 191, 208, 229, 232	/ 8개
	유형 04 등비수열의 합	164, 179, 184, 193, 205, 217, 226, 240	/ 8개
	유형 05 수열의 합과 일반항 사이의 관계	165, 176, 183, 194, 202, 213, 221, 227, 234	/ 9개
② 수열의 합	유형 06 Σ의 뜻과 성질	168, 174, 186, 204, 211, 225, 235	/ 7개
	유형 07 여러 가지 수열의 합	163, 175, 195, 200, 203, 216, 228, 238	/ 8개
③ 수학적 귀납법	유형 08 수열의 귀납적 정의	167, 173, 182, 197, 206, 215, 230, 237	/ 8개
	유형 09 발견적 추론	170, 178, 189, 199, 210, 219, 223, 236, 239	/ 9개
	유형 10 수학적 귀납법	169, 188, 196, 207, 218, 224	/ 6개

풀이 시간 확인

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

SET	SET 01	SET 02	SET 03	SET 04	SET 05	SET 06	SET 07	SET 08
Time								

Ⅱ. 삼각함수

SET	SET 09	SET 10	SET 11	SET 12	SET 13	SET 14	SET 15	SET 16
Time								

Ⅲ. 수열

SET	SET 17	SET 18	SET 19	SET 20	SET 21	SET 22	SET 23	SET 24
Time								

I 지수함수와 로그함수

001

실수 a가 $5^a=15$를 만족시키므로

$5^{a-1}=3,\ 5=3^{\frac{1}{a-1}}$이다.

$\therefore\ 9^{\frac{1}{a-1}}=(3^2)^{\frac{1}{a-1}}=\left(3^{\frac{1}{a-1}}\right)^2=5^2=25$

다른풀이

$5^a=15$에서 로그의 정의에 의하여

$a=\log_5 15$이므로

$a-1=\log_5 15-1$

$=\log_5 \frac{15}{5}$

$=\log_5 3$

이다.

$\therefore\ 9^{\frac{1}{a-1}}=9^{\log_3 5}=5^{\log_3 9}$

$=5^2=25$

답 ⑤

002

$\log_2 \frac{y}{x}=\log_4 \frac{x^8}{y^2}$에서 $\log_2 \frac{y}{x}=\frac{1}{2}\log_2 \frac{x^8}{y^2}$이므로

$\frac{y}{x}=\left(\frac{x^8}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, 즉 $\frac{y}{x}=\frac{x^4}{y}$이다.

$\therefore\ y^2=x^5$

따라서 $\log_{x^5} y^2=1$이므로 $\frac{2}{5}\log_x y=1$에서

$\log_x y=\frac{5}{2}$이다.

$\therefore\ 2\log_x y=2\times\frac{5}{2}=5$

답 5

003

이 호수에서 수심이 2 m 인 곳에서의 빛의 세기는

$A_0\times 2^{-\frac{1}{2}}$이고,

수심이 8 m 인 곳에서의 빛의 세기는 $A_0\times 2^{-2}$이다.

$\therefore\ a=\dfrac{A_0\times 2^{-\frac{1}{2}}}{A_0\times 2^{-2}}=2^{-\frac{1}{2}-(-2)}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

답 ④

004

근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $x^2+ax+8=0$에서

$\alpha+\beta=-a,$ ⋯⋯㉠

$\alpha\beta=8$이고 ⋯⋯㉡

이차방정식 $x^2+bx-4=0$에서 ⋯⋯㉢

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-b$, 즉 $b=-\log_2\alpha\beta$이다. ⋯⋯㉣

㉡을 ㉣에 대입하면

$b=-\log_2 8=-\log_2 2^3=-3$이다.

이를 ㉢에 대입하면

$x^2-3x-4=0,$

$(x+1)(x-4)=0$이다.

따라서 $\log_2\alpha,\ \log_2\beta$의 값은 $-1,\ 4$이므로

$\alpha,\ \beta$의 값은 $\frac{1}{2},\ 16$이다.

따라서 ㉠에 의하여

$a=-\left(\frac{1}{2}+16\right)=-\frac{33}{2}$

$\therefore\ a+b=\left(-\frac{33}{2}\right)+(-3)=-\frac{39}{2}$

답 ①

005

$f(x)=2^{1-2x}-8,\ g(x)=2^x-k$라 하자.

함수 $f(x)$는 x의 값이 커질 때 함숫값은 작아지고

함수 $g(x)$는 x의 값이 커질 때 함숫값은 커진다.

또한 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 0)$,

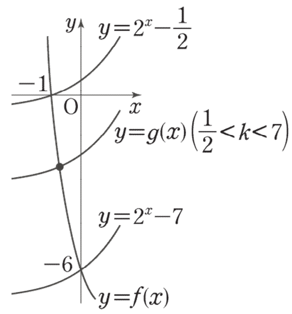
$(0,\ -6)$을 지나므로

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 교점이

제3사분면에 존재하려면

$g(-1)<0$이고 $g(0)>-6$이어야 한다.

즉, $\frac{1}{2}-k<0$이고 $1-k>-6$이어야 한다.



따라서 $\frac{1}{2}<k<7$을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$이다.

답 21

006

함수 $y=2^{1-x}+1$은 x의 값이 작아질수록 y의 값이 커지므로

$x<1$일 때 $f(x)=2^{1-x}+1>2$이다. $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=\log_2\frac{4}{x}$, 즉 $y=2-\log_2 x$는 x의 값이 커질수록 y의 값이 작아지므로

$x\geq 1$일 때 $f(x)=\log_2\frac{4}{x}\leq 2$이다. $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $f^{-1}(-2)=a$, $f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=-2$, $f(b)=5$이므로

㉠, ㉡에 의하여 $a\geq 1$, $b<1$이다.

따라서

$f(a)=2-\log_2 a=-2$이므로

$\log_2 a=4$에서 $a=16$이고

$f(b)=2^{1-b}+1=5$이므로

$2^{1-b}=4$에서 $1-b=2$, 즉 $b=-1$이다.

$\therefore\ f^{-1}(-2)+f^{-1}(5)=16+(-1)=15$

답 ⑤

007

$x^{\log_3 x}=27x^3$을 만족시키려면 $x>0$이고,

위의 식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^3$

$(\log_3 x)\times(\log_3 x)=\log_3 27+\log_3 x^3$

$(\log_3 x)^2=3+3\log_3 x$

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-3=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-3=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$

이때 ㉠의 두 실근은 3^α, 3^β이므로 모든 실근의 곱은

$3^{\alpha+\beta}=3^3=27$

답 27

008

함수 $y=\log_2(x-t)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=t$이므로 이 점근선이 두 곡선 $y=-\log_4 x$,

$y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{x}$과 만나는 점의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(t,\ -\log_4 t)$, $\mathrm{B}\left(t,\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{t}\right)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\left|\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{t}+\log_4 t\right|\\&=\left|\log_2\frac{t}{16}+\frac{1}{2}\log_2 t\right|\\&=\left|\log_2 t-4+\frac{1}{2}\log_2 t\right|\\&=\left|\frac{3}{2}\log_2 t-4\right|\end{aligned}$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로 $\left|\frac{3}{2}\log_2 t-4\right|=5$에서

$\frac{3}{2}\log_2 t-4=5$ 또는 $\frac{3}{2}\log_2 t-4=-5$

$\frac{3}{2}\log_2 t=9$ 또는 $\frac{3}{2}\log_2 t=-1$

$\log_2 t=6$ 또는 $\log_2 t=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ t=2^6=64$ 또는 $t=2^{-\frac{2}{3}}$

따라서 $t>2$이므로 $t=64$

답 ⑤

009

함수 $y=\sqrt{2}^x$의 그래프와 직선 $y=mx+1$은 모두

점 $(0,\ 1)$을 지나므로

두 교점 A, B에 대하여

점 A의 좌표를 $(0,\ 1)$이라 하고,

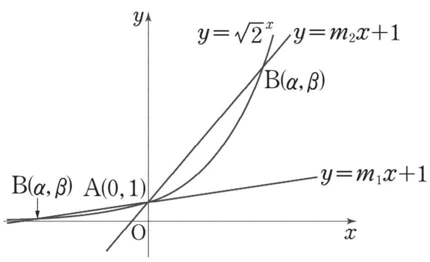
점 B의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 하자.

이때 삼각형 OAB의 넓이가 3이면

$\frac{1}{2}\times 1\times|\alpha|=3$이므로 $\alpha=-6$ 또는 $\alpha=6$이다.

그림과 같이 직선 $y=mx+1$의 기울기는

$\alpha=-6$일 때 m_1이고, $\alpha=6$일 때 m_2이다.



(ⅰ) $\alpha=-6$일 때

$2^{-\frac{6}{2}}=-6m_1+1$에서 $m_1=\frac{7}{48}$이다.

(ⅱ) $\alpha=6$일 때

$2^{\frac{6}{2}}=6m_2+1$에서 $m_2=\frac{7}{6}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\frac{m_2}{m_1}=\frac{7}{6}\times\frac{48}{7}=8$이다.

답 ④

010

(ⅰ) $a,\ b$가 모두 홀수인 경우

$\log_4 a+\log_4 b=\log_4 ab$이므로

$\log_4 ab\le 2$, 즉 $ab\le 16$을 만족시키려면

$a=1$일 때 $b=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 15$

$a=3$일 때 $b=1,\ 3,\ 5$

$a=5$일 때 $b=1,\ 3$

$a=7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$일 때 $b=1$

이 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$8+3+2+5=18$이다.

(ⅱ) $a,\ b$가 모두 짝수인 경우

$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$이므로

$\log_2 ab\le 2$, 즉 $ab\le 4$를 만족시키는 순서쌍

$(a,\ b)$의 개수는 $(2,\ 2)$로 1이다.

(ⅲ) a가 홀수, b가 짝수인 경우

$\log_4 a+\log_2 b=\log_4 ab^2$이므로

$\log_4 ab^2\le 2$, 즉 $ab^2\le 16$을 만족시키는 순서쌍

$(a,\ b)$의 개수는 $(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (3,\ 2)$로 3이다.

(ⅳ) a가 짝수, b가 홀수인 경우

(ⅲ)에서 구한 순서쌍에서 $a,\ b$를 맞바꾼 것과 같으므로

이 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수도 3이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$18+1+3+3=25$이다.

답 ③

011

$12^x=3$에서

$12^{-x}=3^{-1}=\frac{1}{3}$이므로

$12^{2-x}=12\times 12\times 12^{-x}=144\times\frac{1}{3}=48$이고

$12=48^{\frac{1}{2-x}}$이다. ……㉠

㉠을 $12^y=8$에 대입하면

$(48^{\frac{1}{2-x}})^y=8,\ 48^{\frac{y}{2-x}}=8$이므로

$48=8^{\frac{2-x}{y}}$이다.

$\therefore\ 64^{\frac{2-x}{y}}=(8^2)^{\frac{2-x}{y}}=(8^{\frac{2-x}{y}})^2=48^2$

다른풀이

$12^y=8$에서 $12=8^{\frac{1}{y}}$이고, ……㉠

$12^x=3$에서 $12^{-x}=3^{-1}=\frac{1}{3}$이므로

$12^{2-x}=12\times 12\times 12^{-x}$

$=144\times\frac{1}{3}=48$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $48=12^{2-x}=8^{\frac{2-x}{y}}$이므로

$64^{\frac{2-x}{y}}=(8^2)^{\frac{2-x}{y}}$

$=(8^{\frac{2-x}{y}})^2=48^2$

답 ②

012

k가 자연수이므로 로그의 진수 조건에서

$x^2-x+k=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}>0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 (진수)>0이다.

한편 $\log_2(x^2-x+k)=2$에서 로그의 정의에 의하여

$x^2-x+k=2^2$이다.

따라서 주어진 등식을 만족시키는 실수 x가 존재하기 위한

자연수 k의 값은

이차방정식 $x^2-x+k-4=0$의 실근이 존재하기 위한

자연수 k의 값과 같다.

이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(-1)^2-4\times1\times(k-4)=17-4k\geq0$

이어야 한다.

즉, $k\leq\dfrac{17}{4}$을 만족시키는 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4=10$이다.

답 ⑤

013

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_x 3}=x^{\log_3 \frac{x}{2}}$에서 로그의 밑과 진수 조건에 의하여

$x>0,\ x\neq1$

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_x 3}=x^{\log_3 \frac{x}{2}}$에서 $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_x 3}=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_3 x}$이므로

지수가 같은 경우와 밑이 1인 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) 지수가 같은 경우

$\log_x 3=\log_3 x$에서 $\dfrac{1}{\log_3 x}=\log_3 x,\ (\log_3 x)^2=1$

$\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=-1$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

(ii) 밑이 1인 경우

$\dfrac{x}{2}=1$에서 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 실근의 합은

$3+\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{16}{3}$

답 ③

014

$0<a<1$일 때 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는

$|x|=2$일 때 최솟값 a^2을 갖고,

$|x|=0$일 때 최댓값 $a^0=1$을 갖는다. 참고

그런데 최댓값과 최솟값의 합이 10이 될 수 없다.

$\therefore\ a>1$

$a>1$일 때 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는

$|x|=2$일 때 최댓값 a^2을 갖고,

$|x|=0$일 때 최솟값 $a^0=1$을 갖는다.

최댓값과 최솟값의 합이 10이므로

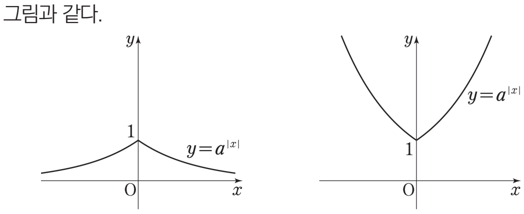
$a^2+1=10,\ a^2=9$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

답 ③

참고

$0<a<1$일 때와 $a>1$일 때의 함수 $y=a^{|x|}$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



[$0<a<1$일 때]　　[$a>1$일 때]

015

삼각형 APB는 선분 AB를 빗변으로 하는

직각이등변삼각형이고 넓이가 16이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=4\sqrt{2}$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점이 A이므로

A$(0,\ 1)$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{2}\times\overline{AP}=\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$이므로

B$(0,\ 9)$이다.

삼각형 APB의 넓이가 16이므로 점 P의 x좌표는 4이다.

즉, P$(4,\ 5)$이다.

함수 $f(x)=a^x\ (a>1)$의 그래프가 점 P$(4,\ 5)$를

지나므로

$a=\sqrt[4]{5}\ (\because\ a>1)$이고,

함수 $g(x)=-b^x+c\ (b>1,\ c>2)$의 그래프가 점

P$(4,\ 5)$를 지나므로

$-b^4+c=5$이다. ……㉠

또한 함수 $g(x)=-b^x+c\ (b>1,\ c>2)$의 그래프가 점

B$(0,\ 9)$를 지나므로

$9=-1+c$에서 $c=10$이다.

$c=10$을 ㉠에 대입하면 $b^4=5$이므로

$b=\sqrt[4]{5}\ (\because\ b>1)$이다.

$\therefore\ (ab)^2+c=(\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{5})^2+10=15$

답 ④

016

곡선 $y=\log_2 x$가 두 직선 $y=a$, $y=-a$와 만나는 점

A, C의 좌표는 각각 로그의 정의에 의하여

$\log_2 x=a$에서 $x=2^a$이므로 $A(2^a,\ a)$이고

$\log_2 x=-a$에서 $x=2^{-a}$이므로 $C(2^{-a},\ -a)$이다.

이때 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(-x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

점 A를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점은

$D(-2^a,\ -a)$이고

점 C를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점은

$B(-2^{-a},\ a)$이다.

한편 사각형 ABDC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 평행사변형이므로 마름모이다.

즉, 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

따라서 두 직선 AD, BC의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\frac{2a}{2\times2^a}\times\frac{-2a}{2\times2^{-a}}=-1,$$

$a^2=1$,

$a=1\ (\because\ a>0)$

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

$\overline{AB}\times2a=\{2^1-(-2^{-1})\}\times2=5$이다.

답 ②

017

$A_1=295,\ B_1=50,\ A_2=15,\ B_2=450$일 때 전위차는

$$V_1=C\log\frac{10\times15+450}{10\times295+50}$$

$$=C\log\frac{600}{3000}=C\log\frac{1}{5}$$

$A_1=247,\ B_1=30,\ A_2=x,\ B_2=350$일 때 전위차는

$$V_2=C\log\frac{10x+350}{10\times247+30}$$

$$=C\log\frac{10x+350}{2500}=C\log\frac{x+35}{250}$$

$V_1=V_2$에서

$$C\log\frac{1}{5}=C\log\frac{x+35}{250}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{x+35}{250}$$

$x+35=50\qquad\therefore\ x=15$

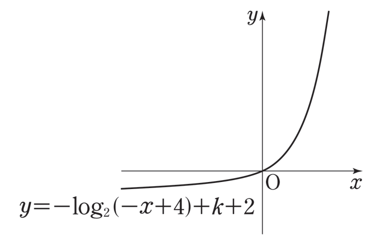
답 ③

018

곡선 $y=-\log_2(-x)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 $k+2$만큼 평행이동한 곡선은

$y=-\log_2(-x+4)+k+2$, 즉

$f(x)=-\log_2(-x+4)+k+2$



곡선 $y=f(x)$가 제4사분면을 지나지 않으려면

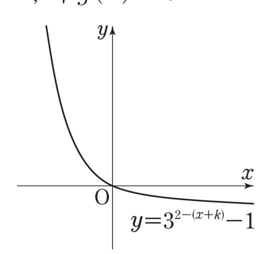
$f(0)\ge0$이어야 한다.

즉, $-\log_2 4+k+2\ge0$이므로

$k\ge\log_2 4-2=0$ ……㉠

한편 곡선 $y=3^{2-x}$을 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 곡선은

$y=3^{2-(x+k)}-1$, 즉 $g(x)=3^{2-(x+k)}-1$



곡선 $y=g(x)$가 제3사분면을 지나지 않으려면

$g(0)\ge0$이어야 한다.

즉, $3^{2-k}-1\ge0$이므로

$3^{-k}\ge\frac{1}{9}\qquad\therefore\ k\le2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0\le k\le2$이므로 정수 k는 0, 1, 2이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 3이다.

답 3

019

세 점 A, B, C의 x좌표는 각각 방정식

$a^{-x}=k$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x=k$, $b^{-x}=k$의 실근이므로

각각 $-\log_a k$, $-\log_5 k$, $-\log_b k$이다.

즉, $\overline{AD}=|-\log_a k|=\log_a k$,

$\overline{BD}=|-\log_5 k|=\log_5 k$,

$\overline{CD} = |-\log_b k| = \log_b k$이고

$\overline{AB} : \overline{BC} = 3:1$, $\overline{BC} : \overline{CD} = 2:1$이므로

$\overline{AB} = 3\overline{BC}$, ……㉠

$\overline{BC} = 2\overline{CD}$ 이다. ……㉡

한편

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

$= 2\overline{CD} + \overline{CD} = 3\overline{CD}$ ($\because$ ㉡) ……㉢

이므로

$\log_5 k = 3\log_b k$이고

$\dfrac{1}{\log_k 5} = \dfrac{3}{\log_k b}$, $3\log_k 5 = \log_k b$이다.

$\therefore\ b = 5^3$

또한 ㉠, ㉡에서

$\overline{AB} = 3\overline{BC} = 6\,\overline{CD}$ ……㉣

이므로

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$

$= 6\overline{CD} + 3\overline{CD}$ ($\because$ ㉢, ㉣)

$= 9\overline{CD}$

즉, $\log_a k = 9\log_b k$이므로

$\dfrac{1}{\log_k a} = \dfrac{9}{\log_k b}$, $9\log_k a = \log_k b$이다.

$\therefore\ b = a^9$

$\therefore\ a^3 = b^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5$

$\therefore\ a^3 b = 5 \times 5^3 = 625$

답 625

020

함수 $f(x) = a^x - b$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

함수 $y = f(x)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$a^0 - b = 0$에서 $b = 1$이다.

함수 $y = f(x)$의 그래프는 x의 값이 커질 때 함숫값이 커지므로 ($\because\ a > 1$)

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

따라서 점 P의 좌표를 $(p,\ p)$라 하자.

이때 $\overline{OP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$라 주어졌으므로

$\sqrt{p^2 + p^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 $p^2 = \dfrac{1}{4}$

$p = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $p = \dfrac{1}{2}$이다.

(i) $p = -\dfrac{1}{2}$일 때

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$이므로

$a^{-\frac{1}{2}} - 1 = -\dfrac{1}{2}$,

$a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore\ a = 4$

(ii) $p = \dfrac{1}{2}$일 때

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$이므로

$a^{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{2}$,

$a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}$이다.

$\therefore\ a = \dfrac{9}{4}$

(i), (ii)에 의하여 모든 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 ab의 값의 합은 $4 \times 1 + \dfrac{9}{4} \times 1 = \dfrac{25}{4}$이다.

답 ④

021

$$\log_8 75 = \frac{\log 75}{\log 8} = \frac{\log(5^2 \times 3)}{\log 2^3}$$
$$= \frac{2\log 5 + \log 3}{3\log 2}$$
$$= \frac{2(1-\log 2) + \log 3}{3\log 2}$$
$$= \frac{2(1-a)+b}{3a}$$
$$= \frac{2-2a+b}{3a}$$

답 ③

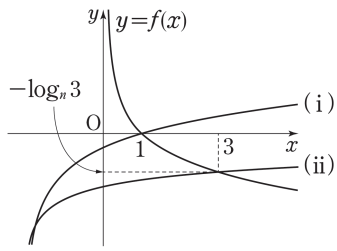
022

$f(x) = \log_{\frac{1}{n}} x$, $g(x) = \log_n (x+2) - 1$이라 하자.

$f(x)$는 감소하는 함수, $g(x)$는 증가하는 함수이고,

$f(1)=\log_{\frac{1}{n}}1=0$, $f(3)=\log_{\frac{1}{n}}3=-\log_n 3$이므로

$1<x_n<3$을 만족시키려면 곡선 $y=g(x)$는 그림과 같이 두 곡선 (ⅰ), (ⅱ) 사이에 있어야 한다.



(ⅰ) 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나는 경우

$0=\log_n 3-1$에서 $\log_n 3=1$

$\therefore\ n=3$

(ⅱ) 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ -\log_n 3)$을 지나는 경우

$-\log_n 3=\log_n 5-1$에서 $\log_n 5+\log_n 3=1$

$\log_n 15=1 \qquad \therefore\ n=15$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $3<n<15$이므로 이를 만족시키는 자연수 n은 $4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 14$로 그 개수는 11이다.

답 ②

023

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체 집합으로의 일대일대응이고, 함수 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$f(a)=1$이라 하면

$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-4}=1$에서 $a-4=0$이므로 $a=4$이다.

따라서 $g(1)=4$이다.

$f(b)=4$라 하면

$\left(\frac{1}{3}\right)^{b-4}=4$에서 $b-4=\log_{\frac{1}{3}}4$이므로

$b=4-\log_3 4=\log_3\frac{81}{4}$이다.

따라서 $g(4)=\log_3\frac{81}{4}$이다.

$\therefore\ g(g(1))=g(4)=\log_3\frac{81}{4}$

다른풀이

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$의 역함수 $g(x)$를 구할 수 있다.

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x-4=\log_{\frac{1}{3}}y$,

$x=4-\log_3 y$이고 x와 y를 서로 바꾸면

$y=4-\log_3 x$

따라서 $g(x)=\log_3\frac{81}{x}$이다.

$\therefore\ g(g(1))=g(4)=\log_3\frac{81}{4}$

답 ⑤

024

자연수 m에 대하여 $4\log_n 3=m$이라 하면

$\log_n 3=\frac{m}{4}$, $3=n^{\frac{m}{4}}$

$\therefore\ n=3^{\frac{4}{m}}$ ……㉠

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 ㉠이 성립하려면 $\frac{4}{m}$가 자연수이어야 한다.

즉, 가능한 자연수 m의 값은 $1,\ 2,\ 4$이다.

(ⅰ) $m=1$일 때 ㉠에서 $n=3^4=81$

(ⅱ) $m=2$일 때 ㉠에서 $n=3^2=9$

(ⅲ) $m=4$일 때 ㉠에서 $n=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 n의 값의 합은

$81+9+3=93$

답 93

025

$2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}=k$라 하면

$$k^3=\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}\times\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)+\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$=2+3k+\frac{1}{2}$$

따라서 $k^3-3k=\frac{5}{2}$이다.

한편 k는 x에 대한 방정식 $2x^3-6x-a=0$의 실근이므로

$2k^3-6k-a=0$을 만족시킨다.

$\therefore\ a=2k^3-6k$

$=2(k^3-3k)$

$=2\times\dfrac{5}{2}=5$

답 ②

026

$2^{-x+1}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\dfrac{1}{32}$에서

$2\times2^{-x}-2^{-x}\ge2^{-5}$, $2^{-x}\ge2^{-5}$이다.

즉, $-x\ge-5$이므로 $x\le5$이다.

따라서 자연수 x의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로

구하는 합은 $5+1=6$이다.

답 6

027

15개의 선택지 중에서 1개를 선택하는 데 걸리는 시간이

8초이므로

$8=k\log_2 16$,

$8=4k$

$\therefore\ k=2$

11개, 23개의 선택지 중에서 1개를 선택하는 데 걸리는

시간이 각각 t_1, t_2초이므로

$t_1=2\log_2 12$, $t_2=2\log_2 24$이다.

$\therefore\ t_2-t_1=2\log_2 24-2\log_2 12$

$=2\log_2\dfrac{24}{12}=2$

답 ②

028

두 곡선 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^{-x}$에 대하여

$f(0)=g(0)=1$이므로 두 곡선의 교점은 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 높이는 $\overline{\mathrm{AD}}=3$이고,

삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$라 주어졌으므로

$\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{9}{2}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이다.

이때 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:1$이라 주어졌으므로

$\overline{\mathrm{BD}}=2$, $\overline{\mathrm{CD}}=1$

즉, 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=4$의 교점 B의 x좌표가

2이므로

$a^2=4$에서 $a=2$이다. ($\because\ a>0$)

곡선 $y=b^{-x}$과 직선 $y=4$의 교점 C의 x좌표가

-1이므로

$b^{-(-1)}=4$에서 $b=4$이다.

$\therefore\ a+b=6$

다른풀이

두 곡선 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^{-x}$에 대하여

$f(0)=g(0)=1$이므로 두 곡선의 교점은 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$의 교점 B의 x좌표를 s라

하면

$a^s=4$에서 $s=\log_a 4$이고

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=4$의 교점 C의 x좌표를 t라

하면

$b^{-t}=4$에서 $-t=\log_b 4$, 즉 $t=-\log_b 4$이다.

한편 삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$라 주어졌으므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{9}{2}$에서

$\dfrac{1}{2}\times\{\log_a 4-(-\log_b 4)\}\times(4-1)=\dfrac{9}{2}$,

$\log_a 4+\log_b 4=3$이다. ……㉠

또한 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:1$이라 주어졌으므로

$\log_a 4:\log_b 4=2:1$에서

$\log_a 4=2\log_b 4$이다. ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\log_b 4=3$이므로 $b=4$이다.

이를 다시 ㉡에 대입하면

$\log_a 4=2\log_4 4$이므로 $a=2$이다.

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

029

$2^{2x}+2^{x+1}-k+10\ge0$에서

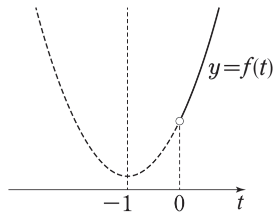
$2^{2x}+2\times2^x-k+10\ge0$이므로

$2^x=t\,(t>0)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진

부등식이 성립하려면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식

$t^2+2t-k+10\ge0$이 성립해야 한다. ……㉠

$f(t)=t^2+2t-k+10$이라 하면
이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식이
$t=-1$이다.

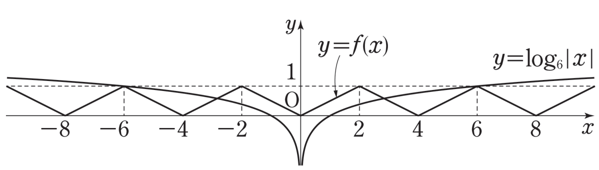


㉠을 만족시키려면 $f(0)\geq 0$을 만족시키면 되므로
$f(0)=-k+10\geq 0$에서 $k\leq 10$
따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 10이다.

답 ②

030

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,
모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로
함수 $f(x)$의 주기는 4이다.
또한 $\log_6|6|=\log_6|-6|=1$이므로 함수 $y=f(x)$의
그래프와 함수 $y=\log_6|x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=\log_6|x|$의 서로 다른 실근의 개수는
4이다.

답 4

031

$\sqrt[3]{2^{n+1}}$, 즉 $2^{\frac{n+1}{3}}$이 자연수가 되기 위해서는
$\frac{n+1}{3}$이 음이 아닌 정수가 되어야 한다.
따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은 $2, 5, 8, \cdots, 98$로
33개이다.

답 33

032

$\log_2 a=\log_3 b=\log_6 5=k$라 하자. (단, k는 상수)
로그의 정의에 의하여
$\log_2 a=k$에서 $a=2^k$
$\log_3 b=k$에서 $b=3^k$
$\log_6 5=k$에서 $5=6^k$
$\therefore\ ab=2^k\times 3^k=(2\times 3)^k=6^k=5$

다른풀이

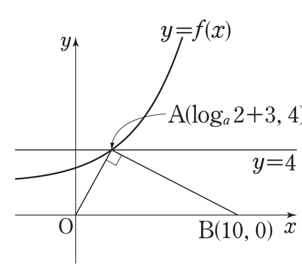
로그의 정의에 의하여
$\log_2 a=\log_6 5$에서 $a=2^{\log_6 5}=5^{\log_6 2}$
$\log_3 b=\log_6 5$에서 $b=3^{\log_6 5}=5^{\log_6 3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ ab&=5^{\log_6 2}\times 5^{\log_6 3}\\&=5^{\log_6 2+\log_6 3}\\&=5^{\log_6 6}=5\end{aligned}$$

답 ⑤

033

$f(x)=a^{x-3}+2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선
$y=4$가 만나는 점 A의 x좌표는 $a^{x-3}+2=4$에서
$a^{x-3}=2$, $x-3=\log_a 2$
$\therefore\ x=\log_a 2+3$, 즉 $\mathrm{A}(\log_a 2+3,\ 4)$
이때 점 $\mathrm{B}(10,\ 0)$에 대하여 두 직선 OA, AB가 서로
수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다.



즉, $\dfrac{4-0}{\log_a 2+3-0}\times\dfrac{0-4}{10-(\log_a 2+3)}=-1$이므로
$-16=-10(\log_a 2+3)+(\log_a 2+3)^2$
$(\log_a 2+3)^2-10(\log_a 2+3)+16=0$
$\{(\log_a 2+3)-2\}\{(\log_a 2+3)-8\}=0$
$(\log_a 2+1)(\log_a 2-5)=0$
$\log_a 2=-1$ 또는 $\log_a 2=5$
$2=a^{-1}$ 또는 $2=a^5$
$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\sqrt[5]{2}$
이때 $a>1$이므로 구하는 a의 값은 $\sqrt[5]{2}$이다.

답 ③

034

함수 $y=\log_3(9x)$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 함수의 그래프에 대한 식은

$y=\log_3(9x)+a$, 즉 $y=\log_3 x+2+a$이다. ……㉠

함수 $y=3^{x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 함수의 그래프에 대한 식은

$y=3^{x-1-b}$이다. ……㉡

즉, 역함수 관계인 두 함수 $y=\log_3 x$, $y=3^x$에 대하여

㉠은 곡선 $y=\log_3 x$를 y축의 방향으로 $2+a$만큼 평행이동시킨 것이고,

㉡은 곡선 $y=3^x$을 x축의 방향으로 $1+b$만큼 평행이동시킨 것이다.

이때 ㉠, ㉡이 직선 $y=x$에 대하여 대칭, 즉 역함수 관계라 주어졌으므로

$2+a=1+b$이어야 한다.

$\therefore\ a-b=-1$

답 ②

035

공기와 냉매의 입구온도차와 출구온도차가 각각 16, 8일 때의 평균온도차는 T_A이므로

$$T_A=\frac{16-8}{\log_a 16-\log_a 8}=\frac{8}{\log_a 2}\text{이고}$$

공기와 냉매의 입구온도차와 출구온도차가 각각 24, 6일 때의 평균온도차는 T_B이므로

$$T_B=\frac{24-6}{\log_a 24-\log_a 6}=\frac{18}{\log_a 4}=\frac{9}{\log_a 2}$$

따라서 $\dfrac{T_B}{T_A}=\dfrac{\dfrac{9}{\log_a 2}}{\dfrac{8}{\log_a 2}}=\dfrac{9}{8}$이므로

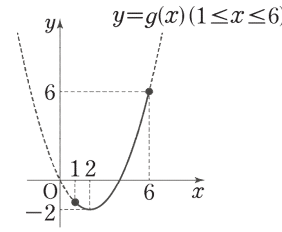
$p+q=8+9=17$

답 17

036

$1\le x\le 6$에서 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-2$는

$x=2$일 때 최솟값 -2를 갖고, $x=6$일 때 최댓값 6을 갖는다.



(i) $0<a<1$인 경우

함수 $g(x)$가 최솟값을 가질 때, 함수 $(f\circ g)(x)$가 최댓값을 갖는다.

즉, $f(g(2))=a^{-2}=64$이므로 $a=\dfrac{1}{8}$이다.

(ii) $a>1$인 경우

함수 $g(x)$가 최댓값을 가질 때, 함수 $(f\circ g)(x)$가 최댓값을 갖는다.

즉, $f(g(6))=a^6=64$이므로 $a=2$이다.

따라서 구하는 1이 아닌 모든 양수 a의 값의 합은

$\dfrac{1}{8}+2=\dfrac{17}{8}$이다.

답 ⑤

037

두 점 A, C의 x좌표를 s라 하면 y좌표는 각각

$\dfrac{1}{n+1}\log_2(s+1)$, $\log_2(s+1)$이다.

두 점 B, D의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 각각

$\dfrac{1}{n+1}\log_2(t+1)$, $\log_2(t+1)$이다.

이때 두 점 C, B의 y좌표가 서로 같으므로

$\log_2(s+1)=\dfrac{1}{n+1}\log_2(t+1)$이다. ……㉠

한편

$$\overline{AC}=\log_2(s+1)-\frac{1}{n+1}\log_2(s+1)$$

$$=\frac{n}{n+1}\log_2(s+1)\text{이고}$$

$$\overline{BD}=\log_2(t+1)-\frac{1}{n+1}\log_2(t+1)$$

$$=\frac{n}{n+1}\log_2(t+1)\text{이므로}$$

㉠에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{\dfrac{n}{n+1}\log_2(t+1)}{\dfrac{n}{n+1}\log_2(s+1)}=n+1\text{이다.}$$

따라서 $n+1=10$에서 $n=9$이다.

답 ④

038

모든 실수 x에 대하여 부등식

$4^x+4 \geq a(2^{x+1}-3)$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$2^x=t\ (t>0)$라 할 때

모든 양수 t에 대하여 부등식

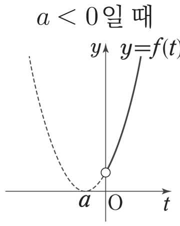
$t^2+4 \geq a(2t-3)$,

$t^2-2at+4+3a \geq 0$,

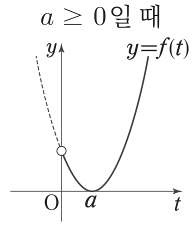
$(t-a)^2 \geq a^2-3a-4$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위와 같다. ……㉠

이때 $f(t)=(t-a)^2$이라 하자.

$a<0$일 때



$a \geq 0$일 때



(ⅰ) $a<0$인 경우

모든 양수 t에 대하여 $f(t)>f(0)=a^2$이므로

㉠을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a^2 \geq a^2-3a-4$,

$3a \geq -4$,

$a \geq -\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 이 경우 $-\dfrac{4}{3} \leq a<0$이다.

(ⅱ) $a \geq 0$인 경우

모든 양수 t에 대하여 $f(t) \geq f(a)=0$이므로

㉠을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0 \geq a^2-3a-4$,

$0 \geq (a+1)(a-4)$,

$-1 \leq a \leq 4$이다.

따라서 이 경우 $0 \leq a \leq 4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 ㉠을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-\dfrac{4}{3} \leq a \leq 4$이다.

따라서 구하는 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$4+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$이다.

답 ③

039

2 이상의 자연수 n에 대하여

(ⅰ) $n=3,\ 5,\ 7,\ 9$일 때

실수 $n(n-6)$의 값의 관계없이 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$이다.

(ⅱ) $n=2,\ 4$일 때

음수 $n(n-6)$의 n제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$f(2)=f(4)=0$이다.

(ⅲ) $n=6$일 때

0의 6제곱근 중 실수인 것은 0이므로

$f(6)=1$이다.

(ⅳ) $n=8,\ 10$일 때

양수 $n(n-6)$의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$f(8)=f(10)=2$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$$\sum_{k=2}^{10} f(k)=0+1+0+1+1+1+2+1+2=9$$

답 9

040

$k<\log_2(n^2-4n+7)<k+1$에서

$\log_2 2^k<\log_2(n^2-4n+7)<\log_2 2^{k+1}$

밑이 1보다 크므로

$2^k<n^2-4n+7<2^{k+1}$

(ⅰ) $k=3$일 때

$2^3<n^2-4n+7<2^4$에서

$8<(n-2)^2+3<16,\ 5<(n-2)^2<13$

즉, $(n-2)^2=9$만 가능하고 n은 자연수이므로

$n=5$

$\therefore\ S(3)=5$

(ⅱ) $k=6$일 때

$2^6<n^2-4n+7<2^7$에서

$64<(n-2)^2+3<128,\ 61<(n-2)^2<125$

즉, $(n-2)^2$의 값은 64, 81, 100, 121이 가능하고

n은 자연수이므로

$n=10$ 또는 $n=11$ 또는 $n=12$ 또는 $n=13$

$\therefore\ S(6)=10+11+12+13=46$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$S(3)+S(6)=5+46=51$

답 ④

041

$$\frac{1}{3a}-\frac{1}{b}=\frac{b-3a}{3ab}$$
$$=\frac{\log_3 25}{3\times\log_{27}5}$$
$$=\frac{2\times\log_3 5}{3\times\left(\frac{1}{3}\times\log_3 5\right)}=2$$

답 ②

042

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$\log a\neq 0$, $\log b\neq 0$, $\log c\neq 0$이다.

조건 (가)에 의하여 $(\log b)^2=\log a\times\log c$ ……㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{\log c}{\log b}=64\frac{\log a}{\log c}$ ……㉡

㉠÷㉡에서

$\frac{(\log b)^3}{\log c}=\frac{(\log c)^2}{64}$, 즉 $\frac{\log b}{\log c}=\frac{1}{4}$이다.

$\therefore\ \log_a b=\frac{\log b}{\log a}=\frac{\log c}{\log b}=4$ ($\because$ ㉠)

답 ③

043

(ⅰ) 지수가 0이면 주어진 방정식이 성립한다.

$x-5=0 \qquad \therefore\ x=5$

(ⅱ) 밑이 1이면 주어진 방정식이 성립한다.

$x^2-5x+5=1$, $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

(ⅲ) 밑이 -1이고 지수가 $2m$ (m은 정수) 꼴일 때 주어진 방정식이 성립한다.

$x^2-5x+5=-1$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

ⓐ $x=2$일 때 지수는 -3이므로 주어진 방정식이 성립하지 않는다.

ⓑ $x=3$일 때 지수는 -2이므로 주어진 방정식이 성립한다.

ⓐ, ⓑ에서 주어진 방정식이 성립하는 경우는

$x=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 실근의 합은

$5+1+4+3=13$

답 13

044

(ⅰ) 방정식 $4^x-10\times 2^x+16=0$의 해

$2^x=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2-10t+16=0$,

$(t-2)(t-8)=0$,

$t=2$ 또는 $t=8$이다.

$2^x=2$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$이다.

(ⅱ) 방정식 $(\log_2 x)^2=a\log_2 x$의 해

$\log_2 x=s$라 하면

$s^2-as=0$,

$s(s-a)=0$

$s=0$ 또는 $s=a$이다.

$\log_2 x=0$ 또는 $\log_2 x=a$이므로

$x=1$ 또는 $x=2^a$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구한 모든 해가 서로 같아야 하므로

$2^a=3$이다.

$\therefore\ 4^a=(2^a)^2=9$

답 9

045

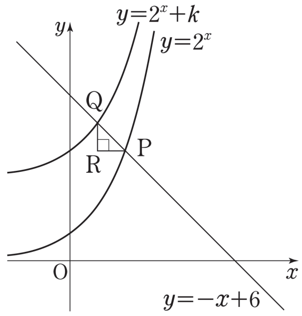
점 P의 x좌표는 $2^x=-x+6$에서

$x=2$, 즉 P$(2,\ 4)$

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 R라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$이고 직선 $y=-x+6$의 기울기가 -1이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=1$, $\overline{\mathrm{QR}}=1$이다.



즉, $\mathrm{Q}(1,\ 5)$이고 점 Q는 함수 $y=2^x+k$의 그래프 위의 점이므로

$5=2+k$

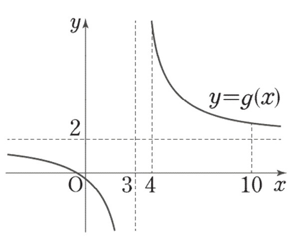
$\therefore\ k=3$

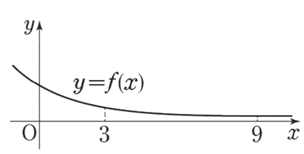
답 ⑤

046

$\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$이므로

함수 $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$의 그래프는 두 직선 $x=3$, $y=2$를 점근선으로 갖는다.





따라서 함수 $g(x)$는 $x>3$인 모든 실수 x에 대하여 x의 값이 커질 때 함숫값은 작아지고,

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 x의 값이 커질 때 함숫값은 작아지므로

$4\le x\le 10$에서

$g(10)\le g(x)\le g(4)$, 즉 $3\le g(x)\le 9$이고

$f(9)\le f(g(x))\le f(3)$이다.

따라서 $M=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, $m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$이다.

$\therefore\ \dfrac{M}{m}=2^6=64$

답 64

047

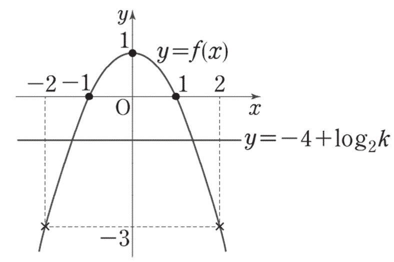
$k\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}\le 16$,

$\log_2\{k\times 2^{-f(x)}\}\le\log_2 16$,

$\log_2 k-f(x)\le 4$,

$-4+\log_2 k\le f(x)$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 곡선 $y=f(x)$ 위의 x좌표가 정수인 점 중 y좌표가 $-4+\log_2 k$보다 크거나 같은 점의 개수가 3이어야 한다.



따라서 $f(2)<-4+\log_2 k\le f(1)$, 즉

$-3<-4+\log_2 k\le 0$이어야 한다.

$1<\log_2 k\le 4$에서 밑이 1보다 크므로

$2<k\le 2^4$

$\therefore\ ab=2\times 16=32$

답 ③

048

로그의 진수 조건에 의하여

$x+1>0$ 이고 $1-2x>0$이므로

$-1<x<\dfrac{1}{2}$이다. ……㉠

$\log_3(x+1)+\log_3(1-2x)=\log_3 a$에서

$\log_3\{(x+1)(1-2x)\}=\log_3 a$,

$(x+1)(1-2x)=a$,

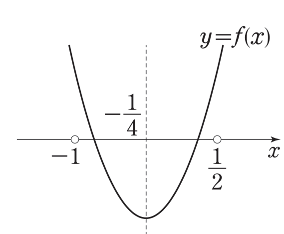
$2x^2+x+a-1=0$이다. ……㉡

즉, 주어진 방정식을 만족시키는 실수 x가 존재하려면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.

$f(x)=2x^2+x+a-1$이라 하면

$f(x)=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+a-\dfrac{9}{8}$이므로

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 실수 x가 존재하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $-1<x<\dfrac{1}{2}$인 범위에서 x축과 적어도 한 점에서 만나야 한다.



이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가

$\left(-\frac{1}{4},\ a-\frac{9}{8}\right)$이므로

$a-\frac{9}{8}\le 0,\ f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=a>0$

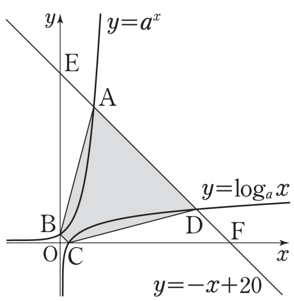
이어야 한다.

따라서 $0<a\le\frac{9}{8}$이므로 구하는 자연수 a는 1이다.

답 1

049

직선 $y=-x+20$이 y축과 만나는 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하면 E$(0,\ 20)$, F$(20,\ 0)$이다.



이때 점 D는 선분 AF를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}:\overline{DF}=3:1$이고,

함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 서로 역함수 관계이므로 $\overline{DA}:\overline{AE}=3:1$이다.

즉, A$(4,\ 16)$, D$(16,\ 4)$이다.

이때 점 A$(4,\ 16)$은 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$16=a^4$에서 $a=2$ ($\because\ a>1$)이다.

한편 B$(0,\ 1)$, C$(1,\ 0)$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{2}$이고,

A$(4,\ 16)$, D$(16,\ 4)$이므로 $\overline{AD}=12\sqrt{2}$이다.

직선 AD와 원점 사이의 거리는 $10\sqrt{2}$,

직선 BC와 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

두 직선 AD와 BC 사이의 거리는

$10\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{19\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+12\sqrt{2})\times\frac{19\sqrt{2}}{2}=\frac{247}{2}$이므로

구하는 값은

$2\times\frac{247}{2}=247$이다.

답 247

050

$\log_2(32x)=\log_2(2^5\times x)=5+\log_2 x$이므로

함수 $g(x)=\log_2(32x)$의 그래프는 함수

$f(x)=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼

평행이동시킨 것과 같다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$이고

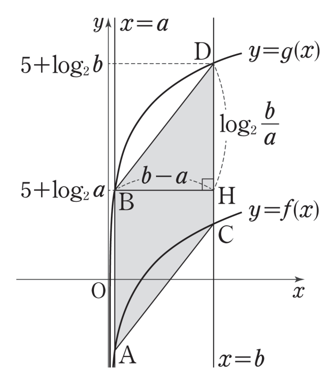
A$(a,\ \log_2 a)$, B$(a,\ 5+\log_2 a)$, C$(b,\ \log_2 b)$,

D$(b,\ 5+\log_2 b)$이다.

이때 점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=b-a$,

$\overline{DH}=(5+\log_2 b)-(5+\log_2 a)=\log_2\frac{b}{a}$이다.



한편 사각형 ACDB의 넓이가 15라 주어졌으므로

$\overline{BH}\times\overline{CD}=15$, 즉 $(b-a)\times 5=15$에서

$b-a=3$이다. ……㉠

또한 사각형 ACDB가 마름모라 주어졌으므로

$\overline{BD}=\overline{AC}=5$이고

직각삼각형 BHD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{BH}^2}$, 즉 $\log_2\frac{b}{a}=\sqrt{5^2-3^2}$에서

$\log_2\frac{b}{a}=4$이다.

따라서 로그의 정의에 의하여

$\frac{b}{a}=2^4$이므로 $b=16a$이다. ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a+3=16a$에서 $a=\frac{1}{5}$이고

이를 다시 ㉡에 대입하면 $b=\frac{16}{5}$이다.

$\therefore\ a+b=\frac{17}{5}$

다른풀이

$\log_2(32x)=\log_2(2^5\times x)=5+\log_2 x$이므로

함수 $g(x)=\log_2(32x)$의 그래프는 함수

$f(x)=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼

평행이동시킨 것과 같다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$이고

$A(a, \log_2 a)$, $B(a, 5+\log_2 a)$, $C(b, \log_2 b)$,

$D(b, 5+\log_2 b)$이다.

이때 마름모 ACDB의 넓이가 15이므로

$5(b-a)=15$에서 $b-a=3$이고 ······㉠

마름모 ACDB의 두 대각선 AD, BC가 서로 수직으로

만나므로

$$\frac{(5+\log_2 b)-\log_2 a}{b-a}\times\frac{\log_2 b-(5+\log_2 a)}{b-a}=-1$$

$$\frac{5+\log_2\frac{b}{a}}{3}\times\frac{\log_2\frac{b}{a}-5}{3}=-1$$

$\left(\log_2\frac{b}{a}\right)^2-25=-9$,

$\left(\log_2\frac{b}{a}\right)^2=16$,

$\log_2\frac{b}{a}=4$ $(\because a<b)$,

$b=16a$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{16}{5}$이다.

$\therefore a+b=\frac{17}{5}$

답 ②

051

주어진 표에 의하여 $\log 2.28=0.3579$이므로

$a=\log 2.28$이고

$b=-1+0.3579$

$=\log 10^{-1}+\log 2.28$

$=\log 0.228$이므로

$10^a=10^{\log 2.28}=2.28$,

$10^b=10^{\log 0.228}=0.228$

$\therefore 10^a+10^b=2.508$

답 ⑤

052

$\sqrt[3]{2^{f(n)}}$, 즉 $2^{\frac{f(n)}{3}}$은 양수이므로 네제곱근 중 실수인 것은

$-\sqrt[4]{2^{\frac{f(n)}{3}}}$과 $\sqrt[4]{2^{\frac{f(n)}{3}}}$, 즉 $-2^{\frac{f(n)}{12}}$과 $2^{\frac{f(n)}{12}}$으로

2개이고, 이를 모두 곱한 값이 -4이므로

$-2^{\frac{f(n)}{12}}\times 2^{\frac{f(n)}{12}}=-4$에서

$2^{\frac{f(n)}{12}+\frac{f(n)}{12}}=2^2$, $2^{\frac{f(n)}{6}}=2^2$, $\frac{f(n)}{6}=2$

$\therefore f(n)=12$ ······㉠

이때 함수 $f(x)=x^2-4x+k$에 대하여 ㉠을 만족시키는

자연수 n이 오직 한 개만 존재하므로

$n^2-4n+k=12$, $n^2-4n+k-12=0$

에서 n에 대한 이차방정식 $n^2-4n+k-12=0$이 중근을

가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(k-12)=0$

$\therefore k=16$

답 ④

053

$y=5^{x-2}+k$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$5^{x-2}=y-k$, $x-2=\log_5(y-k)$

$x=\log_5(y-k)+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_5(x-k)+2$

즉, 함수 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\log_5(x-k)+2$

역함수의 그래프를 x축의 방향으로 k^2만큼 평행이동한

그래프를 나타내는 식은 $y=\log_5(x-k^2-k)+2$이므로

$g(x)=\log_5(x-k^2-k)+2$

이때 곡선 $f(x)=5^{x-2}+k$의 점근선은 $y=k$이고,

곡선 $g(x)=\log_5(x-k^2-k)+2$의 점근선은

$x=k^2+k$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

(k^2+k, k)이다.

이 점이 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 $k=\frac{1}{2}(k^2+k)$에서

$2k=k^2+k$, $k^2-k=0$, $k(k-1)=0$

$\therefore k=1$ $(\because k>0)$

답 1

054

처음 온도가 $4(℃)$인 달걀이 온도가 $n(℃)$인 물에서 완전히 익는 데 걸리는 시간은 처음 온도가 $20(℃)$인 달걀이 온도가 $100(℃)$인 물에서 완전히 익는 데 걸리는 시간의 2배가 넘으므로

$$b\log_a\left(0.8\times\frac{n-4}{n-68}\right)>2b\log_a\left(0.8\times\frac{100-20}{100-68}\right),$$

$$\log_a\left(0.8\times\frac{n-4}{n-68}\right)>\log_a\left(0.8\times\frac{100-20}{100-68}\right)^2$$ 에서

밑이 1보다 크므로

$$\frac{4(n-4)}{5(n-68)}>4,$$

$n-4>5n-340,$

$4n<336,$

$n<84$

따라서 자연수 n의 최댓값은 83이다.

답 ②

055

조건 (가)에 의하여

$$\log_3\frac{a^5}{b^2}+\log_3\frac{b^5}{c^2}+\log_3\frac{c^5}{a^2}=\log_3\left(\frac{a^5}{b^2}\times\frac{b^5}{c^2}\times\frac{c^5}{a^2}\right)$$
$$=\log_3(abc)^3=729$$

이므로

$\log_3(abc)=243$ ($\because$ $abc>0$)이다.

$\therefore abc=3^{243}$

조건 (나)에 의하여

$a^x=b^{\frac{y}{3}}=c^{\frac{z}{6}}=27$이므로

$a=27^{\frac{1}{x}}$, $b=27^{\frac{3}{y}}$, $c=27^{\frac{6}{z}}$

$abc=27^{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}}=3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}\right)}$이다.

따라서 $3^{243}=3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}\right)}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=81$이다.

답 81

056

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-(3a+1)x\le-2a^2-a,$

$x^2-(3a+1)x+a(2a+1)\le0,$

$(x-a)(x-2a-1)\le0$

따라서 $a\ge-1$이면 $P=\{x\mid a\le x\le 2a+1\}$이고

$a<-1$이면 $P=\{x\mid 2a+1\le x\le a\}$이다. ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-8x+18)>-1$에서

이차방정식 $x^2-8x+18=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4^2-18<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+18>0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 진수의 조건을 만족시킨다.

……㉡

$\log_3(x^2-8x+18)<1,$

$\log_3(x^2-8x+18)<\log_3 3$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-8x+18<3,$

$x^2-8x+15<0,$

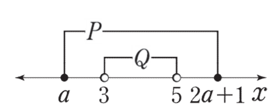
$(x-3)(x-5)<0,$

$3<x<5$ ……㉢

㉡, ㉢에 의하여 $Q=\{x\mid 3<x<5\}$이다.

이때 $q\Rightarrow p$이려면 $Q\subset P$이어야 하므로 $a\le3$이고

$2a+1\ge5$이어야 한다. ($\because$ ㉠에 의하여 $a<-1$이면 $P\cap Q=\varnothing$이므로 $a\ge-1$이어야 한다.)



즉, $2\le a\le3$이어야 하므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은 $2+3=5$이다.

답 5

057

곡선 $g(x)=\log_2(b-x)$의 점근선의 방정식은

$x=b$이고,

곡선 $f(x)=\log_2(x-a)$와 x축의 교점의 좌표는

$(a+1,\ 0)$이므로

조건 (가)에 의하여 $b=a+1$이다. ……㉠

조건 (나)에 의하여

$f\left(\frac{7}{2}\right)=g\left(\frac{7}{2}\right)$, 즉 $\log_2\left(\frac{7}{2}-a\right)=\log_2\left(b-\frac{7}{2}\right)$이고

로그함수는 일대일대응이므로

$\frac{7}{2}-a=b-\frac{7}{2}$에서 $a+b=7$이다. ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=4$이다.

$\therefore\ ab=12$

다른풀이

곡선 $g(x)=\log_2(b-x)$의 점근선의 방정식은

$x=b$이고,

곡선 $f(x)=\log_2(x-a)$와 x축의 교점의 좌표는

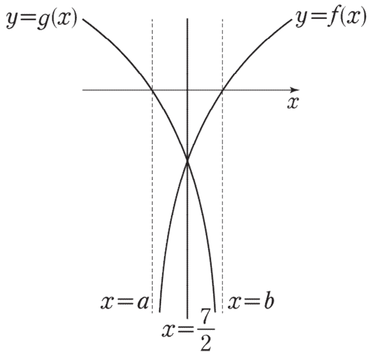
$(a+1,\ 0)$이므로

조건 (가)에 의하여 $b=a+1$이다. ……㉠

한편 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 밑이 서로 같으므로

조건 (나)에 의하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선

$x=\dfrac{7}{2}$에 대하여 대칭이다.



따라서 곡선 $y=f(x)$를 직선 $x=\dfrac{7}{2}$에 대하여

대칭이동시켰을 때 곡선 $y=g(x)$와 일치해야 하므로

$\log_2(7-x-a)=\log_2(b-x)$, 즉 $7-a=b$이어야

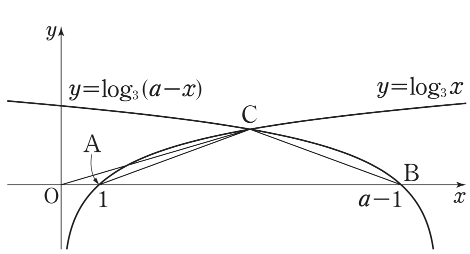
한다. ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=4$이다.

$\therefore\ ab=12$

답 ②

058



$\log_3 x=0$에서 $x=1$이므로

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고,

$\log_3(a-x)=0$에서 $a-x=1$, $x=a-1$이므로

$\mathrm{B}(a-1,\ 0)$이다.

삼각형 CAB의 넓이가 삼각형 COA의 넓이의 8배이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=8\overline{\mathrm{OA}}$에서

$(a-1)-1=8\times1$이다.

$\therefore\ a=10$

즉, $\log_3 x=\log_3(10-x)$에서 $x=10-x$이므로

$x=5$이다.

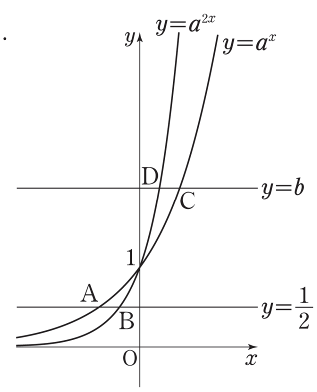
$\therefore\ \mathrm{C}(5,\ \log_3 5)$

따라서 점 C의 y좌표는 $\log_3 5$이다.

답 ①

059

ㄱ.



$\mathrm{A}\left(-\log_a 2,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2}\log_a 2,\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 ……㉠

점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표의 2배이다. (참)

ㄴ. 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

사각형 ABCD가 평행사변형이기 위한 필요충분조건은

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\mathrm{C}(\log_a b,\ b)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2}\log_a b,\ b\right)$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_a b-\dfrac{1}{2}\log_a b=\dfrac{1}{2}\log_a b$이고

㉠에서

$\overline{\mathrm{AB}}=-\dfrac{1}{2}\log_a 2-(-\log_a 2)=\dfrac{1}{2}\log_a 2$이므로

$\dfrac{1}{2}\log_a 2=\dfrac{1}{2}\log_a b$

즉, $b=2$이다. (참)

ㄷ. 두 직선 AD, BC의 기울기가 모두 2로 같으면

사각형 ABCD는 평행사변형, 즉 $b=2$이다.

이때 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2}\log_a 2,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}(\log_a 2,\ 2)$이므로

$$\frac{2-\frac{1}{2}}{\log_a 2-\left(-\frac{1}{2}\log_a 2\right)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\log_a 2}=2\text{에서}$$

$a=4$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

060

조건 (나)에 의하여 정사각형의 두 대각선의 교점은

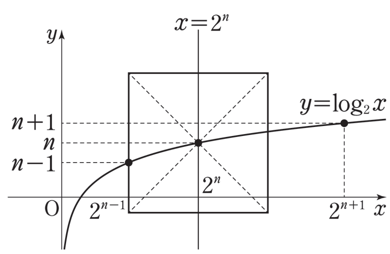
곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $x=2^n$의 교점의 좌표

$(2^n,\ n)$이다.

한편 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있고 x좌표, y좌표가 모두

자연수인 점 중 점 $(2^n,\ n)$과의 거리가 가장 가까운 점은

$(2^{n-1},\ n-1)$이다.



따라서 조건 (가), (다)에 의하여

정사각형 내부에 있는 점 중 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있으며

x좌표, y좌표가 모두 자연수인 점이 $(2^n,\ n)$뿐이려면

정사각형의 둘레 또는 외부에 점 $(2^{n-1},\ n-1)$이 있어야

한다.

즉, 정사각형의 한 변의 길이가 $2(2^n-2^{n-1})$보다 작거나

같아야 한다.

따라서 모든 조건을 만족시키는 가장 큰 정사각형의 한 변의

길이는

$a_n=2^{n+1}-2^n=2^n$이다.

따라서 $2^n<100$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은

6이다.

답 6

061

함수 $f(x)=a-4^{1-x}$은 x의 값이 증가하면 함숫값도

증가한다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $f(x)$는

$x=-1$일 때 최솟값 $a-16=-10$을 가지므로

$a=6$이고,

$x=2$일 때 최댓값 $6-4^{-1}=M$을 가지므로

$M=\dfrac{23}{4}$이다.

$\therefore\ 4aM=4\times 6\times\dfrac{23}{4}=138$

답 138

062

$\log_4 a=\log_{10} b=\log_{25}(2a+b)=k$라 하자.

(단, k는 상수)

$a=4^k,\ 2a+b=25^k$이고 ……㉠

$b=10^k$, 즉 $b=2^k\times 5^k$이므로 ……㉡

㉡의 양변을 제곱한 후 ㉠을 대입하면

$b^2=4^k\times 25^k$

$\quad=a(2a+b)$이다.

따라서

$2a^2+ab-b^2=0$,

$(2a-b)(a+b)=0$

이므로 $2a-b=0$이다. ($\because\ a>0,\ b>0$)

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=2$

다른풀이

$\log_4 a=\log_{10} b=\log_{25}(2a+b)=k$라 하자.

(단, k는 상수)

$a=4^k,\ b=10^k,\ 2a+b=25^k$이므로

$2\times 4^k+10^k=25^k$,

$2\times(2^k)^2+2^k\times 5^k-(5^k)^2=0$

$(2^k+5^k)(2^{k+1}-5^k)=0$,

$2^{k+1}=5^k$ ($\because\ 2^k>0,\ 5^k>0$)

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^k=2$,

$k=\log_{\frac{5}{2}} 2$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{10^k}{4^k}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\log_{\frac{5}{2}} 2}=2$

답 ③

063

$(\sqrt{2^3})^{10-n} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{10-n} = 2^{\frac{3(10-n)}{2}}$이다.

어떤 자연수가 $2^{\frac{3(10-n)}{2}}$의 n제곱근 중 하나가 되기 위해서는

$2^{\frac{3(10-n)}{2}} = a^n$, 즉 $2^{\frac{3(10-n)}{2n}} = a$를 만족시키는 자연수 a가 존재하면 된다.

따라서 구하는 2 이상의 자연수 n의 값의 합은

$\dfrac{3(10-n)}{2n}$이 음이 아닌 정수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n의 값의 합과 같다.

$\dfrac{3(10-n)}{2n} = k$라 하면 (단, k는 음이 아닌 정수)

$30 - 3n = 2nk$,

$(2k+3)n = 30$이므로

$k=0$일 때 $n=10$,

$k=1$일 때 $n=6$,

$k=6$일 때 $n=2$이다.

따라서 구하는 2 이상의 모든 자연수 n의 값의 합은

$10+6+2=18$이다.

답 18

064

$\sqrt{3}-1=t$라 하면 $0<t<1$이고

$t^2 = (\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$

이므로 주어진 부등식은

$t^m \geq (t^2)^{4-n}$, $t^m \geq t^{8-2n}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$m \leq 8-2n$

(ⅰ) $n=1$일 때

$1 \leq m \leq 6$이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$(1,\ 1), (2,\ 1), (3,\ 1), \cdots, (6,\ 1)$의 6이다.

(ⅱ) $n=2$일 때

$1 \leq m \leq 4$이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$(1,\ 2), (2,\ 2), (3,\ 2), (4,\ 2)$의 4이다.

(ⅲ) $n=3$일 때

$1 \leq m \leq 2$이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$(1,\ 3), (2,\ 3)$의 2이다.

(ⅳ) $n \geq 4$일 때

부등식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$6+4+2=12$

답 ⑤

065

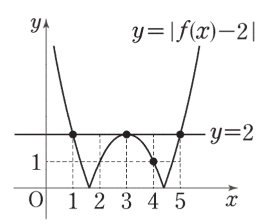
부등식 $3^{|f(x)-2|g(x)} \geq 9^{g(x)}$, 즉

$3^{|f(x)-2|g(x)} \geq 3^{2g(x)}$에서

함수 $y=3^x$은 x의 값이 커지면 함숫값이 커지는 함수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

부등식 $|f(x)-2|g(x) \geq 2g(x)$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합과 같다.

따라서 부등식 $g(x)\{|f(x)-2|-2\} \geq 0$의 자연수인 해를 구하면 다음과 같다.



$g(x)<0$이고 $|f(x)-2| \leq 2$를 만족시키는 자연수 x는 4, 5이고

$g(x) \geq 0$이고 $|f(x)-2| \geq 2$를 만족시키는 자연수 x는 1, 3이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+3+4+5=13$이다.

답 13

066

$$\log_{81}\left(\frac{3}{n+2}\right)^2 = \log_{3^4}\left(\frac{3}{n+2}\right)^2 = \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{3}{n+2}\right)$$

이고, 이 값이 정수이므로 정수 k에 대하여

$\log_3\left(\dfrac{3}{n+2}\right) = 2k$가 되어야 한다.

$\dfrac{3}{n+2} = 3^{2k}$에서 $\dfrac{3}{n+2} = 9^k$, $\dfrac{n+2}{3} = 9^{-k}$

$n+2 = 3\times 9^{-k}$

$\therefore\ n = 3\times 9^{-k} - 2$

조건 (가)에서 $1 < n < 1000$이므로

$1 < 3 \times 9^{-k} - 2 < 1000$, $3 < 3 \times 9^{-k} < 1002$

$1 < 9^{-k} < 334$ $\quad \therefore\ k = -1$ 또는 $k = -2$

(i) $k = -1$일 때 $n = 3 \times 9 - 2 = 25$

(ii) $k = -2$일 때 $n = 3 \times 9^2 - 2 = 241$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$25 + 241 = 266$

답 266

067

곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$은 곡선 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고 점 A의 좌표가 $(a, \log_{\frac{1}{3}} a)$이므로

$\mathrm{B}(a+3, \log_{\frac{1}{3}} a)$, $\mathrm{C}(a+3, \log_{\frac{1}{3}}(a+3))$

$\mathrm{D}(a+6, \log_{\frac{1}{3}}(a+3))$, $\mathrm{E}(a+6, \log_{\frac{1}{3}}(a+6))$이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3 \times \{\log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}}(a+3)\} = \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} \frac{a}{a+3}$

이고, 삼각형 CDE의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3 \times \{\log_{\frac{1}{3}}(a+3) - \log_{\frac{1}{3}}(a+6)\}$

$= \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} \frac{a+3}{a+6}$이다.

이때 삼각형 ABC와 삼각형 CDE의 넓이의 비가 $2:1$이므로

$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} \frac{a}{a+3} : \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{3}} \frac{a+3}{a+6} = 2:1$,

$2\log_{\frac{1}{3}} \frac{a+3}{a+6} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{a}{a+3}$,

$\left(\frac{a+3}{a+6}\right)^2 = \frac{a}{a+3}$,

$(a+3)^3 = a(a+6)^2$,

$a^3 + 9a^2 + 27a + 27 = a^3 + 12a^2 + 36a$,

$a^2 + 3a - 9 = 0$

$\therefore\ a = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

이때 $a > 0$이므로 $a = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$이다.

$\therefore\ 2a = 2 \times \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} = -3 + 3\sqrt{5}$

답 ④

068

곡선 $y = a^x + 2$는 곡선 $y = a^x$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이고,

$\log_a(ax - a) = \log_a(x-1) + 1$이므로

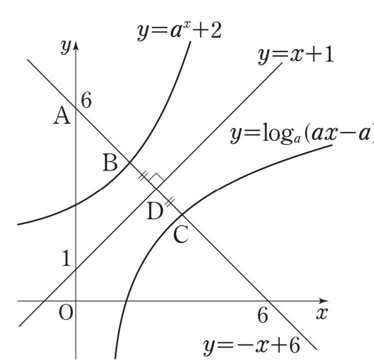
곡선 $y = \log_a(ax-a)$는 곡선 $y = \log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

두 곡선 $y = a^x$와 $y = \log_a x$는 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이므로

두 곡선 $y = a^x + 1$과 $y = \log_a(x-1)$도 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y = a^x + 2$와 $y = \log_a(x-1) + 1$은 직선 $y = x + 1$에 대하여 서로 대칭이다.

이때 두 직선 $y = -x + 6$과 $y = x + 1$의 기울기의 곱이 -1, 즉 두 직선이 서로 수직이므로 직선 $y = -x + 6$도 직선 $y = x + 1$에 대하여 대칭이다.



따라서 두 직선 $y = -x + 6$과 $y = x + 1$의 교점을 D라 하면 점 $\mathrm{D}\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$이 선분 BC의 중점이다.

한편 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$이고 $\mathrm{A}(0, 6)$이므로 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이 $\mathrm{B}\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}\right)$이다.

이때 점 B는 곡선 $y = a^x + 2$ 위의 점이므로

$a^{\frac{5}{3}} + 2 = \frac{13}{3}$, $a^{\frac{5}{3}} = \frac{7}{3}$

즉, $a^5=\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^3=\left(\frac{7}{3}\right)^3=\frac{343}{27}$이다.

$\therefore\ p+q=27+343=370$

답 370

069

$(\log_{\frac{1}{2}}x^2)(\log_2 x^2)+24\log_2|x|\geq n$,

$(-\log_2 x^2)(\log_2 x^2)+24\log_2|x|\geq n$,

$(-2\log_2|x|)(2\log_2|x|)+24\log_2|x|\geq n$

$\log_2|x|=t$라 하면

$-4t^2+24t\geq n$이다. ……㉠

$f(t)=-4t^2+24t$라 할 때,

곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=n$이

만나지 않거나 한 점에서만 만나면 조건 (나)를 만족시키지

않으므로 두 점에서 만나야 한다.

이때 곡선 $y=f(t)$는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이므로

이차함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의

x좌표를 α, $6-\alpha$라 할 수 있다. (단, $0<\alpha<3$)

㉠을 만족시키는 부등식의 해는 $\alpha\leq t\leq 6-\alpha$이므로

부등식 $\alpha\leq\log_2|x|\leq 6-\alpha$에서

$2^\alpha\leq|x|\leq 2^{6-\alpha}$이다.

따라서 조건 (가), (나)에 의하여

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$2(2^{6-\alpha}-2^\alpha+1)=26$이므로

$2^{6-\alpha}-2^\alpha=12$이고 양변에 2^α을 곱하면

$64-(2^\alpha)^2=12\times 2^\alpha$이다.

이때 $2^\alpha=s\ (s>0)$라 하면

$s^2+12s-64=0$,

$(s+16)(s-4)=0$,

$s=4$, 즉 $2^\alpha=4$이므로 $\alpha=2$이다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은

$f(2)=32$이다.

답 32

070

곡선 $y=4^x$이 직선 $y=p$와 만나는 점 A의 x좌표는

$4^x=p$에서 $x=\log_4 p$, 즉 $x=\frac{1}{2}\log_2 p$이고

곡선 $y=2^{-x}$이 직선 $y=p$와 만나는 점 B의 x좌표는

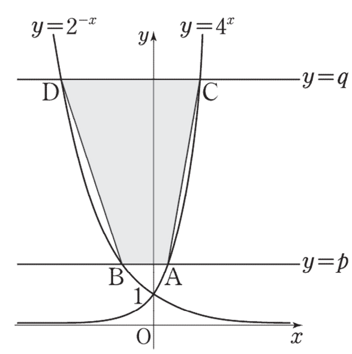
$2^{-x}=p$에서 $-x=\log_2 p$, 즉 $x=-\log_2 p$이므로

$\overline{AB}=\frac{3}{2}\log_2 p$이다.

마찬가지 방법으로 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^{-x}$이 직선

$y=q$과 만나는 점 C, D의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2}\log_2 q$,

$-\log_2 q$이므로 $\overline{CD}=\frac{3}{2}\log_2 q$이다.



이때 조건 (가)에 의하여

$\frac{3}{2}\log_2 p:\frac{3}{2}\log_2 q=1:3$,

$\log_2 q=\log_2 p^3$이고 로그함수는 일대일대응이므로

$q=p^3$이다.

따라서 $A\left(\frac{1}{2}\log_2 p,\ p\right)$, $B(-\log_2 p,\ p)$,

$C\left(\frac{3}{2}\log_2 p,\ p^3\right)$, $D(-3\log_2 p,\ p^3)$이고

조건 (나)에 의하여 직선 AC의 기울기는

$\dfrac{p^3-p}{\frac{3}{2}\log_2 p-\frac{1}{2}\log_2 p}=6$이므로

$p^3-p=6\log_2 p$이다. ……㉠

조건 (다)에 의하여 사각형 ACDB의 넓이는

$\dfrac{\frac{3}{2}\log_2 p+\frac{9}{2}\log_2 p}{2}\times(p^3-p)=18$이므로

$p^3-p=\dfrac{6}{\log_2 p}$이다. ……㉡

㉠=㉡에서

$6\log_2 p=\dfrac{6}{\log_2 p}$,

$(\log_2 p)^2=1$,

$\log_2 p=1\ (\because\ p>1)$

즉, $p=2$이고 $q=8$이다.

$\therefore\ p+q=10$

답 10

071

곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\log_2(a+b)$에서 $a+b=1$이고 ⋯⋯㉠

점근선이 $x=-2$이므로

$-\dfrac{b}{a}=-2$에서 $b=2a$이다. ⋯⋯㉡

따라서 ㉡을 ㉠에 대입하면 $3a=1$, 즉 $a=\dfrac{1}{3}$이고

이를 다시 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{2}{3}$이다.

$\therefore\ ab=\dfrac{2}{9}$

답 ②

072

$1<\log_2 x^3<25$에서 $1<3\log_2 x<25$

$\therefore\ \dfrac{1}{3}<\log_2 x<\dfrac{25}{3}$

자연수 y에 대하여

$y=\log_2\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}\log_2 x+\dfrac{3}{2}$이라 하면

$\dfrac{1}{3}<\log_2 x<\dfrac{25}{3}$인 양수 x에 대하여 y의 값의 범위는

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}<y<\dfrac{25}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{29}{18}<y<\dfrac{77}{18}$

$\therefore\ 1.61\times\times<y<4.27\times\times$

이때 가능한 자연수 y의 값은 $2,\ 3,\ 4$이므로

x의 최댓값은

$\dfrac{1}{3}\log_2 x+\dfrac{3}{2}=4$, $\log_2 x=\dfrac{15}{2}$이다.

$\therefore\ x=2^{\frac{15}{2}}$

x의 최솟값은

$\dfrac{1}{3}\log_2 x+\dfrac{3}{2}=2$, $\log_2 x=\dfrac{3}{2}$이다.

$\therefore\ x=2^{\frac{3}{2}}$

따라서 x의 최댓값과 최솟값의 곱은

$2^{\frac{15}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^9=512$이다.

답 ③

073

조건 (가)에 의하여

$2^x=3^y=a^z=k\ (k>0)$라 하면

$2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$, $a=k^{\frac{1}{z}}$이다. ⋯⋯㉠

조건 (나)에 의하여

$\log 3xy-\log(3x-y)=\log z$이므로

$\log\dfrac{3xy}{3x-y}=\log z$, $\dfrac{3xy}{3x-y}=z$

$\therefore\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{3x}$

이때 ㉠을 이용하기 위하여 위의 식을 변형하면

$$\begin{aligned}k^{\frac{1}{z}}&=k^{\frac{1}{y}-\frac{1}{3x}}\\&=k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{3x}}\\&=k^{\frac{1}{y}}\div\left(k^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

따라서 ㉠에 의하여

$a=3\div 2^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$이므로

$a^3=\dfrac{27}{2}$이다.

답 ⑤

074

로그의 진수 조건에 의하여

$x+2>0$이고 $x+4>0$이어야 하므로

$x>-2$이다. ⋯⋯㉠

$\log_2 2^3\le\log_2(x+2)(x+4)\le\log_2 2^k$에서 밑이

1보다 크므로

$2^3\le x^2+6x+8\le 2^k$,

$9\le(x+3)^2\le 2^k+1$이다. ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 6이 되어야

한다.

즉, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x가 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$로

6개이려면

$8^2 \le 2^k+1 < 9^2$이어야 한다.

$\therefore\ k=6$

답 6

075

$(x^n-16)f(x)=0$에서

$x^n=16$ 또는 $f(x)=0$이다.

이때 n은 짝수이므로 $x^n=16$은 서로 다른 두 실근

$2^{\frac{4}{n}},\ -2^{\frac{4}{n}}$을 갖는다.

조건 (가)에서 $(x^n-16)f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가지고, 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$는 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로 $f(x)=0$은 $2^{\frac{4}{n}}$을 근으로 가져야 한다.

또한 조건 (나)에서 두 근의 곱은 1이므로 $f(x)=0$은

$2^{\frac{4}{n}},\ 2^{-\frac{4}{n}}$을 실근으로 가져야 한다.

$$\therefore\ f(x)=\left(x-2^{\frac{4}{n}}\right)\left(x-2^{-\frac{4}{n}}\right)$$

$$=x^2-\left(2^{\frac{4}{n}}+2^{-\frac{4}{n}}\right)x+1$$

$$\therefore\ f(1)=2-\left(2^{\frac{4}{n}}+2^{-\frac{4}{n}}\right)$$

이때 조건 (다)에서 $f(1)$의 값이 유리수이어야 하므로

가능한 짝수 n의 값은 2, 4이다.

따라서 구하는 모든 짝수 n의 값의 합은

$2+4=6$

답 ③

076

$n<\log_2 m \le n+2$에서 밑이 1보다 크므로

$2^n < m \le 2^{n+2}$이고

이 부등식을 만족시키는 자연수 m의 개수는

$f(n)=2^{n+2}-2^n=3\times 2^n$이다.

따라서 $f(k)=3\times 2^k$, $f(2k)=3\times 2^{2k}$이므로

$f(2k)-12f(k)+96=0$에서

$3\times 2^{2k}-36\times 2^k+96=0$,

$2^{2k}-12\times 2^k+32=0$이다.

$2^k=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-12t+32=0$,

$(t-4)(t-8)=0$,

$t=4$ 또는 $t=8$에서

$2^k=4$ 또는 $2^k=8$이므로

$k=2$ 또는 $k=3$이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$2+3=5$이다.

답 5

077

$P_1(1,\ 16)$이고 점 $Q_1(x_1,\ 16)$은 곡선 $y=4^x$ 위의 점이므로

$4^{x_1}=16$, $4^{x_1}=4^2$

$\therefore\ x_1=2$, 즉 $Q_1(2,\ 16)$

$P_2(2,\ 16^2)$이고 점 $Q_2(x_2,\ 16^2)$은 곡선 $y=4^x$ 위의 점이므로

$4^{x_2}=16^2$, $4^{x_2}=4^4$

$\therefore\ x_2=4$, 즉 $Q_2(4,\ 16^2)$

$P_3(4,\ 16^4)$이고 점 $Q_3(x_3,\ 16^4)$은 곡선 $y=4^x$ 위의 점이므로

$4^{x_3}=16^4$, $4^{x_3}=4^8$

$\therefore\ x_3=8$, 즉 $Q_3(8,\ 16^4)$

$\vdots$

이와 같은 과정을 계속하면 자연수 n에 대하여

$x_n=2\times 2^{n-1}=2^n$

이때 $x_n>k$에서 $2^n>k$이고, 이를 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 8이므로 $2^7 \le k < 2^8$이어야 한다.

$\therefore\ 128 \le k < 256$

따라서 가능한 자연수 k의 최솟값은 128이다.

답 128

078

방정식 $|3^{-x-1}-2|=a$의 서로 다른 두 실근 α, β는

함수 $y=|3^{-x-1}-2|$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

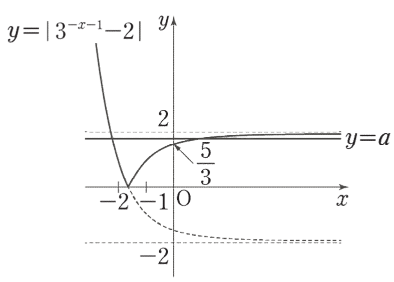
이때 함수 $y=3^{-x-1}-2$의 그래프는

함수 $y=3^{-x}$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 -1, -2만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 직선 $y=-2$를 점근선으로 갖고 점 $\left(0,\ -\frac{5}{3}\right)$를 지난다.

또한 함수 $y=|3^{-x-1}-2|$의 그래프는

함수 $y=3^{-x-1}-2$의 그래프에서 x축보다 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|3^{-x-1}-2|$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표 α, β에 대하여

$\alpha\beta<0$을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$\frac{5}{3}<a<2$이다.

답 ⑤

079

함수 $y=\log_2(x+a)$의 역함수를 구하기 위하여

x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x+a=2^y$,

$x=2^y-a$이고 x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^x-a$이다.

따라서 $f(x)=\log_2(x+a)$라 하면

$f^{-1}(x)=2^x-a$이다.

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 커질수록 함숫값이 커지는 함수이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동시킨 것이고,

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

(i) 곡선 $y=f(x)$와 삼각형 ABC가 만나는 경우

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$를 지날 때 a가 최댓값을 가지므로

$5=\log_2(1+a)$에서

$1+a=2^5$이다.

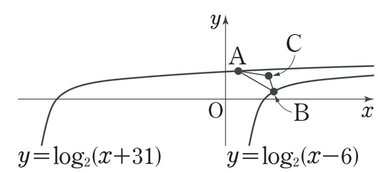
$\therefore\ a=31$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{B}(8,\ 1)$을 지날 때 a가 최솟값을 가지므로

$1=\log_2(8+a)$에서

$8+a=2^1$이다.

$\therefore\ a=-6$



따라서 이때의 a의 값의 범위는 $-6\le a\le 31$이다.

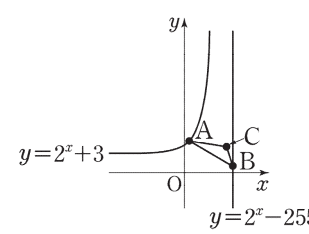
(ii) 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 삼각형 ABC가 만나는 경우

곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 $\mathrm{B}(8,\ 1)$을 지날 때 a가 최댓값을 가지므로

$1=2^8-a \qquad \therefore\ a=255$

곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$를 지날 때 a가 최솟값을 가지므로

$5=2^1-a \qquad \therefore\ a=-3$



따라서 이때의 a의 값의 범위는 $-3\le a\le 255$이다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

$-3\le a\le 31$이다.

$\therefore\ M-m=31-(-3)=34$

답 34

TIP

원함수와 역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하면 함수 $y=\log_2(x+a)$의 역함수를 구하지 않고도 (ii)에서 a의 값의 범위를 구할 수 있다.

즉, (ii)에서 역함수의 그래프가 점 $\mathrm{B}(8,\ 1)$, 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$를 지날 때의 각각의 a의 값은 원함수의 그래프가 점 $(1,\ 8)$, 점 $(5,\ 1)$을 지날 때의 각각의 a의 값과 같음을 이용하면 된다.

080

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(2,\ 1)$, $(2^2,\ 2)$, $(2^3,\ 3)$, $(2^4,\ 4)$, $(2^5,\ 5)$로 5개이다. (참)

ㄴ. $f(\sqrt[n]{x})=\log_2\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_2 x$이므로

함수 $f(\sqrt[n]{x})$는 $x=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{n}$, $x=2^5$일 때

최댓값 $\frac{5}{n}$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{6}{n}$이다. (참)

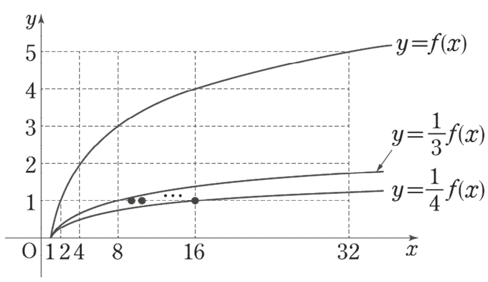
ㄷ. $h(x)=f(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\log_2 x$라 하자.

$n=4$일 때 $h(16)=1$, $1<h(32)<2$이므로

$g(4)$는 $g(3)$에서 8개의 점 $(9, 1)$, $(10, 1)$, $\cdots$,

$(16, 1)$을 더 세어주면 구할 수 있다.

즉, $g(4)=g(3)+8$이다.



마찬가지 방법으로

$n=5$일 때 $h(32)=1$이므로 $g(5)$는 $g(4)$에서

16개의 점 $(17, 1)$, $(18, 1)$, $\cdots$, $(32, 1)$을 더

세어주면 구할 수 있다.

즉, $g(5)=g(4)+16=g(3)+24$이므로

$g(n)\geq g(3)+16$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은

5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

Ⅱ 삼각함수

081

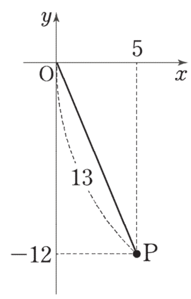
제4사분면 위의 점 P에 대하여

$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$이므로

$\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$,

$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$이다.

$\therefore\ \sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{7}{13}$



답 ①

082

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$이므로 $\cos\theta < 0$

$\sin(2\pi - \theta) - \dfrac{1}{2}\cos\theta = 0$에서

$-\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta = 0$, $\dfrac{1}{2}\cos\theta = -\sin\theta$

$\therefore\ \cos\theta = -2\sin\theta$ ……㉠

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 ㉠을 대입하면

$\sin^2\theta + (-2\sin\theta)^2 = 1$, $5\sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{5}$

이때 $\cos\theta < 0$이므로 ㉠에서 $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}\cos\theta > 0$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

답 ④

083

세 점 A, B, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_1, 넓이를 S_1이라 하고

세 점 B, C, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_2, 넓이를 S_2라 하자.

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)} = 2R_1$에서 $R_1 = \dfrac{\overline{BD}}{\sqrt{3}}$이고

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = 2R_2$에서 $R_2 = \dfrac{\overline{BD}}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $S_1 = \pi \times \dfrac{\overline{BD}^2}{3}$, $S_2 = \pi \times \dfrac{\overline{BD}^2}{2}$이므로

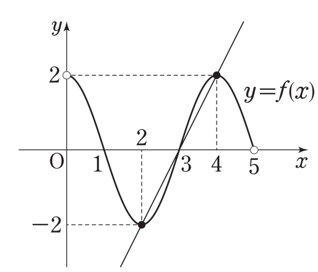
$\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{3}{2}$이다.

답 ③

084

함수 $f(x) = 2\cos\dfrac{\pi}{2}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}} = 4$이므로

$0 < x < 5$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 최솟값을 갖고 $x = 4$에서 최댓값을 가지므로

$a = 2$, $b = 4$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(2,\ -2)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{2-(-2)}{4-2} = 2$

답 ④

085

$\overline{CA} = b$라 하면 (단, $b > 0$)

코사인법칙에 의하여

$19 = 9 + b^2 - 2 \times 3 \times b \times \cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$이므로 정리하면

$19 = 9 + b^2 + 3b$,

$b^2 + 3b - 10 = 0$,

$(b-2)(b+5) = 0$,

$b = 2\ (\because\ b > 0)$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ 이다.

$\therefore\ 8S^2=8\times\frac{27}{4}=54$

답 54

086

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2x+\cos^2x=1$이고, 양변을 $\cos^2x$로 나누면

$\tan^2x+1=\frac{1}{\cos^2x}$이다.

따라서 주어진 방정식에 이를 대입하면

$1+\tan x=\tan^2x+1$,

$\tan^2x-\tan x=0$이다.

이때 $\tan x=t\ (t>0)$라 하면 ……㉠

$t^2-t=0$,

$t(t-1)=0$

$t=0$ 또는 $t=1$이다. ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t=1$, 즉 $\tan x=1$이다.

따라서 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 구하는 실근은 $\frac{\pi}{4}$이다.

답 ③

087

이차방정식 $3x^2-2x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$, ……㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}$이다. ……㉡

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$,

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$이다.

이때 ㉡을 대입하면

$\frac{k}{3}=-\frac{5}{18}\qquad\therefore\ k=-\frac{5}{6}$

답 ①

088

$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{3}$라 주어졌으므로

$\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$이다.

또한 삼각형 ABC에 외접하는 원의 넓이가 12π일 때,

반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=4\sqrt{3}$이다. ……㉠

따라서 $\overline{BC}=7k$, $\overline{CA}=5k$, $\overline{AB}=3k$ (단, $k>0$)라 하면

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\times5k\times3k}=-\frac{1}{2}$이므로

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $(\because\ 0<A<\pi)$

㉠에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ \overline{BC}=6$

답 6

089

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여

함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값이 각각 2, -2이므로

$a=2$이고, $(\because\ a>0)$

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}=4$이므로 $(\because\ b>0)$

$b=\frac{\pi}{2}$이다.

한편 방정식 $g(x)=1$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$일 때 방정식 $(g\circ f)(x)=1$을 만족시킨다.

(i) 방정식 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0$의 실근인 경우

$\frac{\pi}{2}x=\pi$ 또는 $\frac{\pi}{2}x=2\pi$이어야 하므로

$x=2$ 또는 $x=4$이다.

(ii) 방정식 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1$의 실근인 경우

$\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}x=\frac{5}{6}\pi$이어야 하므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $0 < x \leq 4$에서

방정식 $(g \circ f)(x) = 1$을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$2 \times 4 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{40}{9}$이다.

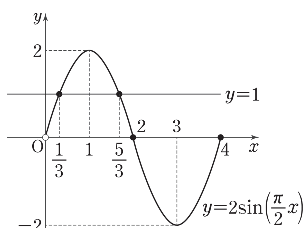
답 ③

참고

$0 < x \leq 4$에서
방정식 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$의 서로 다른 실근의 곱을
곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 0$ 또는 직선 $y = 1$의 서로 다른 교점의
x좌표의 곱으로 구할 수도 있다.

함수 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$의 주기가 4이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는

다음 그림과 같고, 구하는 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{3}$, 2, 4이다.



따라서 구하는 답은 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{3} \times 2 \times 4 = \dfrac{40}{9}$이다.

090

반지름의 길이가 1인 부채꼴에 대하여

(호의 길이) = (반지름의 길이) × (중심각의 크기)

　　　　　= (중심각의 크기)이다.

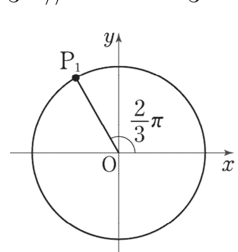
이때 모든 자연수 n에 대하여 점 P_n은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

점 P_{n+1}을 얻기 위해 점 P_n을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 이동시키는 거리는

동경 OP_{n+1}을 얻기 위해 동경 OP_n을 회전시킨 각의 크기와 같다.

따라서 점 P_1의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 즉

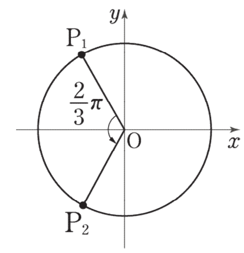
$\left(\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$일 때, $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$이고



조건 (가), (나), (다)를 다음과 같이 적용할 수 있다.

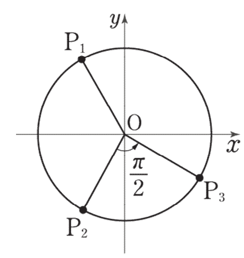
점 P_1이 제2사분면 위의 점이므로

조건 (나)에 의하여 $P_2\left(\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\right), \sin\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)\right)$이다.



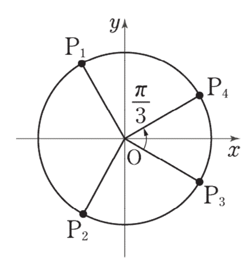
점 P_2가 제3사분면 위의 점이므로

조건 (가)에 의하여 $P_3\left(\cos\left(\dfrac{11}{6}\pi\right), \sin\left(\dfrac{11}{6}\pi\right)\right)$이다.



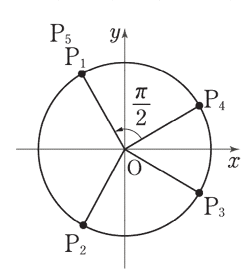
점 P_3이 제4사분면 위의 점이므로

조건 (다)에 의하여 $P_4\left(\cos\left(\dfrac{13}{6}\pi\right), \sin\left(\dfrac{13}{6}\pi\right)\right)$이다.



점 P_4가 제1사분면 위의 점이므로

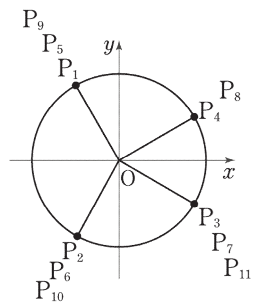
조건 (가)에 의하여 $P_5\left(\cos\left(\dfrac{8}{3}\pi\right), \sin\left(\dfrac{8}{3}\pi\right)\right)$이다.



이때 점 P_5는 점 P_1과 일치하므로

점 P_n의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이 반복되어 나타난다.



따라서 점 P_{11}의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

답 ③

091

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=8\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}=8\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{6}$이다.

또한 $\overline{CH}=8\sin\frac{\pi}{3}=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$이다.

따라서 직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH}^2=(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{3})^2=48$

답 48

092

$\frac{\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}+\frac{\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\frac{\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

이때 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로 ……㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ ($\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$\therefore$ $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ ……㉡

㉠의 양변을 세제곱하면

$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ($\because$ ㉡)

$\sin^3\theta+\cos^3\theta-\frac{9}{16}=\frac{1}{8}$

$\therefore$ $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{11}{16}$

따라서 구하는 값은

$\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\frac{11}{16}}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\frac{11}{16}}{\frac{9}{64}}=\frac{44}{9}$

답 ①

093

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{4^2+5^2-(\sqrt{21})^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{2}$이므로

$A=\frac{\pi}{3}$이다.

즉, $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$이다.

삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 합이므로

$\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times5\times\overline{AD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$5\sqrt{3}=\overline{AD}+\frac{5}{4}\overline{AD}=\frac{9}{4}\overline{AD}$

$\therefore$ $\overline{AD}=5\sqrt{3}\times\frac{4}{9}=\frac{20\sqrt{3}}{9}$

답 ④

094

$\log_2(\cos a)=-\frac{1}{2}$에서 로그의 정의에 의하여

$\cos a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a=\frac{\pi}{4}$일 때 $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

$a=\frac{7}{4}\pi$일 때 $\sin a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 구하는 $a\sin a$의 값의 합은

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\left(-\frac{7\sqrt{2}}{8}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi\text{이다.}$$

답 ②

095

삼각함수 성질에 의하여

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{7}{25}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$,

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$이다.

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\{\tan(50\pi-\theta)+\tan(60\pi-\theta)+\tan(70\pi-\theta)\\
&+\tan(80\pi-\theta)+\tan(90\pi-\theta)+\tan(100\pi-\theta)\}^2\\
&=\{\tan(-\theta)+\tan(-\theta)+\tan(-\theta)\\
&\qquad+\tan(-\theta)+\tan(-\theta)+\tan(-\theta)\}^2\\
&=\{-\tan\theta+(-\tan\theta)+(-\tan\theta)\\
&\qquad+(-\tan\theta)+(-\tan\theta)+(-\tan\theta)\}^2\\
&=(-6\tan\theta)^2\\
&=\left(-6\times\frac{\sqrt{14}}{6}\right)^2=14
\end{aligned}$$

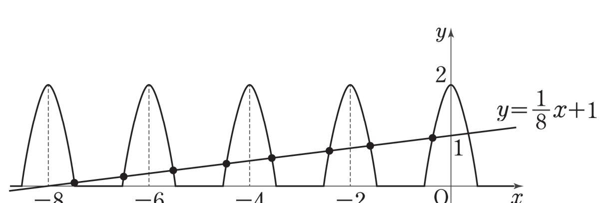
답 14

096

함수 $y=\begin{cases}0 & (\cos(\pi x)<0)\\ 2\cos(\pi x) & (\cos(\pi x)\geq 0)\end{cases}$의 주기는 2이고,

직선 $y=\frac{1}{8}x+1$은 두 점 $(0,\ 1)$, $(-8,\ 0)$을 지나므로

이를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

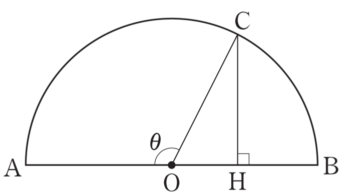


따라서 구하는 모든 교점의 개수는 8이다.

답 8

097

다음 그림과 같이 선분 AB의 중점을 반원의 중심 O라 하면 선분 AB의 길이가 12이므로 주어진 반원의 반지름의 길이는 6이다.



$\angle\mathrm{AOC}=\theta$라 하면 호 AC의 길이가 4π이므로

$6\theta=4\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

즉, $\angle\mathrm{COB}=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형

COH에서

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CO}}}$, $\frac{1}{2}=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=3$

이때 $\overline{\mathrm{OB}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{HB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OH}}=6-3=3$

답 3

098

삼각함수의 성질에 의하여

$\cos(3\pi-x)=-\cos x$이고

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x$이므로

$$\begin{aligned}
f(x)&=4\cos^2(3\pi-x)+8\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\\
&=4(-\cos x)^2+8(-\cos x)\\
&=4\cos^2 x-8\cos x
\end{aligned}$$

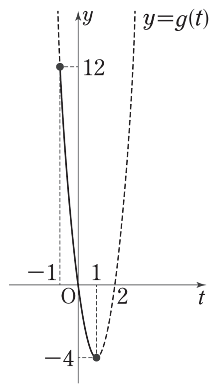
이다.

이때 $\cos x=t$라 하면

함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 각각

$-1\leq t\leq 1$에서의 함수 $g(t)=4t^2-8t$의 최댓값,

최솟값과 같다.



$g(t)=4(t-1)^2-4$이므로

함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 최댓값 12, $t=1$에서 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값, 최솟값의 합은

$12+(-4)=8$이다.

답 8

099

$0 \le \alpha \le 2\pi$이므로 $-\pi \le \pi\cos\alpha \le \pi$이고

$0 \le \beta \le 2\pi$이므로 $-\pi \le \pi\sin\beta \le \pi$이다.

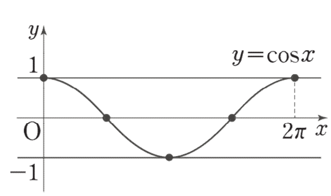
이때 $\sin^2(\pi\cos\alpha)+\cos^2(\pi\sin\beta)=0$이려면

$\sin(\pi\cos\alpha)=0$이고 $\cos(\pi\sin\beta)=0$이어야 한다.

(i) $\sin(\pi\cos\alpha)=0$인 경우

$\pi\cos\alpha$의 값이 $-\pi$ 또는 0 또는 π이어야 한다.

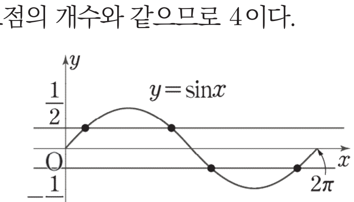
이를 만족시키는 α의 개수는 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-1$, $y=0$, $y=1$과 만나는 교점의 개수와 같으므로 5이다.



(ii) $\cos(\pi\sin\beta)=0$인 경우

$\pi\sin\beta$의 값이 $-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{\pi}{2}$이어야 한다.

이를 만족시키는 β의 개수는 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$과 만나는 교점의 개수와 같으므로 4이다.



(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (α, β)의 개수는

$5\times4=20$이다.

답 20

100

$0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수를

$f(x)=\sin\left(ax+\dfrac{b}{3}\pi\right)$라 하자.

함수 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$이고

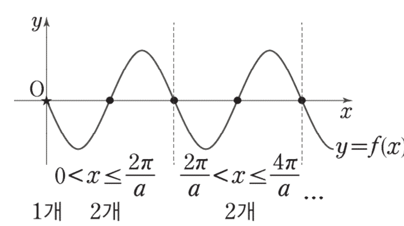
$0 < x \le \dfrac{2\pi}{a}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 2이므로

$0 < x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 $2a$이다.

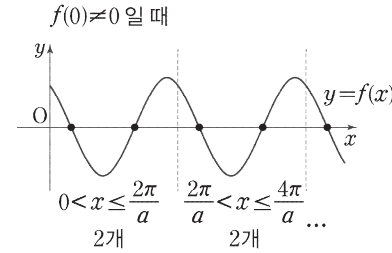
따라서 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는

$f(0)=0$이면 $2a+1$이고, $f(0)\ne0$이면 $2a$이다.

$f(0)=0$ 일 때



$f(0)\ne0$ 일 때



따라서 교점의 개수가 7이려면

$f(0)=0$이고 $a=3$이어야 한다.

$f(0)=\sin\left(\dfrac{b}{3}\pi\right)=0$이고 b는 5 이하의 자연수이므로

$\dfrac{b}{3}\pi=\pi$에서 $b=3$이다.

$\therefore\ ab=3\times3=9$

답 9

101

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=a$라 하면 $f(a)=\dfrac{1}{2}$이다. (단, $-\pi < a < \pi$)

따라서 $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6}$이다.

$\therefore\ a=\frac{\pi}{3}$

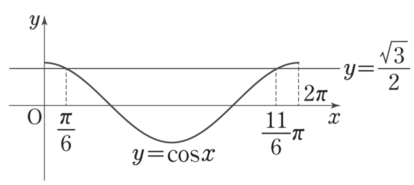
답 ⑤

102

$0\le x\le 2\pi$에서

부등식 $2\cos x\le\sqrt{3}$, 즉 $\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{11}{6}\pi$이다.



따라서 $\beta-\alpha=\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$이다.

$$\therefore\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ④

103

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta-1=-\cos^2\theta$이고,

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\cos\theta\tan\theta=\sin\theta$이다.

따라서

$$\begin{aligned}(\sin^2\theta-1)(1-\tan^2\theta)&=-\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)\\&=-\cos^2\theta+\cos^2\theta\tan^2\theta\\&=(\sin^2\theta-1)+\sin^2\theta\\&=2\sin^2\theta-1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\sin^2\theta=\frac{2}{3}$,

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

104

$$\begin{aligned}f(x)&=k\sin x+\sin(\pi+x)\\&=k\sin x-\sin x\\&=(k-1)\sin x\end{aligned}$$이므로

(i) $k<1$인 경우

$k-1\le f(x)\le 1-k$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-1=3k$이다.

따라서 이 경우 $k=-\frac{1}{2}$이다.

(ii) $k=1$인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이므로 최솟값이

$3k=3$이라는 조건에 어긋난다.

(iii) $k>1$인 경우

$1-k\le f(x)\le k-1$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $1-k=3k$이다.

즉, $k=\frac{1}{4}$이므로 $k>1$인 조건에 어긋난다.

(i)~(iii)에 의하여 $f(x)=-\frac{3}{2}\sin x$이다.

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

답 ①

105

$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1\le 0$에서

$x-\frac{\pi}{6}=t$라 하면 $-\frac{7}{6}\pi\le t\le\frac{5}{6}\pi$이고

$2\cos^2 t-3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+1\le 0$이다.

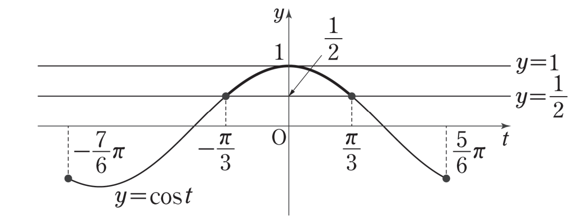
삼각함수 성질에 의하여

$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$이므로

$2\cos^2 t-3\cos t+1\le 0$,

$(2\cos t-1)(\cos t-1)\le 0$,

$\frac{1}{2}\le\cos t\le 1$이다.



$-\frac{7}{6}\pi \le t \le \frac{5}{6}\pi$에서 부등식 $\frac{1}{2} \le \cos t \le 1$의 해는

$-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}$이다.

따라서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$이므로

$a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

답 ①

106

함수 $3\sin(ax)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이므로 ($\because\ a>0$)

두 점 $(\alpha,\ -1)$, $(\beta,\ -1)$은 직선 $x=\frac{3\pi}{2a}$에 대하여

대칭이다.

따라서 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{a}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{3\pi}{a}\right)=\frac{1}{2}$을 만족시키려면

$\frac{3\pi}{a}=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi, \cdots$이어야 한다.

즉, $a=9, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}, \frac{9}{11}, \cdots$이므로

구하는 자연수 a의 값은 9이다.

답 9

107

선분 AP가 $\angle$BAC의 이등분선이고

$\overline{AB}:\overline{AC}=4:3$이므로

$\overline{BP}:\overline{PC}=4:3$

$\overline{PC}=3k\ (k>0)$라 하면 $\overline{BP}=4k$이므로

$\overline{BC}=7k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$(7k)^2=16+9-24\times\frac{1}{2}$

$49k^2=13$, $k^2=\frac{13}{49}$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{13}}{7}$, 즉 $\overline{PC}=\frac{3\sqrt{13}}{7}$

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\frac{3\sqrt{13}}{7}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{\frac{3\sqrt{13}}{7}}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{13}}{7}$$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

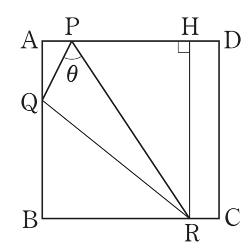
$$\pi\times\left(\frac{3\sqrt{13}}{7}\right)^2=\frac{117}{49}\pi$$

답 ①

108

다음 그림과 같이 점 R에서 선분 AD에 내린 수선의 발을

H라 하자.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $6k\ (k>0)$라 하면

직각삼각형 PRH에서 $\overline{PH}=4k$, $\overline{HR}=6k$이므로

$\overline{PR}=\sqrt{(4k)^2+(6k)^2}=2\sqrt{13}k$

직각삼각형 PAQ에서 $\overline{AP}=k$, $\overline{AQ}=2k$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$

직각삼각형 QBR에서 $\overline{QB}=4k$, $\overline{BR}=5k$이므로

$\overline{QR}=\sqrt{(4k)^2+(5k)^2}=\sqrt{41}k$

따라서 삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5}k)^2+(2\sqrt{13}k)^2-(\sqrt{41}k)^2}{2\times\sqrt{5}k\times2\sqrt{13}k}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

삼각함수 사이의 관계에 의하여

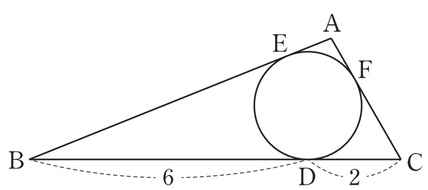
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$이므로

$$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4\sqrt{65}}{65}\right)^2 = \frac{49}{65}$$

답 ③

109

그림과 같이 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 하자.



원이 삼각형 ABC에 내접하므로

$\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{BD}} = 6$, $\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CD}} = 2$

$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AF}} = x$ $(x > 0)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = x + 6$, $\overline{\mathrm{BC}} = 8$, $\overline{\mathrm{CA}} = x + 2$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 18이므로

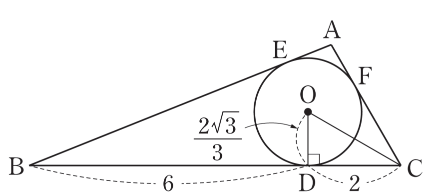
$(x+6) + 8 + (x+2) = 18$

$2x = 2 \qquad \therefore\ x = 1$

한편 원의 중심을 O라 할 때, 직각삼각형 ODC에서

$\overline{\mathrm{OD}} : \overline{\mathrm{DC}} = 1 : \sqrt{3}$이므로

$\angle\mathrm{OCD} = 30°$이고 $\angle\mathrm{ACB} = 60°$이다.



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = 7$, $\angle\mathrm{ACB} = 60°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ACB})} = 2R, \quad \frac{7}{\sin 60°} = 2R$$

$$\therefore\ R = 7 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi$$

답 ③

110

5 이하인 모든 자연수 k에 대하여

$f(x) = \sin(k\pi x)$는 $f(k-1) = 0$이며 주기가

$\dfrac{2\pi}{k\pi} = \dfrac{2}{k}$이다.

함수 $y = \cos(\pi x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$이다.

따라서 그림과 같이

두 함수 $y = f(x)$, $y = \cos(\pi x)$의 그래프의 교점은

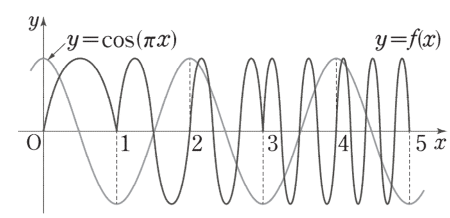
$0 \le x < 1$에서 1개,

$1 \le x < 2$에서 1개,

$2 \le x < 3$에서 3개,

$3 \le x < 4$에서 3개,

$4 \le x \le 5$에서 5개이다.



따라서 모든 교점의 개수는 $1+1+3+3+5 = 13$이다.

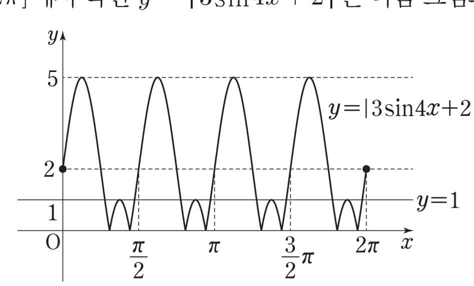
답 ②

111

함수 $y = 3\sin 4x + 2$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, 최댓값이

$3 + 2 = 5$, 최솟값이 $-3 + 2 = -1$이므로 닫힌구간

$[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y = |3\sin 4x + 2|$는 다음 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y = |3\sin 4x + 2|$와

직선 $y = 1$이 만나는 서로 다른 점의 개수는

$3 \times 4 = 12$

답 ③

112

$0 \le x \le 2\pi$일 때

방정식 $\sin(2x) \times \cos(3x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는

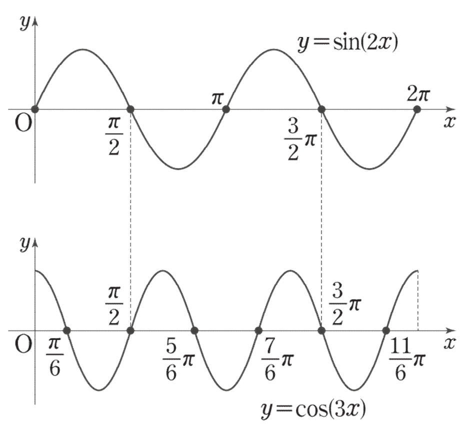
두 방정식 $\sin(2x) = 0$, $\cos(3x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

방정식 $\sin(2x) = 0$의 실근은

0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π이고

방정식 $\cos(3x) = 0$의 실근은

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이다.



이때 두 방정식은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$를 모두 실근으로 가지므로

구하는 서로 다른 실근의 개수는

$5 + 6 - 2 = 9$이다.

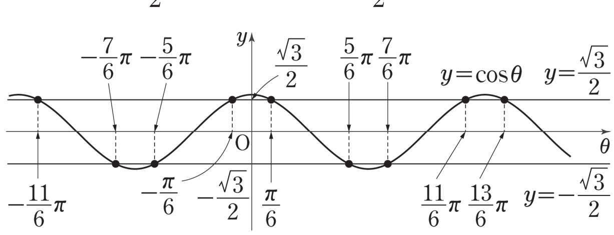
답 ④

113

$4\cos^2\theta - 3 \ge 0$에서

$(2\cos\theta - \sqrt{3})(2\cos\theta + \sqrt{3}) \ge 0$이므로

$\cos\theta \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos\theta \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



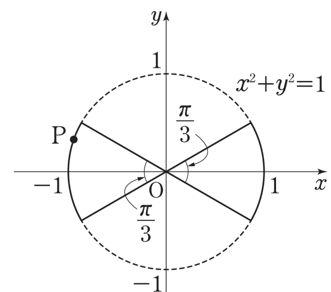
위의 그림에서 주어진 부등식을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$2n\pi - \frac{\pi}{6} \le \theta \le 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ 또는

$2n\pi + \frac{5}{6}\pi \le \theta \le 2n\pi + \frac{7}{6}\pi$ (단, n은 정수)이다.

이때 점 P가 나타내는 곡선의 길이는 반지름의 길이가 1이고

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호의 길이의 2배와 같다.



따라서 구하는 곡선의 길이는

$2 \times \left(1 \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$이다.

답 ②

114

이차방정식 $3x^2 - ax + 4 = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1 + x_2 = \frac{a}{3}$ ······㉠

$x_1 x_2 = \frac{4}{3}$ ······㉡

㉡에 의하여

$\tan(x_1 x_2 \pi) = \tan\frac{4}{3}\pi = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

즉, $\tan(x_1 x_2 \pi) = x_1 - x_2$이므로

$x_1 - x_2 = \sqrt{3}$ ······㉢

따라서 ㉠에 의하여 $a = 3(x_1 + x_2)$이므로

$$\begin{aligned}|a| &= 3|x_1 + x_2| \\ &= 3\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2} \\ &= 3\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4 \times \frac{4}{3}} \quad (\because ㉡, ㉢) \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ①

115

방정식 $16\cos^2 x - 8\cos x = k$에서 $\cos x = t$라 하자.

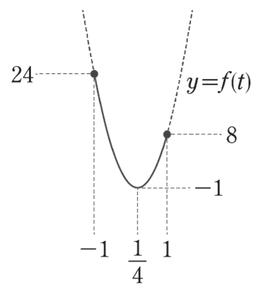
$-1 \le t \le 1$인 모든 실수 t에 대하여

방정식 $16t^2-8t=k$, 즉 $16\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-1=k$가 실근을 갖지 않아야 한다.

따라서 $-1\le t\le 1$에서 $f(t)=16\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-1$이라 할 때,

곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$가 만나지 않아야 한다.

이때 $f(-1)=24$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=-1$, $f(1)=8$이므로



$k>24$ 또는 $k<-1$이어야 한다.

$\therefore\ m-M=25-(-2)=27$

답 27

116

두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 도형의 넓이를 S, 둘레의 길이를 l이라 하고

$\overline{AC}=a$라 하자. (단, $a>0$)

$\overline{OA}:\overline{OC}=4:3$이므로

$\overline{OA}=4a$, $\overline{OC}=3a$이다.

따라서

$$S=\frac{1}{2}\times(4a)^2\times\frac{3}{7}\pi-\frac{1}{2}\times(3a)^2\times\frac{3}{7}\pi$$

$$=\frac{3}{2}a^2\pi=6\pi$$

이므로 $a=2$이다.

$$\therefore\ l=2a+4a\times\frac{3}{7}\pi+3a\times\frac{3}{7}\pi$$

$$=(2+3\pi)a=4+6\pi$$

답 ④

117

모든 실수 θ에 대하여 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

양변을 $\cos^2\theta$로 나누면 $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이다.

(단, $\cos\theta\ne 0$)

따라서

$$f(x)=x^2-2x\tan\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=x^2-2x\tan\theta-(\tan^2\theta+1)$$

$$=(x-\tan\theta)^2-2\tan^2\theta-1$$

이다.

곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점 $(\tan\theta,\ -2\tan^2\theta-1)$이

직선 $2x+y+5=0$ 위에 있으려면

$2\tan\theta+(-2\tan^2\theta-1)+5=0$이어야 한다.

이를 정리하면

$-2\tan^2\theta+2\tan\theta+4=0$,

$\tan^2\theta-\tan\theta-2=0$,

$(\tan\theta+1)(\tan\theta-2)=0$이므로

$\tan\theta=-1$ 또는 $\tan\theta=2$이다.

$\therefore\ a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

답 5

118

사각형 ABCD에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$이다.

$$\therefore\ R=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{\sin 30^\circ}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=3$$

한편 삼각형 DAB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DAB)}=2R$이므로

$\sin(\angle DAB)=\frac{\overline{BD}}{2R}=\frac{2\sqrt{5}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

$$\therefore\ \sin^2(\angle DAB)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

따라서 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$$\cos^2(\angle DAB)=1-\sin^2(\angle DAB)$$

$$=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

이므로

$$\tan^2(\angle \mathrm{DAB}) = \frac{\sin^2(\angle \mathrm{DAB})}{\cos^2(\angle \mathrm{DAB})}$$

$$= \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4}$$

$\therefore\ pq = 4 \times 5 = 20$

답 20

119

점 D가 선분 CA를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = 2,\ \overline{\mathrm{CD}} = 6$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BAD})} = 2R_1,\ \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R_1$$

$\therefore\ R_1 = \overline{\mathrm{BD}}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \cos(\angle \mathrm{BAD})$$

$$= (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{4}$$

이때 삼각형 ABD는 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{DBA} + \angle \mathrm{BAD} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = 2R_2,\ \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R_2$$

$\therefore\ R_2 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \overline{\mathrm{BC}}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{BD}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \cos(\angle \mathrm{BDC})$$

$$= 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{28}$$

$$\therefore\ {R_1}^2 \times {R_2}^2 = \overline{\mathrm{BD}}^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{\mathrm{BC}}\right)^2$$

$$= 4 \times \frac{1}{3} \times 28 = \frac{112}{3}$$

따라서 $p = 4,\ q = \frac{\sqrt{3}}{3},\ r = 28$이므로

$$q^2 \times (2p + r) = \frac{1}{3} \times (2 \times 4 + 28) = 12$$

답 12

120

$\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 4 : 3$이라 주어졌으므로

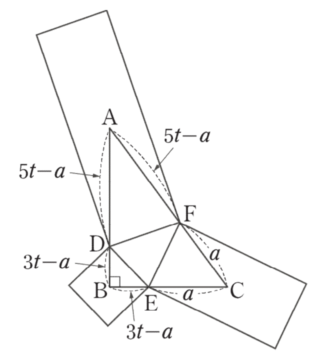
$\overline{\mathrm{AB}} = 4t,\ \overline{\mathrm{BC}} = 3t$라 하면 (단, $t > 0$인 상수)

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CA}} = \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} = 5t$이다.

한편 세 점 A, B, C는 각각 세 직사각형의 두 대각선의 교점이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}},\ \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}},\ \overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}}$이다.



이때 $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}} = a$라 하면

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}} = 5t - a$,

$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} = 3t - a$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{BD}}$에서

$4t = (5t - a) + (3t - a)$,

$a = 2t$이다.

한편 $\overline{\mathrm{BF}} = \sqrt{29}$라 주어졌으므로

삼각형 BCF에서 코사인법칙에 의하여

$$29 = (3t)^2 + (2t)^2 - 2 \times 3t \times 2t \times \cos(\angle \mathrm{ACB})$$

$$29 = 13t^2 - 12t^2 \times \frac{3}{5},$$

$$29 = \frac{29}{5}t^2,$$

$t = \sqrt{5}$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}} = 3t = 3\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} = t = \sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}} = 2t = 2\sqrt{5}$이므로

$S_1 = $(삼각형 ADF의 넓이)$\times 4$

$$= \left\{\frac{1}{2} \times (3\sqrt{5})^2 \times \sin(\angle \mathrm{CAB})\right\} \times 4$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 45 \times \frac{3}{5}\right) \times 4 = 54$$

$S_2 = $(삼각형 BDE의 넓이)$\times 4$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{5}^2\right) \times 4 = 10$$

$S_3 = $(삼각형 CEF의 넓이)$\times 4$

$$= \left\{\frac{1}{2} \times (2\sqrt{5})^2 \times \sin(\angle \mathrm{ACB})\right\} \times 4$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 20 \times \frac{4}{5}\right) \times 4 = 32$$

$\therefore\ S_1+S_2+S_3=54+10+32=96$

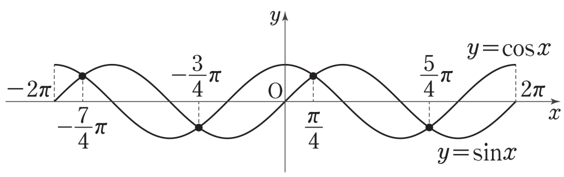
답 96

121

구하는 모든 실근의 합은

$-2\pi<x<2\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$가

만나는 점의 x좌표의 합과 같다.



따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=-\pi$이다.

다른풀이

$\cos x=0$이면 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=1$이므로

방정식 $\cos x=0$의 실근은 방정식 $\sin x=\cos x$의

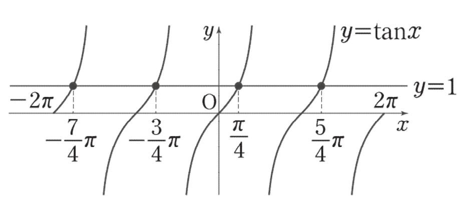
실근이 될 수 없다.

따라서 $-2\pi<x<2\pi$에서

방정식 $\sin x=\cos x$의 모든 실근의 합은

방정식 $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}$, 즉 $\tan x=1$의 모든 실근의

합과 같다.



따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=-\pi$이다.

답 ②

122

모든 실수 x에 대하여

$\{f(x+a)-f(x)\}^2+\{g(x+a)-g(x)\}^2=0$이려면

$f(x+a)=f(x)$이고 $g(x+a)=g(x)$이어야 한다.

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$를 만족시키는

양수 a의 값은 $6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots$이다. ⋯⋯㉠

함수 $g(x)=\cos\frac{\pi}{4}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이므로

모든 실수 x에 대하여 $g(x+a)=g(x)$를 만족시키는

양수 a의 값은 $8,\ 16,\ 24,\ 32,\ \cdots$이다. ⋯⋯㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 양수 a의 최솟값은

6과 8의 최소공배수인 24이다.

답 ②

123

$|2\sin^2 x-1|=\cos x$에서

$|2(1-\cos^2 x)-1|=\cos x$

$|1-2\cos^2 x|=\cos x$

(i) $1-2\cos^2 x\ge 0$, 즉 $\cos^2 x\le\frac{1}{2}$일 때

$1-2\cos^2 x=\cos x$, $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

그런데 $\cos^2 x\le\frac{1}{2}$이어야 하므로 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because\ 0\le x<2\pi$)

(ii) $1-2\cos^2 x<0$, 즉 $\cos^2 x>\frac{1}{2}$일 때

$2\cos^2 x-1=\cos x$, $2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

그런데 $\cos^2 x>\frac{1}{2}$이어야 하므로 $\cos x=1$

$\therefore\ x=0$ ($\because\ 0\le x<2\pi$)

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

답 ⑤

124

두 함수 $y=f(b+x)$, $y=f(b-x)$의 그래프가 x축에 대하여 대칭이라는 것은

두 함수 $y=f(b+x)$, $y=-f(b-x)$의 그래프가 일치하는 것과 같다.

이때

$f(b+x)=\tan\{a(x+b)\}$이고

$-f(b-x)=-\tan\{a(b-x)\}=\tan\{a(x-b)\}$이므로

함수 $y=f(b+x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2b$만큼 평행이동시키면

함수 $y=-f(b-x)$의 그래프와 일치한다.

이때 이를 만족시키는 양수 b의 최솟값이 3π이므로

함수 $f(x)$의 주기가 $2\times 3\pi$이어야 한다.

즉, $\dfrac{\pi}{a}=6\pi$에서 $a=\dfrac{1}{6}$이다.

답 ①

125

방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $\dfrac{5}{3}\pi$이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 서로 다른 모든 교점의 x좌표의 합이 $\dfrac{5}{3}\pi$이다. ……㉠

$a\le 0$인 경우 [그림 1]과 같이

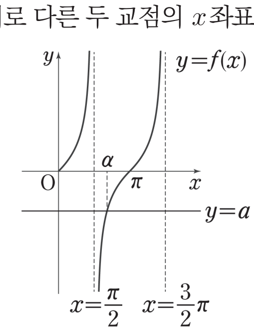
1개의 교점을 가지고 이 교점의 x좌표를 α라 하면

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$이다.

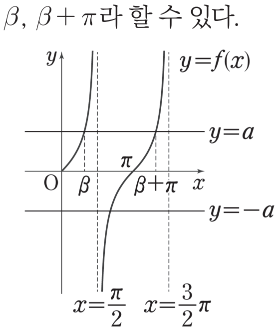
$a>0$인 경우 [그림 2]와 같이

2개의 교점을 가지고 함수 $\tan x$의 주기가 π이므로

서로 다른 두 교점의 x좌표를 β, $\beta+\pi$라 할 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 ㉠을 만족시키려면 $a>0$이고

$\beta+(\beta+\pi)=\dfrac{5}{3}\pi$, 즉 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$이어야 한다.

따라서 $a=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$이므로

방정식 $f(x)=-a$, 즉 $\tan x=-\sqrt{3}$의 실근은 $\dfrac{2}{3}\pi$이다.

답 ③

참고

$\beta=\dfrac{\pi}{3}$임을 구한 뒤,

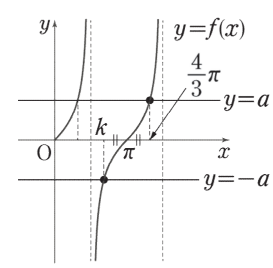
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표를 구할 때 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용할 수도 있다.

곡선 $y=\tan x$는 점 $(\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

교점의 x좌표를 k라 하면

그림과 같이 두 점 $\left(\dfrac{4}{3}\pi, a\right)$, $(k, -a)$도 점 $(\pi, 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi+k}{2}=\pi$이므로 $k=\dfrac{2}{3}\pi$이다.



126

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$,

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$,

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$이다.

$\therefore\ \tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=64\{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)\}$

$= 64\{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2\}$

$= 64\left(1-2\times\dfrac{1}{64}\right)$

$= 62$

답 62

127

삼각형 ABE에서 $\angle \mathrm{AEB} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{2}$,

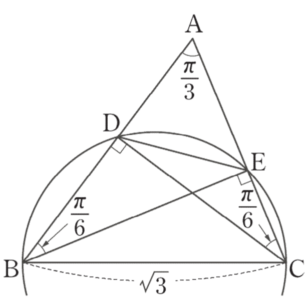
삼각형 ADC에서 $\angle \mathrm{ADC} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{2}$이다.

따라서 사각형 BCED에서 $\angle \mathrm{BEC} = \dfrac{\pi}{2}$,

$\angle \mathrm{BDC} = \dfrac{\pi}{2}$이고 반원에 대한 원주각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

사각형 BCED에 외접하는 원의 지름의 길이는

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}$이다.



따라서 삼각형 BED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$, 즉 $\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고

직각삼각형 ADC에서

$\overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{AC}}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AC}}$이다.

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{DC}}}{\overline{\mathrm{DE}}} = \overline{\mathrm{AC}}$

답 ①

128

삼각형 APQ의 두 변 AP, AQ의 길이는 각각

$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{AB}}$, ……㉠

$\overline{\mathrm{AQ}} = \left(1+\dfrac{a}{100}\right)\overline{\mathrm{AC}}$이다. ……㉡

두 삼각형 ABC, APQ의 넓이가 서로 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle \mathrm{BAC})$

$= \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin(\angle \mathrm{PAQ})$에서

$1 = \dfrac{3}{4}\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$, 즉 $1+\dfrac{a}{100} = \dfrac{4}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AC}} = 6$이므로 ㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{4}\times 4 = 3$, $\overline{\mathrm{AQ}} = \dfrac{4}{3}\times 6 = 8$이다.

또한 $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= 9+64-24 = 49$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = 7$

답 ①

129

$f(x) = \cos\left(\dfrac{5}{4}x\right)$ $(0 \le x \le 2\pi)$라 하면

함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{8}{5}\pi$이다.

따라서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = a$가 만나는

두 점 (α, a), (β, a)는 직선 $x = \dfrac{4}{5}\pi$에 대하여

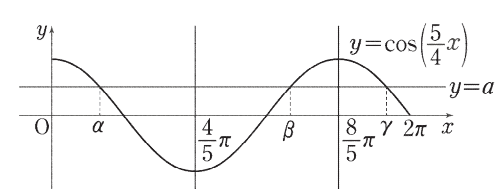
대칭이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{4}{5}\pi$에서 $\alpha+\beta = \dfrac{8}{5}\pi$이고, ……㉠

두 점 (β, a), (γ, a)는 직선 $x = \dfrac{8}{5}\pi$에 대하여

대칭이므로

$\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \dfrac{8}{5}\pi$에서 $\beta+\gamma = \dfrac{16}{5}\pi$이다. ……㉡



이때 $\dfrac{\beta}{\alpha} = 4$, 즉 $\beta = 4\alpha$라 주어졌으므로

㉠에서 $\alpha+4\alpha = \dfrac{8}{5}\pi$에서

$\alpha = \dfrac{8}{25}\pi$이고 $\beta = \dfrac{32}{25}\pi$이다.

이를 ㉡에 대입하면 $\gamma=\frac{48}{25}\pi$이다.

$$\therefore \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\frac{48}{25}\pi}{\frac{8}{25}\pi}=6$$

답 ③

130

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)\times\sin C=\frac{1}{2}$에서

$\sin(\pi-C)\times\sin C=\frac{1}{2}$,

$\sin^2 C=\frac{1}{2}$, $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. ($\because$ $0<C<\pi$)

이때 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$이므로

$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. ……㉠

또한 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C=\frac{1}{2}$에서

$\overline{BC}\times\overline{CA}=\sqrt{2}$이다.

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{CA}^2&=\overline{AB}^2+2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C\\&=\overline{AB}^2+2\sqrt{2}\cos C\text{이다.}\end{aligned}$$ ……㉡

한편 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$이므로

이 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이고 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{10}$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이다. ……㉢

따라서 ㉡, ㉢에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=10+2\sqrt{2}\cos C$이므로

㉠에서 $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$은 최솟값

$10+2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8$을 갖는다.

답 8

131

반원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$,

$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 하면

$\overparen{\mathrm{AC}}=\frac{3}{4}\pi$이므로 $r\theta=\frac{3}{4}\pi$에서 $\theta=\frac{3}{4r}\pi$이다.

$\therefore$ $\angle\mathrm{BOC}=\pi-\frac{3}{4r}\pi=\left(1-\frac{3}{4r}\right)\pi$ ……㉠

이때 부채꼴 BOC의 넓이가 $\frac{5}{4}\pi$이므로

$\frac{1}{2}r^2\times\left(1-\frac{3}{4r}\right)\pi=\frac{5}{4}\pi$, $4r^2-3r-10=0$,

$(4r+5)(r-2)=0$에서 $r=2$이다.

따라서 $\angle\mathrm{BOC}=\frac{5}{8}\pi$이므로 ($\because$ ㉠)

부채꼴 BOC의 둘레의 길이는

$2\times2+2\times\frac{5}{8}\pi=4+\frac{5}{4}\pi$이다.

답 ④

132

$\tan\theta-\frac{4}{\tan\theta}=3$이므로

$\tan^2\theta-3\tan\theta-4=0$,

$(\tan\theta-4)(\tan\theta+1)=0$

θ가 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta=4$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 ……㉠

㉠의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore$ $\frac{1}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta+1=16+1=17$

㉠의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

$1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\therefore$ $\frac{1}{\sin^2\theta}=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$

$\therefore$ $\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}=17-\frac{17}{16}=\frac{255}{16}$

답 ⑤

참고

$\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 직접 구하여 해결해 보면
θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이다.

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{\sin^2\theta}=17-\dfrac{17}{16}=\dfrac{255}{16}$

133

조건 (가)에 의하여 $f(x)=a\sin bx+c\ (a>0,\ b>0)$의
최댓값이 8, 최솟값이 -2이므로
$a+c=8$, $-a+c=-2$이다.
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=5$, $c=3$이다.
조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 음수 p의 최댓값이
$-\dfrac{\pi}{6}$이므로 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

즉, $\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{\pi}{6}$에서 $b=12$이다.

$\therefore\ ac+b=5\times3+12=27$

답 27

134

$f(x)=-2\tan(\pi-ax)-b=2\tan(ax)-b$이므로
함수 $f(x)=2\tan(ax)-b$의 주기는

$\dfrac{\pi}{|a|}=4\pi$이다.

이때 $a>0$이므로 $a=\dfrac{1}{4}$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2\tan(ax)$의
그래프를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이고,
함수 $y=2\tan(ax)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$에 대하여
대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -b)$에
대하여 대칭이다.
즉, $b=-3$이다.

$\therefore\ ab=\dfrac{1}{4}\times(-3)=-\dfrac{3}{4}$

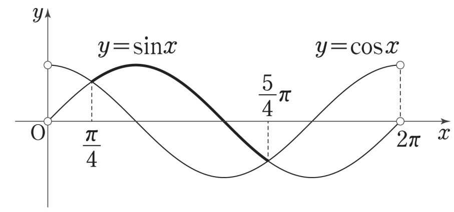
답 ④

135

삼각함수 성질에 의하여

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$에서 $\sin x>\cos x$이므로

이를 만족시키는 x의 값의 범위는
함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=\cos x$의 그래프보다
위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.



즉, 부등식 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$의 해는

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5}{4}\pi$이다. ……㉠

한편 $\sin(4\pi+x)\cos(\pi-x)<0$에서
$\sin x(-\cos x)<0$이므로 $\sin x\cos x>0$이다.
$\therefore\ \sin x>0,\ \cos x>0$ 또는 $\sin x<0,\ \cos x<0$
따라서 x는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로
$0<x<2\pi$에서 이를 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$이다. ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\dfrac{5}{4}\pi$이므로

$$\frac{rs}{pq}=\frac{\pi\times\frac{5}{4}\pi}{\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{2}}=10$$

답 10

136

x에 대한 이차방정식 $3x^2+(4\sin\theta)x+2\cos\theta=0$이
실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6\cos\theta\geq0$

이때 삼각함수 사이의 관계에 의하여
$4(1-\cos^2\theta)-6\cos\theta\geq0$이므로 정리하면
$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\leq0$이다.
$\cos\theta=t\ (-1\leq t\leq1)$라 하면 ……㉠
$2t^2+3t-2\leq0$,
$(2t-1)(t+2)\leq0$,

$-2 \le t \le \frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-1 \le t \le \frac{1}{2}$, 즉

$-1 \le \cos\theta \le \frac{1}{2}$이다.

$0 \le \theta < 2\pi$이므로 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5}{3}\pi$이다.

$\therefore\ \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{3} + \frac{10}{3}\pi = \frac{11}{3}\pi$

답 ⑤

137

$\angle ACB = \theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$라 하면 삼각형 ABC에서

$\overline{AC} = 6,\ \overline{CB} = 5,\ \cos\theta = \frac{3}{4}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos\theta$

$= 36 + 25 - 60 \times \frac{3}{4} = 16$

$\therefore\ \overline{AB} = 4$

$\angle ACB$와 $\angle ADB$는 호 AB에 대한 원주각이므로

$\angle ADB = \theta$

$\overline{AD} = x\ (x > 0)$라 하면 삼각형 ABD에서

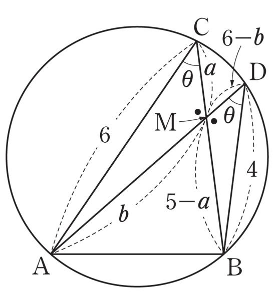
$\overline{AB} = 4,\ \overline{BD} = 4$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2 = x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 \times \cos\theta$

$16 = x^2 + 16 - 8x \times \frac{3}{4}$

$x(x-6) = 0 \qquad \therefore\ x = 6$, 즉 $\overline{AD} = 6$

한편 두 삼각형 ACM, BDM이 서로 닮음(AA 닮음)이다.



두 양수 a, b에 대하여

$\overline{CB} = 5$이므로 $\overline{MC} = a,\ \overline{MB} = 5 - a$라 하고

$\overline{AD} = 6$이므로 $\overline{MA} = b,\ \overline{MD} = 6 - b$라 하면

$\overline{MC} : \overline{MD} = \overline{AC} : \overline{BD}$에서

$a : (6-b) = 6 : 4 = 3 : 2,\ 3(6-b) = 2a$

$\therefore\ 2a + 3b = 18$ ……㉠

또, $\overline{MA} : \overline{MB} = \overline{AC} : \overline{BD}$에서

$b : (5-a) = 6 : 4 = 3 : 2,\ 3(5-a) = 2b$

$\therefore\ 3a + 2b = 15$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = \frac{9}{5},\ b = \frac{24}{5}$

$\therefore\ \overline{CM} = \frac{9}{5}$

답 ①

138

$\overline{AC} = x\ (x > 0)$라 하고 $\angle ADC = \theta$라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \cos\theta$

$= 98 - 98\cos\theta$ ……㉠

한편 $\angle ADC + \angle ABC = \pi$이므로

$\angle ABC = \pi - \theta$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(\pi - \theta)$

$= 34 + 30\cos\theta$ ……㉡

㉠=㉡에서

$98 - 98\cos\theta = 34 + 30\cos\theta$

$128\cos\theta = 64 \qquad \therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$x^2 = 34 + 30 \times \frac{1}{2} = 49$

$\therefore\ x = 7\ (\because\ x > 0)$, 즉 $\overline{AC} = 7$

이때 $\theta = \frac{\pi}{3}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$\therefore\ R = \frac{14}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

답 ①

139

$\sin\theta = t\ (-1 \le t \le 1)$라 하면

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$이므로 $\cos^2\theta = 1 - t^2$이고,

$$f(\theta) = \cos^2\theta + 2x\sin\theta - 5$$
$$= 1 - t^2 + 2xt - 5$$
$$= -(t-x)^2 + x^2 - 4\ (-1 \le t \le 1)$$

이때 $h(t) = -(t-x)^2 + x^2 - 4\ (-1 \le t \le 1)$라 하자.

(ⅰ) $-1 \le x \le 1$인 경우

함수 $h(t)$는 $t = x$일 때 최댓값 $x^2 - 4$를 가지므로

$g(x) = x^2 - 4$

(ⅱ) $x > 1$인 경우

함수 $h(t)$는 $t = 1$일 때 최댓값 $2x - 5$를 가지므로

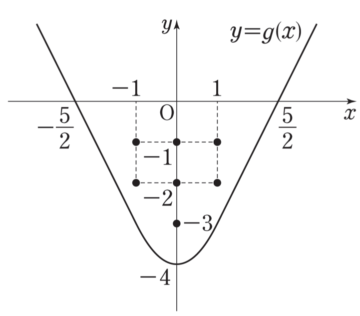
$g(x) = 2x - 5$

(ⅲ) $x < -1$인 경우

함수 $h(t)$는 $t = -1$일 때 최댓값 $-2x - 5$를 가지므로

$g(x) = -2x - 5$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

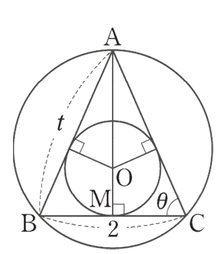


따라서 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(0, -1)$, $(0, -2)$, $(0, -3)$, $(1, -1)$, $(1, -2)$로 7개이다.

답 7

140

$\angle ACB = \theta$라 하고 선분 BC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하자.



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{t}{\sin\theta} = 2R$에서 $R = \dfrac{t}{2\sin\theta}$이다. ……㉠

삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\theta$

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \dfrac{1}{2} \times \overline{BC} \times r + \dfrac{1}{2} \times \overline{CA} \times r$에서

$\dfrac{1}{2} \times t \times 2 \times \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times (t + 2 + t) \times r$,

$r = \dfrac{t\sin\theta}{t+1}$이다. ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{\dfrac{t\sin\theta}{t+1}}{\dfrac{t}{2\sin\theta}} = \dfrac{2\sin^2\theta}{t+1}$이다.

이때 $\cos\theta = \dfrac{1}{t}$이므로

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2}$이다.

따라서

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{2(t^2-1)}{t^2(t+1)} = \dfrac{2(t-1)}{t^2} = \dfrac{5}{18}$이므로

$5t^2 = 36(t-1)$,

$5t^2 - 36t + 36 = 0$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

조건을 만족시키는 모든 t의 값의 곱은 $\dfrac{36}{5}$이다. 참고

답 ①

참고

조건을 만족시키는 t의 값을 구하면

$5t^2 - 36t + 36 = 0$,

$(5t-6)(t-6) = 0$에서

$t = \dfrac{6}{5}$ 또는 $t = 6$이다.

두 근 모두 양수임을 확인하고 넘어가자.

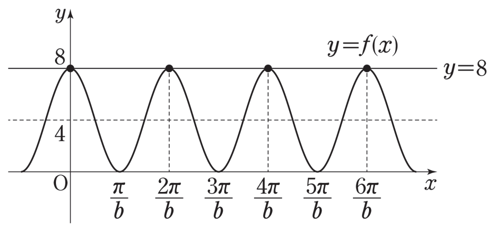
141

조건 (가)에서 $f(x) \le 8$이고 조건 (나)에서 x에 대한 방정식 $f(x) = 8$의 실근이 존재하므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 8이다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a + a = 2a$이므로

$2a=8 \qquad \therefore\ a=4$

함수 $f(x)=4\cos bx+4$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



이때 조건 (나)를 만족시키려면 $0\le x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3개 존재해야 하므로

$\frac{4\pi}{b}<2\pi\le\frac{6\pi}{b}$이어야 한다.

$\frac{4\pi}{b}<2\pi$에서 $b>2$

$2\pi\le\frac{6\pi}{b}$에서 $b\le 3$

즉, $2<b\le 3$이고 b는 자연수이므로

$b=3$

$\therefore\ a+b=4+3=7$

답 ⑤

142

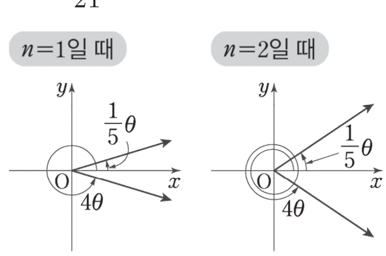
$\frac{1}{5}\theta$와 4θ의 동경이 시초선을 포함하는 직선에 대하여 서로 대칭이려면

정수 n에 대하여 $\frac{1}{5}\theta+4\theta=2n\pi$이어야 한다.

따라서 $\theta=\frac{10}{21}n\pi$이고 $0<\theta<\pi$인 θ의 값은

$n=1$일 때 $\theta=\frac{10}{21}\pi$이고

$n=2$일 때 $\theta=\frac{20}{21}\pi$이다.



따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{10}{21}\pi+\frac{20}{21}\pi=\frac{10}{7}\pi$이다.

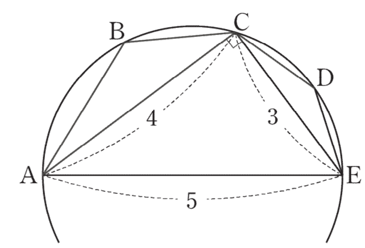
답 ⑤

143

반원에 대한 원주각의 크기는 $\angle \mathrm{ACE}=\frac{\pi}{2}$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이다.



한편 삼각형 ABC와 삼각형 CDE에 외접하는 원의 지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=5$에서 $\sin(\angle \mathrm{ABC})=\frac{4}{5}$이고

$\frac{3}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}=5$에서 $\sin(\angle \mathrm{CDE})=\frac{3}{5}$이다.

$\therefore\ \sin(\angle \mathrm{ABC})-\sin(\angle \mathrm{CDE})=\frac{1}{5}$

답 ①

144

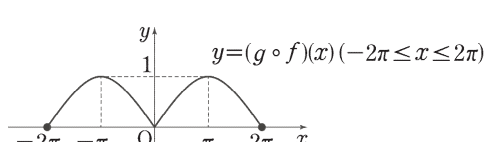
함수 $f(x)$의 주기는 4π이고

$f(x)=\begin{cases} x+\pi & (-2\pi\le x<0) \\ -x+\pi & (0\le x\le 2\pi)\end{cases}$이다.

따라서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 주기는 4π이고

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) & (-2\pi\le x<0) \\ \cos\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) & (0\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sin\frac{x}{2} & (-2\pi\le x<0) \\ \sin\frac{x}{2} & (0\le x\le 2\pi)\end{cases}$$ 이다.



즉, 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 위의 그림을 주기를 4π로 하여 반복해서 그린 ④와 같다.

답 ④

145

삼각함수 성질에 의하여

$$\cos\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=-\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)$$

이고,

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\cos^2\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=1-\sin^2\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)$이므로

$\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$$y=\cos^2\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)+3$$
$$=1-\sin^2\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)-\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)+3$$
$$=1-t^2-t+3$$
$$=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}\ (-1\le t\le 1)$$

이다.

이 함수는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{17}{4}$을 가지므로

$M=\frac{17}{4}$이고

$t=\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$일 때

$x+\frac{4}{3}\pi=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x+\frac{4}{3}\pi=\frac{11}{6}\pi$이므로

$x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$이다.

$\therefore\ \alpha=-\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{\pi}{2}\ (\because\ \alpha<\beta)$

또한 이 함수는 $t=1$일 때 최솟값 2를 가지므로 $m=2$이고

$t=\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=1$일 때

$x+\frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{2}$이므로 $x=-\frac{5}{6}\pi$이다.

$\therefore\ \gamma=-\frac{5}{6}\pi$

$$\therefore\ \frac{\alpha\beta}{\gamma\pi}+Mm=\frac{-\frac{\pi}{6}\times\frac{\pi}{2}}{-\frac{5}{6}\pi\times\pi}+\frac{17}{4}\times 2$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{17}{2}=\frac{43}{5}$$

답 ⑤

146

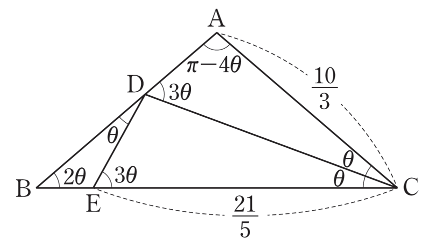
$\angle ACD=\angle DCE=\angle BDE=\theta$라 하면

이등변삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\angle ACB=2\theta$이므로

$\angle CAD=\pi-4\theta$이다.

따라서 삼각형 ADC에서 $\angle ADC=3\theta$이고,

삼각형 BED에서 $\angle DEC=3\theta$이다.



두 삼각형 ADC, DEC가

서로 닮음 (AA 닮음)이므로 ……㉠

$\frac{10}{3}:\overline{CD}=\overline{CD}:\frac{21}{5}$에서

$\overline{CD}^2=\frac{21}{5}\times\frac{10}{3}=14$이다.

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{14}$

한편 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2+(\sqrt{14})^2-2\times\frac{10}{3}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{14}}{4}$$
$$=\frac{100}{9}+14-\frac{70}{3}=\frac{16}{9}$$

이므로 $\overline{AD}=\frac{4}{3}$이다.

즉, $\overline{BD}=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}=2$이고, ㉠에 의하여

$\frac{10}{3}:\sqrt{14}=\frac{4}{3}:\overline{DE}$에서

$\overline{DE}=\frac{4\sqrt{14}}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{2\sqrt{14}}{5}$이다.

또한 삼각함수 사이의 관계에 의하여

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이다.

따라서 삼각형 BDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sqrt{14}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{5}$이다.

답 ④

이투스북

147

$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=-2$의 양변에

$(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)$를 곱하면

(좌변)$=\cos\theta\times(1-\cos\theta)+\sin\theta\times(1-\sin\theta)$

$=\sin\theta+\cos\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=\sin\theta+\cos\theta-1$ ……㉠

(우변)$=-2(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)$

$=-2+2(\sin\theta+\cos\theta)-2\sin\theta\cos\theta$ ……㉡

이때 $\sin\theta+\cos\theta=x$라 하고 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=x^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=x^2$

$2\sin\theta\cos\theta=x^2-1$

그런데 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$x^2-1\neq0$ $\quad\therefore\ x\neq\pm1$

따라서 ㉠, ㉡에서

(좌변)$=\sin\theta+\cos\theta-1=x-1$

(우변)$=-2+2(\sin\theta+\cos\theta)-2\sin\theta\cos\theta$

$=-2+2x-(x^2-1)$

즉, $x-1=-2+2x-(x^2-1)$이므로

$x^2-x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0\ (\because\ x\neq\pm1)$

답 ③

148

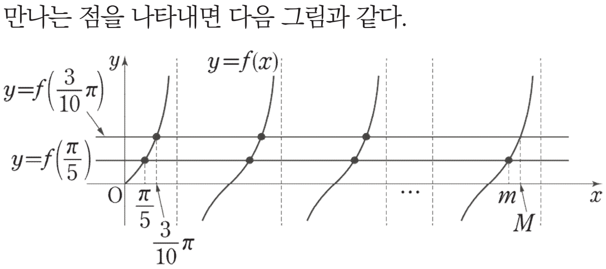
함수 $\tan x$의 성질에 의하여

$\dfrac{1}{f\left(\frac{\pi}{5}\right)}=f\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}\right)=f\left(\dfrac{3}{10}\pi\right)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가

직선 $y=f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ 또는 직선 $y=f\left(\dfrac{3}{10}\pi\right)$와

만나는 점을 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$의 주기는 π이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{5}+\pi\right)=f\left(\dfrac{\pi}{5}+2\pi\right)=\cdots$

$=f\left(\dfrac{\pi}{5}+7\pi\right)=\cdots$

이고,

$f\left(\dfrac{3}{10}\pi\right)=f\left(\dfrac{3}{10}\pi+\pi\right)=f\left(\dfrac{3}{10}\pi+2\pi\right)=\cdots$

$=f\left(\dfrac{3}{10}\pi+7\pi\right)=\cdots$

이다.

따라서 $0\leq x\leq a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가

두 직선과 만나는 점의 개수가 15이려면

직선 $y=f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$와 만나는 점의 개수가 8이고,

직선 $y=f\left(\dfrac{3}{10}\pi\right)$와 만나는 점의 개수가 7이어야 한다.

즉, $\dfrac{\pi}{5}+7\pi\leq a<\dfrac{3}{10}\pi+7\pi$이어야 하므로

구하는 a의 값의 범위는 $\dfrac{36}{5}\pi\leq a<\dfrac{73}{10}\pi$이다.

$\therefore\ \dfrac{M}{m}=\dfrac{\frac{73}{10}\pi}{\frac{36}{5}\pi}=\dfrac{73}{72}$

답 ③

149

삼각형 ACD에서 외접원의 반지름의 길이가

$\sqrt{\dfrac{13}{3}}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2\times\dfrac{\sqrt{39}}{3}$이다.

$\therefore\ \overline{AC}=2\times\dfrac{\sqrt{39}}{3}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$=2\times\dfrac{\sqrt{39}}{3}\times\dfrac{\sqrt3}{2}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{AD}=a,\ \overline{CD}=3a\ (a>0)$라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=a^2+(3a)^2-2\times a\times3a\times\cos\dfrac{2}{3}\pi,$

$13=a^2+9a^2-6a^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$13a^2=13$, $a^2=1$이다.

$\therefore\ a=1$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=2a=2$이고

$\angle\mathrm{ABC}=\pi-\angle\mathrm{ADC}=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=b\ (b>0)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=2^2+b^2-2\times2\times b\times\cos\frac{\pi}{3}$,

$13=4+b^2-4b\times\frac{1}{2}$,

$b^2-2b-9=0$이다.

$\therefore\ b=1+\sqrt{10}\ (\because\ b>0)$

답 ③

150

정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(a)\ge f(x)$, $f(b)\le f(x)$이려면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값을, $x=b$에서 최솟값을 가져야 한다.

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\cos^2x=1-\sin^2x$이고,

삼각함수 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)&=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)\\&=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\&=\sin x\end{aligned}$$

이므로

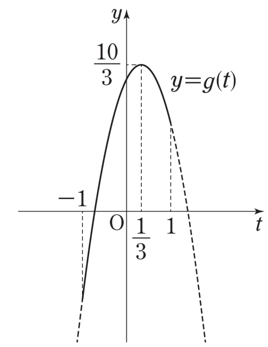
$$\begin{aligned}f(x)&=3\cos^2x+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\\&=3(1-\sin^2x)+2\sin x\\&=-3\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\end{aligned}$$

이다.

이때 $\sin x=t$라 하면

함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 $-1\le t\le1$에서의 함수

$g(t)=-3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$의 최댓값, 최솟값과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{3}$, 즉 $\sin x=\frac{1}{3}$에서 최댓값,

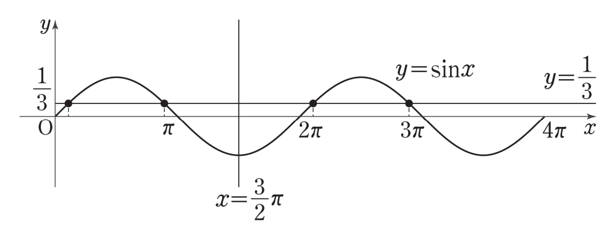
$t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 a, b는 $\sin a=\frac{1}{3}$, $\sin b=-1$이 되도록 하는 값이다.

$\sin a=\frac{1}{3}$인 실수 $a\ (0\le a<4\pi)$의 개수는 4이고,

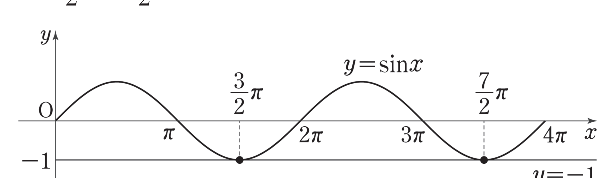
곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$S=4\times\frac{3}{2}\pi=6\pi$



$\sin b=-1$인 실수 $b\ (0\le b<4\pi)$는 $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$이므로

$T=\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi=5\pi$



$\therefore\ S-T=6\pi-5\pi=\pi$

답 ②

151

둘레의 길이가 25π인 원의 지름의 길이는 25이다.

세 변 AB, BC, CA의 대각의 크기를 α, β, γ라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\beta}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin\gamma}=25$이다.

$\therefore\ 100(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$=100\left(\dfrac{\overline{AB}}{25}+\dfrac{\overline{BC}}{25}+\dfrac{\overline{CA}}{25}\right)$

$=100\times\dfrac{54}{25}=216$

답 216

152

이차방정식 $x^2-k=0$의 두 실근 $2\cos\theta$, $3\tan\theta$의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 0이므로

$2\cos\theta+3\tan\theta=0$, $2\cos\theta+3\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$

$2\cos^2\theta+3\sin\theta=0$, $2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\ (\because\ -1\le\sin\theta\le1)$

한편 이차방정식 $x^2-k=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-k$이므로

$2\cos\theta\times3\tan\theta=-k$

$\therefore\ k=-2\cos\theta\times3\tan\theta=-6\sin\theta$

$=-6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$

답 3

153

$-3\le f(x)\le3$이므로 $p=3$이다.

$\dfrac{7}{6}\pi-\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{\pi}{3}$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{4}{3}\pi$이다.

$\dfrac{2\pi}{q}=\dfrac{4}{3}\pi$에서 $q=\dfrac{3}{2}$이므로

$f(x)=3\sin\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{4}\pi\right)=3\sin\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

$g(x)=\dfrac{3}{4}p\sin\left(4qx+\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $p=3$, $q=\dfrac{3}{2}$이므로

$g(x)=\dfrac{9}{4}\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{9}{4}\sin6\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$이고,

함수 $g(x)$의 최댓값 a는 $a=\dfrac{9}{4}$이다.

등식 $g(x+k)=g(x)$를 만족시키는 양수 k의 최솟값 b는 주기이므로

$b=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$이다.

함수 $g(x)=\dfrac{9}{4}\sin6\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$의 그래프는 함수

$y=\dfrac{9}{4}\sin6x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{12}$만큼

평행이동하였으므로 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 양수 x의 최솟값 c는

$c=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$이다.

$\therefore\ \dfrac{144abc}{\pi^2}=\dfrac{144\times\dfrac{9}{4}\times\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{\pi}{12}}{\pi^2}=9$

답 9

154

$\angle AOB=\theta$라 하면 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 A의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이다.

점 $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$는 함수 $y=\sin(2x)$의 그래프 위의 점이기도 하므로

$\sin\theta=\sin(2\cos\theta)$이다.

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $0<2\cos\theta<2$이므로

$\theta=2\cos\theta$이다. ……㉠

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\theta=\cos\theta\ (\because$ ㉠$)$

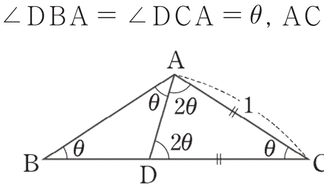
$\therefore\ \dfrac{S_2\times S_3}{S_1}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\theta\times\cos\theta}{\dfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta}=1$

답 ③

155

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 BC 위에 다음 조건을 만족시키는 점 D가 있다.

$\angle DAB=\angle DBA=\angle DCA=\theta$, $\overline{AC}=\overline{DC}=1$



$\angle CAD = \angle CDA$

$= \angle DAB + \angle DBA$

$= 2\theta$이므로

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은

$3\theta + \theta + \theta = \pi$이다.

따라서 $\theta = \dfrac{\pi}{5}$이므로

$\dfrac{2}{5}\pi = \boxed{2} \times \theta$

이고, 삼각형 ABC와 삼각형 DAB는 서로 닮음이므로

$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{DA}$, 즉 $(\overline{DA}+1) : 1 = 1 : \overline{DA}$에

의하여

$\overline{DA}^2 + \overline{DA} - 1 = 0$,

$\overline{DA} = \boxed{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ $(\because \overline{DA} > 0)$

이다. 따라서

$\cos\left(\dfrac{2}{5}\pi\right) = \cos(2\theta)$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\overline{DA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DA}}{2\overline{AC}}$

$= \boxed{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

이다.

(가) : $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, (나) : $b = 2$,

(다) : $c = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ ac + b = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{8} + 2$

$= \dfrac{11-\sqrt{5}}{4}$

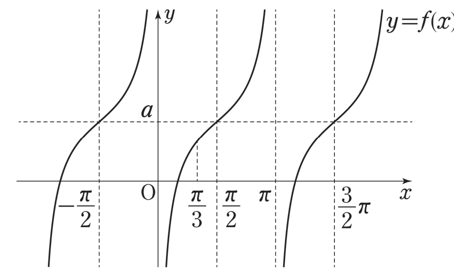
답 ③

156

함수 $f(x) = \sqrt{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + a$의 그래프는 함수

$y = \sqrt{3}\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의

방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[\dfrac{\pi}{3}, b\right]$에서 최댓값 6,

최솟값 2를 가지므로 $\dfrac{\pi}{3} < b < \pi$이고

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$, $f(b) = 6$이어야 한다.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) + a$

$= \sqrt{3}\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + a$

$= -\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{6} + a$

$= -\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} + a$

$= a - 1$

이므로 $a - 1 = 2$에서 $a = 3$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 3$

또한 $f(b) = 6$에서 $\sqrt{3}\tan\left(b - \dfrac{\pi}{2}\right) + 3 = 6$

$\tan\left(b - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

그런데 $\dfrac{\pi}{3} < b < \pi$에서 $-\dfrac{\pi}{6} < b - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$이므로

$b - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad\therefore\ b = \dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore\ ab = 3 \times \dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{5}{2}\pi$

답 ⑤

157

함수 $y = \sin(3x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼

평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$y = \sin(3x - 3a)$이다.

한편 모든 실수 x에 대하여

$\cos(3x - \pi) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3x - \pi\right)$이다.

따라서 두 함수 $y=\sin(3x-3a)$,

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x-\pi\right)$의 그래프가 서로 일치해야 한다.

함수 $\sin x$의 주기가 2π이므로

$\sin(3x-3a)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x-\pi\right)$에서

$3x-3a=\frac{\pi}{2}+3x-\pi+2n\pi$이다. (단, n은 정수)

따라서 $a=\frac{\pi}{6}-\frac{2n\pi}{3}$이다.

이때 $0\le a<2\pi$라 주어졌으므로

$0\le\frac{\pi}{6}-\frac{2n\pi}{3}<2\pi$에서

$-\frac{1}{6}\le-\frac{2n}{3}<\frac{11}{6}$

$\therefore\ -\frac{11}{4}<n\le\frac{1}{4}$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 n은 -2, -1, 0으로 3개이고, 주어진 조건을 만족시키는 실수 a도 3개이다.

답 ③

158

삼각함수 사이의 관계에 의하여

$\sin^2\frac{n\pi}{4}+\cos^2\frac{n\pi}{4}=1$이므로

부등식 $2\sin^2\frac{n\pi}{4}>1+\cos\frac{n\pi}{4}$에서

$2\left(1-\cos^2\frac{n\pi}{4}\right)>1+\cos\frac{n\pi}{4}$

$2\cos^2\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-1<0$이다.

이때 $\cos\frac{n\pi}{4}=t$라 하면 $-1\le t\le1$이고

$2t^2+t-1<0$,

$(t+1)(2t-1)<0$,

$-1<t<\frac{1}{2}$이므로

$-1<\cos\frac{n\pi}{4}<\frac{1}{2}$이다.

$-1<\cos\frac{n\pi}{4}<\frac{1}{2}$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수는

함수 $y=\cos\frac{\pi x}{4}$의 그래프 위의 점 중

x좌표가 10 이하의 자연수이고, y좌표가 -1보다 크고 $\frac{1}{2}$보다 작은 점의 개수와 같다. ……㉠

이때 $1\le x\le10$이면 $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi x}{4}\le\frac{5}{2}\pi$이므로

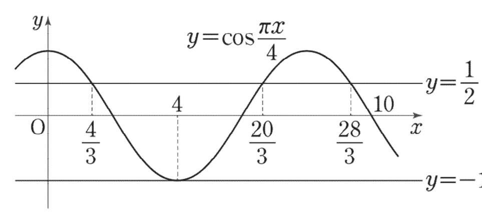
방정식 $\cos\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi x}{4}=\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi x}{4}=\frac{7\pi}{3}$에서

$x=\frac{4}{3}$, $x=\frac{20}{3}$, $x=\frac{28}{3}$이다.

따라서 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$인 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{4}$의 그래프와

두 직선 $y=-1$, $y=\frac{1}{2}$을 나타내면 다음 그림과 같다.

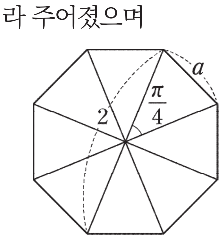


이때 ㉠을 만족시키는 점의 x좌표는 2, 3, 5, 6, 10으로 5개이다.

답 ③

159

정팔각형의 가장 긴 대각선의 길이가 2라 주어졌으며 정팔각형은 8개의 합동인 이등변삼각형으로 이루어졌으므로 1개의 이등변삼각형에 대하여 길이가 1인 두 변 사이의 끼인각의 크기는 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$이다.



따라서 정팔각형의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{4}\right)\times8=2\sqrt{2}$이다. ……㉠

한편 정팔각형의 한 변의 길이를 a라 하자.

코사인법칙에 의하여

$a^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=2-\sqrt{2}$이다.

또한 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 나머지 두 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로

직각이등변삼각형 4개의 넓이의 합은

$\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right\}\times 4 = a^2 = 2-\sqrt{2}$ 이다. ⋯⋯㉡

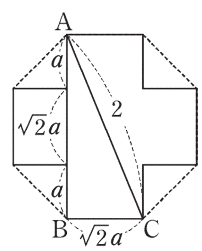
㉠, ㉡에 의하여 구하는 도형의 넓이는

$2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2$ 이다.

다른풀이

직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a라 하면 정팔각형의 한 변의 길이는 직각삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{2}a$와 같다.

이때 오른쪽 그림에서의 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



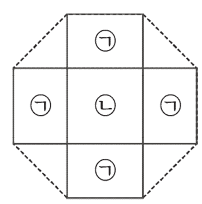
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$(2a+\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{2}a)^2=2^2$,

$(8+4\sqrt{2})a^2=4$,

$(2+\sqrt{2})a^2=1$,

$a^2=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 이다.



이때 구하는 도형의 넓이는 ㉠으로 표시된 직사각형 4개와 ㉡으로 표시된 정사각형 1개의 넓이의 합이다.

$\therefore\ (\sqrt{2}a\times a)\times 4+(\sqrt{2}a)^2$

$=(4\sqrt{2}+2)a^2$

$=(4\sqrt{2}+2)\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$=(2\sqrt{2}+1)(2-\sqrt{2})$

$=3\sqrt{2}-2$

답 ①

160

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BAC)=\frac{6^2+2^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times 6\times 2}=\frac{2}{3}$ 이므로

$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle BAC)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다.

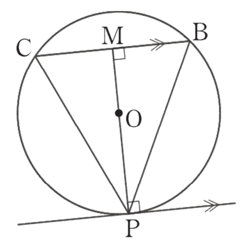
이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{2\sqrt{6}}{\sin(\angle BAC)}$, 즉 $R=\frac{3\sqrt{30}}{5}$ 이다.

한편 삼각형 BCP의 밑변을 선분 BC라 하면 $\overline{BC}=2\sqrt{6}$ 으로 정해져 있으므로 삼각형의 높이가 최대일 때 넓이가 최대가 된다.

그림과 같이 외접원의 중심을 O라 하고 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

선분 BC에 평행한 직선이 원에 접할 때 접점 중 점 M과의 거리가 더 먼 점을 P라 하면 삼각형 BCP의 높이가 최대가 된다.



$\overline{OM}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2-\sqrt{6}^2}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$

따라서 삼각형 BCP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\left(\frac{2\sqrt{30}}{5}+\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)=6\sqrt{5}$

$\therefore\ k^2=(6\sqrt{5})^2=180$

답 180

Ⅲ 수열

161

$a_5+a_6=5$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=(a_1+a_{10})+(a_2+a_9)+(a_3+a_8)$

$+(a_4+a_7)+(a_5+a_6)$

$=5(a_5+a_6)$

$=25$

답 ⑤

162

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 3이므로

$a_2+a_4=(a_3)^2$에서

$a_1\times3+a_1\times3^3=(a_1\times3^2)^2$,

$30a_1=81(a_1)^2$,

$a_1=\dfrac{10}{27}$ $(\because\ a_1\neq0)$이다.

$\therefore\ a_5=\dfrac{10}{27}\times3^4=30$

답 30

163

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=4n$ ……㉠

㉠의 양변에 $n=2$를 대입하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)$

$=a_3-a_1=8$

이고, $a_3=10$이므로

$10-a_1=8$ $\therefore\ a_1=2$

㉠의 양변에 $n=7$을 대입하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_8-a_7)$

$=a_8-a_1=28$

이고, $a_1=2$이므로

$a_8-2=28$

$\therefore\ a_8=30$

다른풀이

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=-a_1+a_{n+1}=4n$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_1+4n$이다.

$a_3=a_1+4\times2=10$이므로

$a_1=2$이다.

$\therefore\ a_8=a_1+4\times7=2+28=30$

답 30

164

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$4\times4r\times4r^2\times4r^3\times\cdots\times4r^9$

$=4^{10}\times r^{1+2+3+\cdots+9}=4^{10}\times r^{45}$이므로

$4^{10}\times r^{45}=2^{110}$이다.

즉, $r^{45}=\dfrac{2^{110}}{(2^2)^{10}}=2^{90}$이므로

$r=2^2=4$ $(\because\ r>0)$이다.

따라서 $a_n=4\times4^{n-1}=4^n$이므로

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\dfrac{4\times(4^{20}-1)}{4-1}=\dfrac{4}{3}(2^{40}-1)$

답 ②

165

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

수열 $\{a_n+S_n\}$이 공차가 4인 등차수열을 이루므로

$(a_8+S_8)-(a_7+S_7)=4$,

$a_8-a_7+(S_8-S_7)=4$,

$2a_8-a_7=4$이다.

$\therefore\ a_7=2a_8-4=12$ $(\because\ a_8=8)$

답 ②

166

조건 (가), (나)에 의하여 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열이므로

$y_n = 4n$이다.

조건 (다)에 의하여

$S_n = x_n \times y_n = n \times 2^{n+2}$이므로

$x_n = 2^n$이다.

$\therefore\ \mathrm{C}_n(2^n,\ 4n)$

따라서 $\mathrm{C}_3(8,\ 12)$, $\mathrm{C}_4(16,\ 16)$이므로 선분 $\mathrm{C}_3\mathrm{C}_4$의 길이는

$\sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$이다.

답 ③

167

$a_3 = 1$이고

$a_{n+1} + (-1)^n a_n = 5n$이므로

$n=2$를 대입하면

$1 + a_2 = 10$에서 $a_2 = 9$

$n=1$을 대입하면

$9 - a_1 = 5$에서 $a_1 = 4$

$n=3$을 대입하면

$a_4 - 1 = 15$에서 $a_4 = 16$

$n=4$를 대입하면

$a_5 + 16 = 20$에서 $a_5 = 4$

$\therefore\ a_1 + a_5 = 4 + 4 = 8$

답 ④

168

$a_1 = -\frac{1}{2}$이고

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\ (n \geq 2)$이므로

$n=2$일 때

$a_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$이고

$n \geq 2$일 때

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$
$$= a_n$$

에서 $a_{n+1} = 2a_n$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{1}{2}$이고

$a_n = 2^{n-3}\ (n \geq 2)$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{9} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{9} 2^{k-3}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(2^8-1)}{2-1}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{255}{2} = 127$$

답 ①

169

(i) $n=1$일 때

(좌변)$= a_1 = 9$, (우변)$= 8 + 1 = 9$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_k = 2 \times 4^k + k \times 2^{1-k}$이므로

$$2ka_{k+1} = (k+1)a_k + (7k-1)2^{2k+1}$$
$$= (k+1)a_k + (\boxed{14k-2}) \times 4^k$$
$$= (k+1)(2 \times 4^k + k \times 2^{1-k}) + (14k-2)4^k$$
$$= 16k \times 4^k + k(k+1)2^{1-k}$$
$$= k \times 4^{\boxed{k+2}} + k(k+1)2^{1-k}$$

이때 양변을 $2k$로 나누면

$a_{k+1} = 2 \times 4^{k+1} + (k+1)2^{-k}$

이다. 따라서 $n = k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n = 2 \times 4^n + n \times 2^{1-n}$이다.

(가) : $f(k) = 14k - 2$, (나) : $g(k) = k + 2$

$\therefore\ f(6) + g(8) = 82 + 10 = 92$

답 ②

170

조건 (나)의 $|a_{n+1}-a_n|=2n$에서

$a_{n+1}-a_n=2n$ 또는 $a_{n+1}-a_n=-2n$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2n$ 또는 $a_{n+1}=a_n-2n$ ……㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3=a_2+4$ 또는 $a_3=a_2-4$

이때 $a_3=8$이므로

$8=a_2+4$ 또는 $8=a_2-4$

$\therefore\ a_2=4$ 또는 $a_2=12$

(i) $a_2=4$일 때

㉠에서 $4=a_1+2$ 또는 $4=a_1-2$이므로

$a_1=2$ 또는 $a_1=6$

조건 (가)에서 $a_1<a_2$이므로

$a_1=2$

(ii) $a_2=12$일 때

㉠에서 $12=a_1+2$ 또는 $12=a_1-2$이므로

$a_1=10$ 또는 $a_1=14$

조건 (가)에서 $a_1<a_2$이므로

$a_1=10$

같은 방법으로 ㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_4=a_3+6$ 또는 $a_4=a_3-6$

이때 $a_3=8$이고 $a_3<a_4$이므로

$a_4=8+6=14$

㉠에 $n=4$를 대입하면

$a_5=a_4+8$ 또는 $a_5=a_4-8$

$a_5=22$ 또는 $a_5=6$

㉠에 $n=5$를 대입하면

$a_6=a_5+10$ 또는 $a_6=a_5-10$

이때 $a_5<a_6$이므로

$a_6=22+10=32$ 또는 $a_6=6+10=16$

따라서 a_1+a_6의 최댓값은

$10+32=42$

답 42

171

첫째항이 10이고 공차가 -2인 등차수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이 0이려면

$$\frac{n\{2\times10+(n-1)\times(-2)\}}{2}=0,$$

$n(22-2n)=0$이어야 한다.

$\therefore\ n=11$ ($\because$ n은 자연수)

답 11

172

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$,

공비를 $r\ (r>0,\ r\neq1)$라 하면

$\dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_5-a_6}=3^7$에서

$\dfrac{ar^{10}-ar^{11}}{ar^4-ar^5}=3^7$이므로

$\dfrac{ar^{10}(1-r)}{ar^4(1-r)}=3^7$,

$r^6=3^7$

$\therefore\ r=3^{\frac{7}{6}}$

답 ⑤

173

$a_1=1$이고

모든 자연수 n에 대하여 $a_na_{n+1}=\dfrac{2n-1}{n+1}$이므로

$1\times a_2=\dfrac{1}{2}$에서 $a_2=\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{2}\times a_3=\dfrac{3}{3}$에서 $a_3=2$,

$2\times a_4=\dfrac{5}{4}$에서 $a_4=\dfrac{5}{8}$,

$\dfrac{5}{8}\times a_5=\dfrac{7}{5}$에서 $a_5=\dfrac{56}{25}$이다.

답 ③

174

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ca_k=\sum_{k=1}^{10}(c+b_k)$에서

$\displaystyle c\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}c+\sum_{k=1}^{10}b_k$

이때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=20,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=10$이므로

$20c=10c+10$

$\therefore\ c=1$

답 1

175

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=d$이므로

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 d인 등차수열이다.

$a_{31}=\frac{1}{91}$이므로 $\frac{1}{a_{31}}=1+30d=91$

$\therefore\ d=3$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은

$\frac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$이므로

$a_n=\frac{1}{3n-2}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{20}a_k a_{k+1}&=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{58}-\frac{1}{61}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{20}{61}\end{aligned}$$

답 ④

176

$S_n=2^n-5n+10$에서

$n=1$일 때 $a_1=S_1=7$이다.

$n\ge 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2^n-5n+10-\{2^{n-1}-5(n-1)+10\}\\&=2^{n-1}-5\end{aligned}$$
이므로

$0<2^{n-1}-5<100$, 즉 $5<2^{n-1}<105$를 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 값은 4, 5, 6, 7이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+4+5+6+7=23$이다.

답 ①

177

$\sqrt{2}$, a, b, c, d, $\sqrt{5}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b\times c=a\times d=\sqrt{2}\times\sqrt{5}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\log(a^2)+\log(b^2)+\log(c^2)+\log(d^2)\\&=\log(a^2b^2c^2d^2)\\&=\log(abcd)^2\\&=2\log(abcd)\\&=2\log(\sqrt{10}\times\sqrt{10})\\&=2\log 10=2\end{aligned}$$

답 ②

178

주어진 조건에 의하여

$a_1=8$,

$a_2=\frac{8}{2}=4$,

$a_3=\frac{4}{2}=2$,

$a_4=\frac{2}{2}=1$,

$a_5=1+5=6$,

$a_6=\frac{6}{2}=3$,

$a_7=3+5=8$,

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 8, 4, 2, 1, 6, 3이 반복적으로 나타난다.

$40=6\times 6+4$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40}a_n&=(8+4+2+1+6+3)\times 6+(8+4+2+1)\\&=24\times 6+15\\&=159\end{aligned}$$

답 159

179

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\ne 1)$라 하자.

조건 (가)에서 $a+ar^{10}=1$ ……㉠

조건 (나)에서 a_1-a_2, a_6, S_{10}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a_6)^2=(a_1-a_2)\times S_{10}$

$(ar^5)^2=a(1-r)\times\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}$

$a^2r^{10}=a^2(1-r^{10})$

이때 $a\neq0$이므로 $2r^{10}=1$ $\quad\therefore\ r^{10}=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $a+\dfrac{1}{2}a=1$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ a_{21}=ar^{20}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{6}$

답 ②

180

$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$, $g(x)=\log_4 x$, $h(x)=\dfrac{2}{3}\log_4 x$에 대하여

직선 $y=k$가 y축 및 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점의 x좌표를 각각 0, b, c, d라 하면

$\log_{\frac{1}{4}}b=k$에서 $b=\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=2^{-2k}$,

$\log_4 c=k$에서 $c=4^k=2^{2k}$,

$\dfrac{2}{3}\log_4 d=k$에서 $d=4^{\frac{3}{2}k}=2^{3k}$이다.

이때 세 선분 AB, BC, CD의 길이는 각각

$\overline{\mathrm{AB}}=2^{-2k}$,

$\overline{\mathrm{BC}}=2^{2k}-2^{-2k}$,

$\overline{\mathrm{CD}}=2^{3k}-2^{2k}$

이고 $\overline{\mathrm{CD}}$는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 등차중항이므로

$2(2^{3k}-2^{2k})=2^{-2k}+(2^{2k}-2^{-2k})$

$2\times2^{3k}-3\times2^{2k}=0$,

$2^{2k}(2\times2^k-3)=0$,

$2\times2^k=3$ $(\because\ 2^{2k}>0)$,

$2^k=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ k=\log_2\dfrac{3}{2}$

다른풀이

문제에서 주어진 그림에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$이다. $\cdots\cdots$㉠

세 선분 AB, CD, BC의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{CD}}$는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 등차중항, 즉

$2\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$이다. $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로

점 C의 x좌표를 $2t$라 하면 점 D의 x좌표는 $3t$이다.

(단, $t>0$)

따라서 $g(2t)=h(3t)$이므로

$-f(2t)=-\dfrac{2}{3}f(3t)$,

$\log_4(2t)=\dfrac{2}{3}\log_4(3t)$,

$3\log_4(2t)=2\log_4(3t)$,

$\log_4(2t)^3=\log_4(3t)^2$

이때 로그함수는 일대일대응이므로

$(2t)^3=(3t)^2$,

$8t^3=9t^2$,

$t=\dfrac{9}{8}$ $(\because\ t>0)$

$\therefore\ k=g\left(\dfrac{9}{4}\right)=\log_4\dfrac{9}{4}=\log_2\dfrac{3}{2}$

답 ③

181

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자. (단, $a>0$)

$\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}=12$에서

$r^2+r=12$,

$r^2+r-12=0$,

$(r+4)(r-3)=0$,

$r=-4$ 또는 $r=3$이다.

이때 $a_4=-1$로 음수이므로 $r=-4$이어야 한다.

따라서 $a(-4)^3=-1$에서 $a=\dfrac{1}{64}$이다.

답 ④

182

$a_m-a_n=a_{m-n}$에서

$m=2$, $n=1$을 대입하면 $a_2-a_1=a_1$

$a_2=2a_1$

$m=3$, $n=2$를 대입하면 $a_3-a_2=a_1$

$a_3=a_1+a_2=3a_1$

$m=4$, $n=3$을 대입하면 $a_4-a_3=a_1$

$a_4=a_1+a_3=4a_1$

$m=5$, $n=4$를 대입하면 $a_5-a_4=a_1$

$a_5=a_1+a_4=5a_1$

$m=6$, $n=5$를 대입하면 $a_6-a_5=a_1$

$a_6=a_1+a_5=6a_1$

$m=7$, $n=6$을 대입하면 $a_7-a_6=a_1$

$a_7=a_1+a_6=7a_1$

이때 $a_7=63$이므로 $7a_1=63$

$\therefore\ a_1=9$

답 9

183

$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$이므로

$S_{n+2}-S_n=3a_{n+1}-a_n$에서

$a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}-a_n$

$\therefore\ a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, $a_1=1$이므로

$$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(1+a_{20})=100$$

$\therefore\ a_{20}=9$

답 9

184

다항식 $(x-3)^n+1$을 $x-1$로 나눈 나머지는

$a_n=(-2)^n+1$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{10}\{(-2)^n+1\}\\&=\sum_{n=1}^{10}(-2)^n+\sum_{n=1}^{10}1\\&=\frac{(-2)\{(-2)^{10}-1\}}{(-2)-1}+10\\&=\frac{2}{3}\times1023+10=692\end{aligned}$$

답 692

185

$$S_n=\frac{n\{430+(n-1)\times(-4)\}}{2}=\frac{n(434-4n)}{2}$$

$S_n<0$ 일 때 $434-4n<0$ 이므로

$n>\dfrac{434}{4}=108.5$이다.

$n=108$일 때

$$S_{108}=\frac{108(434-4\times108)}{2}=\frac{108\times2}{2}=108,$$

$n=109$일 때

$$S_{109}=\frac{109(434-4\times109)}{2}=\frac{109\times(-2)}{2}=-109$$

따라서 $|S_n|$이 최소가 되는 자연수 n의 값은 108이다.

답 108

186

$k-1<\log_2 n\le k$에서 $2^{k-1}<n\le 2^k$이다.

$k=0$일 때 $\dfrac{1}{2}<n\le1$이므로 $a_1=0+1=1$

$k=1$일 때 $1<n\le2$이므로 $a_2=1+1=2$

$k=2$일 때 $2<n\le4$이므로 $a_n=2+1=3$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=3}^{4}a_n=2\times3=6$

$k=3$일 때 $4<n\le8$이므로 $a_n=3+1=4$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=5}^{8}a_n=4\times4=16$

$k=4$일 때 $8<n\le16$이므로 $a_n=4+1=5$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=9}^{16}a_n=8\times5=40$

$k=5$일 때 $16<n\le32$이므로 $a_n=5+1=6$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=17}^{32}a_n=16\times6=96$

$k=6$일 때 $32<n\le64$이므로 $a_n=6+1=7$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=33}^{50}a_n=18\times7=126$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{50}a_n&=a_1+a_2+\sum_{n=3}^{4}a_n+\sum_{n=5}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{16}a_n\\&\quad+\sum_{n=17}^{32}a_n+\sum_{n=33}^{50}a_n\\&=1+2+6+16+40+96+126=287\end{aligned}$$

답 287

187

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 c, d라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)c$, $b_n = b_1 + (n-1)d$

이다. 이때

$$a_n + b_n = \{a_1 + (n-1)c\} + \{b_1 + (n-1)d\}$$
$$= (c+d)n + (a_1 + b_1 - c - d)$$
$$= (a_1 + b_1) + (n-1)(c+d)$$

이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$은 첫째항이 $a_1 + b_1$이고 공차가 $c+d$인 등차수열이다.

조건 (가)에 의하여 등차수열 $\{a_n + b_n\}$은 첫째항이 6이고 공차가 5이다.

즉, $a_1 + b_1 = 6$, $c + d = 5$이다.

또한 조건 (나)에 의하여 $a_6 - a_3 = b_6 - b_3$이므로

$c = d$이다.

이를 $c + d = 5$에 대입하면

$2c = 5$이므로

$c = \frac{5}{2}$이다.

$$\therefore\ a_2 + b_4 = (a_1 + c) + (b_1 + 3d)$$
$$= (a_1 + b_1) + (c + 3d)$$
$$= (a_1 + b_1) + 4c$$
$$= 6 + 4 \times \frac{5}{2} = 16$$

답 16

188

(i) $n = 1$일 때

(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} k(-2k+3) = 1$, (우변)$= 1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n = m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k\{2(m-1) - 2k + 3\}$$
$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\text{이고}$$

$n = m + 1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\{2(m+1-1) - 2k + 3\}$$
$$= \sum_{k=1}^{m+1} k(2m - 2k + 3)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k(2m - 2k + 3) + \boxed{m+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [k\{2(m-1) - 2k + 3\} + 2k] + m + 1$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k\{2(m-1) - 2k + 3\} + 2 \times \frac{m(m+1)}{2} + m + 1$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k\{2(m-1) - 2k + 3\} + \boxed{(m+1)^2}$$
$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

이다. 따라서 $n = m + 1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

(가) : $f(m) = m + 1$, (나) : $g(m) = (m+1)^2$

$\therefore\ f(15) + g(4) = 16 + 25 = 41$

답 ⑤

189

$a_1 = 45$이고 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = (103 - 4n) - a_n$이므로

$a_2 = 99 - 45 = 54$,

$a_3 = 95 - 54 = 41$,

$a_4 = 91 - 41 = 50$,

$a_5 = 87 - 50 = 37$,

$a_6 = 83 - 37 = 46$,

$\vdots$

이다.

즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 45이고 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_{2n-1} = 45 + (n-1)(-4) = 49 - 4n$이고

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 54이고 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_{2n} = 54 + (n-1)(-4) = 58 - 4n$이다.

$49 - 4n > 0$, 즉 $n < \frac{49}{4}$를 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 12이므로

$a_k > 0$을 만족시키는 홀수 k의 최댓값은

$2 \times 12 - 1 = 23$이다.

$58-4n>0$, 즉 $n<\frac{29}{2}$를 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 14이므로

$a_k>0$을 만족시키는 짝수 k의 최댓값은 $2\times14=28$이다.

따라서 구하는 자연수 k의 최댓값은 28이다.

답 28

190

조건 (가)에서

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|$ ……㉠

즉, $1\le n\le 10$일 때 $a_n\ge 0$이다.

조건 (나)에서

$a_1+a_2+\cdots+a_{12}$

$=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|-2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a_{11}+a_{12}=|a_{11}|+|a_{12}|-2$ ……㉢

즉, $a_{11}+a_{12}<|a_{11}|+|a_{12}|$이므로 a_{11}, a_{12} 중에서 음수인 항이 적어도 하나 존재한다.

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d<0$이어야 한다.

(i) $a_{11}<0$일 때

$d<0$이고 $a_{11}<0$이므로 $a_{12}<0$

이때 ㉢에서 $a_{11}+a_{12}=-a_{11}-a_{12}-2$이므로

$2a_{11}+2a_{12}=-2$, $4a_{11}+2d=-2$

$a_{11}=-\frac{2+2d}{4}<0$, $d>-1$

$\therefore\ -1<d<0$

그런데 d는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_{11}>0$, $a_{12}<0$일 때

㉢에서 $a_{11}+a_{12}=a_{11}-a_{12}-2$

$2a_{12}=-2$ $\quad\therefore\ a_{12}=-1$

이때 $a_{11}>0$이므로

$a_{12}-d>0$에서 $-1-d>0$

$\therefore\ d<-1$

(i), (ii)에서 $a_{12}=-1$, $d<-1$이므로 a_1의 값이 최소이려면 $d=-2$이어야 한다.

따라서 구하는 a_1의 최솟값은

$a_1=a_{12}-11d=-1-11\times(-2)=21$

답 21

191

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$(a_2)^2+a_5=6$,

$(a_3)^2+a_7=12$,

$a_3a_5+a_9=(a_4)^2+a_9$는 이 순서대로 공비가 r^2인 등비수열을 이루므로

12는 6과 $a_3a_5+a_9$의 등비중항이다.

따라서 $12^2=6\times(a_3a_5+a_9)$이므로

$a_3a_5+a_9=24$이다.

답 24

192

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-a_{n+1}=k$를 만족시키므로

수열 $\{a_n\}$은 공차가 $-k$인 등차수열이다.

$\frac{5(2a_1-4k)}{2}=10$에서 $a_1-2k=2$이고

$\frac{10(2a_1-9k)}{2}=30$에서 $2a_1-9k=6$이므로

$a_1=\frac{6}{5}$, $k=-\frac{2}{5}$이다.

$\therefore\ \frac{a_1}{k}=-3$

답 ①

193

첫째항이 4인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r\ne0)$라 하자.

(i) $r=1$인 경우

수열 $\{8+S_n\}$의 일반항은 $8+S_n=4n+8$이므로

이 수열은 등비수열이 아니다.

(ii) $r\ne1$인 경우

수열 $\{8+S_n\}$의 일반항은

$8+S_n=8+\frac{4(r^n-1)}{r-1}=\frac{4r^n}{r-1}+\frac{8r-12}{r-1}$이다.

이때 이 수열이 등비수열이려면 $\frac{8r-12}{r-1}=0$이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여 $r=\frac{3}{2}$이다.

다른풀이

첫째항이 4인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r \neq 0)$라 하자.

수열 $\{8+S_n\}$이 등비수열이므로

$8+S_2$는 $8+S_1$과 $8+S_3$의 등비중항이다.

이때

$8+S_1=8+4=12$,

$8+S_2=8+(4+4r)=4(3+r)$,

$8+S_3=8+(4+4r+4r^2)=4(3+r+r^2)$이므로

$16(3+r)^2=48(3+r+r^2)$,

$r^2+6r+9=3r^2+3r+9$,

$2r^2-3r=0$,

$2r\left(r-\dfrac{3}{2}\right)=0$

$\therefore\ r=\dfrac{3}{2}$

답 ⑤

참고

$r=\dfrac{3}{2}$일 때 수열 $\{8+S_n\}$의 일반항은

$8+S_n=8+\dfrac{4\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\dfrac{3}{2}-1}=8\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$이므로

수열 $\{8+S_n\}$은 첫째항이 12이고 공비가 $\dfrac{3}{2}$인 등비수열임을 확인할 수 있다.

194

$S_{3n}-S_{n+1}=8n^2-6n+1\,(n \geq 1)$의 양변에

$n=1$을 대입하면 $a_3=3$이고,

$n=2$를 대입하면 $a_4+a_5+a_6=21$이다.

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_3+d)+(a_3+2d)+(a_3+3d)=21$이므로

$9+6d=21$ $(\because\ a_3=3)$, $6d=12$이다.

$\therefore\ d=2$

$\therefore\ a_{10}=a_3+7d=3+7\times2=17$

다른풀이

$S_{3n}-S_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{3n-1}+a_{3n}$

이때 항의 개수가 $3n-(n+1)=2n-1$로 홀수개이고,

등차중항에 의하여

$$\frac{a_{n+2}+a_{3n}}{2}=\frac{a_{n+3}+a_{3n-1}}{2}=\cdots$$
$$=a_{\frac{(n+2)+3n}{2}}$$
$$=a_{2n+1}$$

이다.

즉, $a_{n+2}+a_{3n}=a_{n+3}+a_{3n-1}=\cdots=2a_{2n+1}$이므로

$S_{3n}-S_{n+1}=a_{2n+1}\times(2n-1)$이다.

또한 $8n^2-6n+1=(4n-1)(2n-1)$이므로

$a_{2n+1}\times(2n-1)=(4n-1)(2n-1)$에서

$a_{2n+1}=4n-1$ $(n \geq 1)$이다.

이때 $a_3=3$, $a_5=7$, $\cdots$을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$의

일반항은 $a_n=2n-3\,(n \geq 1)$이므로

$a_{10}=17$이다.

답 ③

195

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=1-\frac{1}{a_{n+1}}\ (\because\ a_1=1)$$

이므로 $1-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2n+2}{2n+3}$에서

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2n+3}$ $\quad\therefore\ a_{n+1}=2n+3$

즉, $n \geq 2$일 때 $a_n=2n+1$이고 $a_1=1$이므로

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n+1 & (n \geq 2)\end{cases}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=1+\sum_{k=2}^{10}(2k+1)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{10}(2k+1)-3$$
$$=2\times\frac{10\times11}{2}+10-2=118$$

답 118

196

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변) $=a_1=1$,

(우변) $=\dfrac{2}{1^2\times(1+1)}=1$이므로

(*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\dfrac{2}{m^2(m+1)}$ 이므로

$$\boxed{(m+1)^3}\times a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}ka_k$$

$$=\sum_{k=1}^{m}ka_k+(m+1)a_{m+1}$$

$$=\boxed{m^3}\times a_m+(m+1)a_{m+1}$$

이다. 따라서

$(m^3+3m^2+2m)a_{m+1}=m^3a_m$,

$m(m+1)(m+2)a_{m+1}=m^3a_m$,

$$a_{m+1}=\boxed{\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}}\times a_m$$

$$=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\times\frac{2}{m^2(m+1)}$$

$$=\frac{2}{(m+1)^2(m+2)}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\dfrac{2}{n^2(n+1)}$이다.

(가) : $f(m)=(m+1)^3$, (나) : $g(m)=m^3$,

(다) : $h(m)=\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$

$$\therefore\ \frac{f(2)h(4)}{g(4)}=\frac{3^3\times4^2}{4^3\times5\times6}=\frac{9}{40}$$

답 ②

197

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}+a_{n+1}-a_1$이므로

$a_{n+1}+a_{n+2}=a_1+4$ ……㉠

㉠에 $n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 19$를 대입하여 변끼리 더하면

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21}=10(a_1+4)$

이때

$$\sum_{k=1}^{21}a_k=a_1+(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21})$$

$$=a_1+10(a_1+4)=11a_1+40$$

이므로 $11a_1+40=73$에서 $a_1=3$

㉠에 $n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 29$를 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{31}=15(a_1+4)$$

$$=15\times(3+4)=105$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{31}a_k=a_1+(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{31})$$

$$=3+105=108$$

답 108

198

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(ⅰ) $d=0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a$ (단, a는 상수)라 할 수 있다.

조건 (가)는 만족시키지만

조건 (나)를 만족시키려면 $3|2a|=3a-2$이어야 하는데

$a\ge0$일 때 $6a=3a-2$에서 $a=-\dfrac{2}{3}$ (<0)이므로 모순이고

$a<0$일 때 $-6a=3a-2$에서 $a=\dfrac{2}{9}$ (>0)이므로 모순이다.

(ⅱ) $d\ne0$인 경우

조건 (가)에서

$a_3=-a_7$, 즉 $a_3+a_7=0$이고

이때 a_5는 a_3과 a_7의 등차중항이므로

$2a_5=0$에서 $a_5=0$이다.

조건 (나)에서

$3|(a_5+4d)+(a_5-d)|=3(a_5-4d)-2$,

$3|4d+(-d)|=3(-4d)-2$,

$9|d|=-12d-2$이다.

$d>0$일 때 $9d=-12d-2$에서

$d=-\dfrac{2}{21}$ (<0)이므로 모순이다.

$d<0$일 때 $-9d=-12d-2$에서 $d=-\dfrac{2}{3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_5=0$, $d=-\frac{2}{3}$이다.

$\therefore\ a_2=a_5-3d=0-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=2$

답 ⑤

199

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a\times 7^{n-1}$이라 하자.

(단, a는 9 이하의 자연수)

수열 $\{b_n\}$은 a, $7a$, 7^2a, 7^3a, 7^4a, 7^5a, $\cdots$의 일의 자리 수와 같고

결국 a, $7a$, $9a$, $3a$, a, $7a$, $\cdots$의 일의 자리 수와 같다.

a, $7a$, $9a$, $3a$의 일의 자리 수의 합은

$a=1$일 때 $1+7+9+3=20$,

$a=2$일 때 $2+4+8+6=20$,

$a=3$일 때 $3+1+7+9=20$,

$\vdots$

$a=7$일 때 $7+9+3+1=20$,

$a=8$일 때 $8+6+2+4=20$,

$a=9$일 때 $9+3+1+7=20$이다.

즉, a의 값에 관계없이 a, $7a$, $9a$, $3a$의 일의 자리 수의 합은 20이고

$15=4\times4-1$이므로

$\sum_{n=1}^{15}b_n$의 값은 20×4에서 $3a$의 일의 자리 수를 뺀 값과 같다.

따라서 $a=3$일 때 $m=20\times4-9=71$,

$a=7$일 때 $M=20\times4-1=79$이다.

$\therefore\ m+M=71+79=150$

답 150

200

조건 (가)에 의하여

$n\times2^{n+a_n}=2^n$이므로

$\log_2 n+n+a_n=n$,

$a_n=-\log_2 n$이다. $\cdots\cdots$㉠

조건 (나)에 의하여

$f(a_n)$, $f(0)$, $f(b_n)$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

n은 $n\times2^{a_n}$과 $n\times2^{b_n}$의 등비중항이다.

즉, $n^2=(n\times2^{a_n})\times(n\times2^{b_n})$에서

$n^2=n^2\times2^{a_n+b_n}$,

$1=2^{a_n+b_n}$,

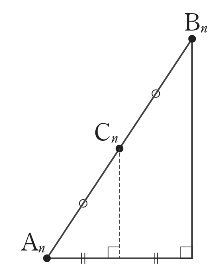
$a_n+b_n=0$이다. $\cdots\cdots$㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $b_n=\log_2 n$이다.

즉, $\mathrm{A}_n(-\log_2 n,\ 1)$, $\mathrm{B}_n(\log_2 n,\ n^2)$이므로

x좌표가 0인 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점이다.

따라서 점 C_n의 y좌표는 $c_n=\frac{n^2+1}{2}$이다.



$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=2}^{10}c_n&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{10}(n^2+1)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)-1\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+10\right)-1\\&=\frac{393}{2}\end{aligned}$$

답 ②

201

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$S_{10}+5a_1=5(S_8-S_4)$에서

$$\begin{aligned}S_8-S_4&=a_5+a_6+a_7+a_8\\&=(a_1+4d)+(a_1+5d)+(a_1+6d)+(a_1+7d)\\&=4a_1+22d\end{aligned}$$

이므로

$\frac{10(2a_1+9d)}{2}+5a_1=5(4a_1+22d)$,

$10a_1+45d+5a_1=20a_1+110d$,

$5a_1=-65d$ $\quad\therefore\ a_1=-13d$

$\therefore\ \frac{a_7}{a_2}=\frac{a_1+6d}{a_1+d}=\frac{-13d+6d}{-13d+d}=\frac{7}{12}$

답 ①

202

2 이상의 자연수 n에 대하여

$S_{n+1}-2a_n=S_n-a_{n-1}$에서

$S_{n+1}-S_n-a_n=a_n-a_{n-1}$,

$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$이므로

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 공차를 d라 하면 $S_6-S_5=a_4+7$에서

$a_6=a_4+7$, $2d=7$, $d=\frac{7}{2}$이다.

$\therefore\ a_{11}-a_1=10d=35$

답 35

참고

수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 나타내는 이웃하는 항 사이의 관계식은 다음과 같이 다양하다.

❶ $a_{n+1}=a_n+d\ (n\ge 1)$ (단, d는 상수)

❷ $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n\ \ (n\ge 1)$

❸ $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\ \ (n\ge 1)$

이 문제에서 주어진 관계식을 정리하면

$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}\ (n\ge 2)$이므로(❷와 같음) 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 알 수 있다.

이처럼 등차수열 또는 등비수열임을 간접적으로 나타내는 다양한 꼴의 관계식이 제시될 수 있으므로 적절히 변형하여 ❶ 또는 ❷ 또는 ❸과 같이 잘 알고 있는 관계식으로 바꾸는 연습을 충분히 하도록 하자.

203

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}
&=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}\\
&=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})\ (\because\ a_{k+1}-a_k=2)\\
&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots\\
&\qquad+(\sqrt{a_{41}}-\sqrt{a_{40}})\}\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{41}}-\sqrt{a_1})=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{1})\\
&=\frac{1}{2}\times(9-1)=4
\end{aligned}$$

답 ③

204

$\sum_{k=1}^{10}a_k=20$이고

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+4})\\
&=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+\cdots+(a_6+a_{10})\\
&=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+a_5+a_6\\
&=\sum_{k=1}^{10}a_k+a_5+a_6=72
\end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned}
\therefore\ a_5+a_6&=\sum_{k=1}^{6}(a_k+a_{k+4})-\sum_{k=1}^{10}a_k\\
&=72-20=52
\end{aligned}$$

답 ③

205

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에 의하여

$\frac{S_{12}}{S_6}=\frac{12a}{6a}=2\neq 730$이므로

$r\neq 1$이다.

이때

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1},$$

$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=(r^3+1)S_3,$$

$$S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}=(r^6+1)S_6$$

이고, 조건 (가)에 의하여 $S_{12}=730S_6$이므로

$r^6+1=730$, $r^6=729$이다.

$\therefore\ r=3\ (\because\ r>0)$

조건 (나)에 의하여 $20S_6=kS_3$이므로

$20(r^3+1)S_3=kS_3$이다.

$\therefore\ k=20(r^3+1)$

$=20\times 28=560$

답 560

206

$a_n a_{n+1}=S_n$에서 $a_{n+1}=\dfrac{S_n}{a_n}$이므로

$a_2=\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{a_1}{a_1}=1,$

$a_3=\dfrac{S_2}{a_2}=\dfrac{a_1+a_2}{a_2}=\dfrac{4}{1}=4,$

$a_4=\dfrac{S_3}{a_3}=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{a_3}=\dfrac{8}{4}=2,$

$a_5=\dfrac{S_4}{a_4}=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_4}=\dfrac{10}{2}=5$이다.

$\therefore\ S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=3+1+4+2+5=15$

다른풀이

$n\geq 2$일 때

$a_n a_{n+1}=S_n$ ……㉠

$a_{n-1}a_n=S_{n-1}$ ……㉡

㉠－㉡에서

$a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=a_n,$

$a_{n+1}-a_{n-1}=1\ (\because\ a_n\neq 0)$이다.

$a_1=3$이고

$a_2=\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{a_1}{a_1}=1$이므로

$a_3=3+1=4,$

$a_4=1+1=2,$

$a_5=4+1=5$이다.

$\therefore\ S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=3+1+4+2+5=15$

답 ⑤

207

$a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$(n+1)a_{n+1}=-S_n+5$에 $n=1$을 대입하면

$2a_2=-a_1+5,$

$2a_2=4,$

$a_2=2$이다.

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=a_2=2$이고 (우변)$=2$이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq 2)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\dfrac{4}{(m-1)m}$이므로

$$\begin{aligned}(m+1)a_{m+1}&=-S_m+5\\&=-\left(a_1+\sum_{k=\boxed{2}}^{m}a_k\right)+5\\&=4-\sum_{k=2}^{m}\frac{4}{(k-1)k}\\&=4-4\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=4-4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\right\}\\&=4-4\left(1-\frac{1}{m}\right)\\&=\boxed{\frac{4}{m}}\end{aligned}$$

이다. 따라서 양변을 $m+1$로 나누면

$a_{m+1}=\dfrac{4}{m(m+1)}$

이므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\dfrac{4}{(n-1)n}$이다.

(가) : $p=2$, (나) : $f(m)=\dfrac{4}{m}$

$\therefore\ p+f(10)=2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}$

답 ②

208

$a_2a_4=4$에서 $(a_3)^2=4$

$\therefore\ a_3=-2$ 또는 $a_3=2$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$라 하자.

(i) $a_3=-2$일 때

$a_2=-\frac{2}{r}$, $a_4=-2r$이므로

$\sum_{k=2}^{4}(|a_k|\times a_k)=-\frac{4}{r^2}-4-4r^2<0$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3=2$일 때

$a_2=\frac{2}{r}$, $a_4=2r$이므로

$\sum_{k=2}^{4}(|a_k|\times a_k)=\frac{4}{r^2}+4+4r^2=21$에서

$4r^4-17r^2+4=0$,

$(4r^2-1)(r^2-4)=0$

$(2r+1)(2r-1)(r+2)(r-2)=0$

이때 r는 자연수이므로 $r=2$

(i), (ii)에서 $a_3=2$, $r=2$이므로

$a_5=2\times2^2=8$

답 8

209

조건 (가)를 만족시키는 어떤 자연수 k에 대하여

(i) $a_k\geq0$인 경우

$d>0$이므로 $a_{2k}>0$이다.

$\left|a_{3k}-|a_k|\right|=|a_{3k}-a_k|=|2kd|=2kd$이고

$|a_{2k}|=a_{2k}=a_1+(2k-1)d$이므로

$2kd=a_1+(2k-1)d$에서 $d=a_1$이다.

이때 조건 (나)에 의하여 $a_1=20$이므로

구하는 자연수 d의 값은 20이다.

(ii) $a_k<0$인 경우

$d>0$이므로 조건 (나)에 의하여 $a_1=-30$이다.

세 수 a_k, a_{2k}, a_{3k}는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\left|a_{3k}-|a_k|\right|=|a_{3k}+a_k|=|2a_{2k}|$,

즉 $|2a_{2k}|=|a_{2k}|$에서 $a_{2k}=0$이다.

이때 $(2k-1)d=30$을 만족시키는 두 자연수

k, d의 순서쌍 (k, d)는

$(1, 30)$, $(2, 10)$, $(3, 6)$, $(8, 2)$이다.

따라서 구하는 값은 $20+30+10+6+2=68$이다.

답 ②

210

a_1이 자연수이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ a_n+1 & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다.

이때 $a_3+a_5=6$이므로 a_3과 a_5는

모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) a_3과 a_5가 모두 짝수인 경우

$a_4=a_3+1$이고 홀수이므로

$a_5=\frac{a_4+1}{2}=\frac{1}{2}a_3+1$이다.

$a_3+a_5=a_3+\left(\frac{1}{2}a_3+1\right)=\frac{3}{2}a_3+1$이므로

$\frac{3}{2}a_3+1=6$에서 $a_3=\frac{10}{3}$

그런데 이는 자연수(짝수)가 아니다.

(ii) a_3과 a_5가 모두 홀수인 경우

$a_4=\frac{a_3+1}{2}$이고

❶ a_4가 짝수이면 $a_5=a_4+1=\frac{1}{2}a_3+\frac{3}{2}$이다.

$a_3+a_5=a_3+\left(\frac{1}{2}a_3+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}a_3+\frac{3}{2}$이므로

$\frac{3}{2}a_3+\frac{3}{2}=6$에서 $a_3=3$

❷ a_4가 홀수이면 $a_5=\frac{a_4+1}{2}=\frac{1}{4}a_3+\frac{3}{4}$이다.

$a_3+a_5=a_3+\left(\frac{1}{4}a_3+\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}a_3+\frac{3}{4}$이므로

$\frac{5}{4}a_3+\frac{3}{4}=6$에서 $a_3=\frac{21}{5}$

그런데 이는 자연수(홀수)가 아니다.

(i), (ii)에서 $a_3=3$이고,

가능한 a_2, a_1의 값은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
3	2	3
	5	4
		9

따라서 $a_3+a_5=6$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은

$3+4+9=16$

답 ③

211

$\sum_{k=1}^{5} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{6} (a_k + 2)$에서

$\sum_{k=1}^{6} a_k - a_1 = \sum_{k=1}^{6} a_k + 2 \times 6$이다.

$\therefore\ a_1 = -12$

답 ①

212

S_n의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n이 12, 13이므로

$a_{13} = a_1 + 12 \times 3 = 0$이어야 한다.

$\therefore\ a_1 = -36$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 3n - 39$이므로

$$S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = \frac{30(-36+51)}{2} = 225$$

답 225

213

$$\frac{S_8 - S_5}{S_5 - S_2} = \frac{a_6 + a_7 + a_8}{a_3 + a_4 + a_5} = \frac{a_3 \times r^3 + a_4 \times r^3 + a_5 \times r^3}{a_3 + a_4 + a_5} = r^3$$

이므로

$r^3 = r^2 + 18$,

$r^3 - r^2 - 18 = 0$,

$(r-3)(r^2 + 2r + 6) = 0$이다.

$\therefore\ r = 3$

답 ③

214

직선 $y = a_n$과 곡선 $y = \sqrt{x-1}$의 교점의 x좌표가 b_n이므로

$a_n = \sqrt{b_n - 1}$에서

$b_n = (a_n)^2 + 1$이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 공차가 $\frac{1}{2}$이라 주어졌으므로

$$\begin{aligned} b_6 - b_2 &= \{(a_6)^2 + 1\} - \{(a_2)^2 + 1\} \\ &= (a_6)^2 - (a_2)^2 \\ &= (a_6 - a_2)(a_6 + a_2) \\ &= \left(4 \times \frac{1}{2}\right)\left\{\left(a_5 + \frac{1}{2}\right) + \left(a_5 - 3 \times \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= 2(2a_5 - 1) = 8 \end{aligned}$$

$\therefore\ a_5 = \frac{5}{2}$

답 ①

215

$n = 1$을 대입하면

$a_2 = (a_1 - 1) \times (-2)^1 = -2a_1 + 2$

$n = 2$를 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= (a_2 - 1) \times (-2)^2 = 4a_2 - 4 \\ &= 4(-2a_1 + 2) - 4 \\ &= -8a_1 + 4 \end{aligned}$$

$n = 3$을 대입하면

$$\begin{aligned} a_4 &= (a_3 - 1) \times (-2)^3 = -8a_3 + 8 \\ &= -8(-8a_1 + 4) + 8 \\ &= 64a_1 - 24 \end{aligned}$$

$n = 4$를 대입하면

$$\begin{aligned} a_5 &= 3a_4 + 2 = 3(64a_1 - 24) + 2 \\ &= 192a_1 - 70 \end{aligned}$$

$n = 5$를 대입하면

$$\begin{aligned} a_6 &= (a_5 - 1) \times (-2)^5 = -32a_5 + 32 \\ &= -32(192a_1 - 70) + 32 \\ &= -6144a_1 + 2272 \end{aligned}$$

이때 $a_4 - a_6 = 0$이므로 $a_4 = a_6$이다.

즉, $64a_1 - 24 = -6144a_1 + 2272$이므로

$6208a_1 = 2296$

$\therefore\ 776a_1 = 287$

답 287

216

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$이라 하고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\} \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

이때 $b_1 = S_1 = 4$이므로

$b_n = 2n+2$ (단, $n \geq 1$)

즉, $\dfrac{a_n}{n} = 2n+2$이므로

$a_n = 2n(n+1)$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right) \\ &= 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

답 ⑤

217

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r는 정수)라 하면

$30 < S_3 - S_1 \leq 39$이므로

$30 < a_2 + a_3 \leq 39$, $30 < 3r + 3r^2 \leq 39$

$\therefore 10 < r(r+1) \leq 13$

이때 $r(r+1)$은 연속한 두 정수의 곱이므로 11, 13이 될 수 없다.

따라서 $r(r+1) = 12$이므로

$r^2 + r - 12 = 0$, $(r+4)(r-3) = 0$

$\therefore r = -4$ 또는 $r = 3$

(i) $r = -4$일 때

$S_m = \dfrac{3\{(-4)^m - 1\}}{-4-1} = 120$에서

$(-4)^m - 1 = -200$, $(-4)^m = -199$

그런데 이를 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ii) $r = 3$일 때

$S_m = \dfrac{3(3^m-1)}{3-1} = 120$에서

$3^m - 1 = 80$, $3^m = 81$ $\quad \therefore m = 4$

(i), (ii)에서 $r = 3$, $m = 4$이므로

$a_m = a_4 = a_1 r^3 = 3^4 = 81$

답 81

218

(i) $n = 1$일 때

(좌변)=(우변)= $\boxed{-12}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = m$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m} \{(-1)^{k+1} \times 2^k \times 2k\} = \frac{4-(6m+1)4^{m+1}}{9}$$

이다. $n = m+1$일 때 성립함을 보이면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2m+2} \{(-1)^{k+1} \times 2^k \times 2k\} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \{(-1)^{k+1} \times 2^k \times 2k\} \\ &\qquad + 2^{2m+1} \times 2(2m+1) - 2^{2m+2} \times 2(2m+2) \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \{(-1)^{k+1} \times 2^k \times 2k\} \\ &\qquad + (2m+1-4m-4)2^{2m+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \{(-1)^{k+1} \times 2^k \times 2k\} - \boxed{(2m+3)4^{m+1}} \\ &= \frac{4-(6m+1)4^{m+1}}{9} - \frac{9(2m+3)4^{m+1}}{9} \\ &= \frac{1}{9}\{4-(\boxed{24m+28})4^{m+1}\} \\ &= \frac{4-(6m+7)4^{m+2}}{9} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n = m+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

(가) : $p = -12$, (나) : $f(m) = (2m+3)4^{m+1}$,

(다) : $g(m) = 24m+28$

$$\begin{aligned} \therefore f(1)+g(2)+p &= 80+76+(-12) \\ &= 144 \end{aligned}$$

답 ③

219

$a_1 \geq 1$이므로 $a_2 = a_1 - 1 \geq 0$이고

$a_3 = a_2 - 1 = a_1 - 2 \geq -1$이다.

그런데 $a_3 = a_1 - 2 \geq 0$이면

$a_4 = a_3 - 1 = a_1 - 3 \neq a_1$이다.

따라서 $-1 \leq a_3 < 0$이므로

$a_4 = -3a_3 = -3a_1 + 6$이고,

$-3a_1 + 6 = a_1$에서 $4a_1 = 6$이다.

$\therefore\ a_1 = \dfrac{3}{2}$

즉, $a_2 = a_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = a_2 - 1 = -\dfrac{1}{2}$이고,

$a_4 = a_1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 3개의 항 $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$이

반복된다.

이때 20을 3으로 나눈 나머지는 2이므로

$a_{20} = a_2 = \dfrac{1}{2}$이다.

답 ③

220

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

조건 (가)에서

$a_3 + a_8 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 7d) = 2a_1 + 9d = 2$

$\therefore\ 2a_1 = 2 - 9d$ ……㉠

한편 $a_1 > 10$이므로

$2a_1 = 2 - 9d > 20 \quad \therefore\ d < -2$ ……㉡

또한 조건 (나)에서

$$S_5 = \frac{5(2a_1 + 4d)}{2}$$

$$= \frac{5\{(2-9d)+4d\}}{2}\ (\because\ ㉠)$$

$$= \frac{5(2-5d)}{2} < 60$$

이므로 $d > -\dfrac{22}{5}$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $-\dfrac{22}{5} < d < -2$

이때 d는 정수이므로 $d = -4$ 또는 $d = -3$

(i) $d = -3$일 때 ㉠에서 $a_1 = \dfrac{29}{2}$

그런데 모든 항이 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $d = -4$일 때 ㉠에서 $a_1 = 19$

(i), (ii)에서

$a_n = 19 + (n-1) \times (-4) = -4n + 23$

$$\therefore\ S_{20} = \frac{20 \times \{2 \times 19 + (20-1) \times (-4)\}}{2} = -380$$

답 ②

221

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_{10} - S_6 = S_5 - S_1 + 10$에서

$a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + 10$,

$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + 20d = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + 10$,

$20d = 10$,

$d = \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore\ a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4 \times \dfrac{1}{2} = 3$

답 3

222

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2 = a_4 + 10$, 즉 $a_4 - a_2 = -10$에서

$2d = -10$, $d = -5$이다.

$a_4 + a_6 = 10$, 즉 $(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 10$에서

$2a_1 + 8d = 10$,

$2a_1 - 40 = 10$,

$a_1 = 25$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 25 + (n-1)(-5) = 30 - 5n$이다.

$a_1 + a_k = 0$, 즉 $a_k = -25$를 만족시키는 자연수 k의 값은

$30 - 5k = -25$에서 $k = 11$이다.

답 ③

223

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+6 & (a_n<0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a_1=3$이고 ㉠에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1-2=1$, $a_3=a_2-2=-1$, $a_4=a_3+6=5$,

$a_5=a_4-2=3=a_1$, $a_6=a_5-2=1=a_2$, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $3, 1, -1, 5$가 이 순서대로 반복되어 나타나므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} a_k &= 12(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_{49}+a_{50} \\ &= 12\times\{3+1+(-1)+5\}+a_1+a_2 \\ &= 12\times 8+3+1=100\end{aligned}$$

답 ③

224

(i) $n=1$일 때

(좌변)=(우변)=$\boxed{\frac{1}{2}}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(m+1)!}$이 성립한다고

가정하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(k+1)!}+\frac{m+1}{(m+2)!} \\ &= 1-\frac{1}{(m+1)!}+\boxed{\frac{m+1}{(m+2)!}} \\ &= 1-\frac{m+2}{(m+2)!}+\frac{m+1}{(m+2)!} \\ &= 1-\boxed{\frac{1}{(m+2)!}}\end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

(가) : $\alpha=\frac{1}{2}$, (나) : $f(m)=\frac{m+1}{(m+2)!}$,

(다) : $g(m)=\frac{1}{(m+2)!}$

$$\therefore \frac{\alpha\times f(3)}{g(4)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5!}}{\frac{1}{6!}}=12$$

답 ①

225

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10}) \\ &= \sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(1+3b_k) \\ &= 5+3\sum_{k=1}^{5}b_k=50\end{aligned}$$

이므로

$3\displaystyle\sum_{k=1}^{5}b_k=45$이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{5}b_k=15$

답 ③

226

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$,

공비를 $r\ (r\neq 1)$라 하면

조건 (가)에 의하여 $a+ar=\frac{5}{36}$이므로

$a(1+r)=\frac{5}{36}$이다. $\cdots\cdots ㉠$

이때

$$\sum_{k=1}^{30}a_k=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1},$$

$$\sum_{k=1}^{15}(a_k)^2=\frac{a^2\{(r^2)^{15}-1\}}{r^2-1}=\frac{a^2(r^{30}-1)}{(r+1)(r-1)}$$

이므로 조건 (나)에 의하여 $\frac{r+1}{a}=5$이다.

$\therefore r+1=5a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6}$, $r=-\frac{1}{6}$ 이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{45}a_k=\frac{a(r^{45}-1)}{r-1},$$

$$\sum_{k=1}^{15}(a_k)^3=\frac{a^3\{(r^3)^{15}-1\}}{r^3-1}=\frac{a^3(r^{45}-1)}{(r-1)(r^2+r+1)}$$

이므로

$$n=\frac{r^2+r+1}{a^2}=\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}+1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}=31$$

답 31

227

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이고

$S_n = n^2 a_n$, $S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$에서

$(n^2-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{n-1}{n+1} a_{n-1}$ (단, $n \geq 2$)

$a_2 = \dfrac{1}{3} a_1$,

$a_3 = \dfrac{1}{2} a_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} a_1 = \dfrac{1}{6} a_1$,

$a_4 = \dfrac{3}{5} a_3 = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} a_1 = \dfrac{1}{10} a_1$이므로

$a_3 a_4 = \dfrac{1}{60} a_1^2 = \dfrac{1}{15}$에서

$a_1^2 = 4 \qquad \therefore\ a_1 = 2\ (\because\ a_1 > 0)$

$\therefore\ a_5 = \dfrac{2}{3} a_4 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{10} \times 2 = \dfrac{2}{15}$

답 ④

228

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각

a, d (a는 자연수, d는 음이 아닌 정수)라 하자.

$S_5 = 5a_3 = 50$에서 $a_3 = 10$

$\therefore\ a + 2d = 10$ ······㉠

$$\sum_{k=1}^{4} S_k = \sum_{k=1}^{4} \frac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{d}{2} k^2 + \frac{2a-d}{2} k \right)$$

$$= \frac{d}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{2a-d}{2} \times \frac{4 \times 5}{2}$$

$$= 10(a+d)$$

이고 $\sum_{k=1}^{4} S_k$의 값이 30의 배수이므로

$a+d$는 3의 배수이다.

㉠에서 $d = 10-(a+d)$이므로

$d=1$ 또는 $d=4$ 또는 $d=7$이다.

(ⅰ) $d=1$인 경우

㉠에서 $a=8$이므로

$a_{10} = a+9d = 17$

(ⅱ) $d=4$인 경우

㉠에서 $a=2$이므로

$a_{10} = a+9d = 38$

(ⅲ) $d=7$인 경우

㉠에서 $a=-4$이므로 자연수가 아니다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 모든 a_{10}의 값의 합은

$17+38=55$

답 55

229

조건 (가), (나)에 의하여

세 수 a, b, c는 이 순서대로 공비가 2 이상의 자연수인

등비수열을 이룬다.

따라서 $b=ar$, $c=ar^2$이라 하면 $ar^2 \leq 100$이어야 한다.

또한 조건 (다)에 의하여

$a+b+c = a(1+r+r^2)$이 홀수이려면

r의 값에 관계없이 $1+r+r^2 = 1+r(r+1)$은

홀수이므로 a가 홀수이면 된다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$ar^2 \leq 100$을 만족시키는 홀수 a와 2 이상의 자연수 r의

순서쌍 (a, r)의 개수와 같다.

$r=2$일 때 $4a \leq 100$인 홀수 a의 값은 $1, 3, 5, \cdots,$

25로 13개이다.

$r=3$일 때 $9a \leq 100$인 홀수 a의 값은 $1, 3, 5, \cdots,$

11로 6개이다.

$r=4$일 때 $16a \leq 100$인 홀수 a의 값은 $1, 3, 5$로

3개이다.

$r=5$일 때 $25a \leq 100$인 홀수 a의 값은 $1, 3$으로

2개이다.

$6 \leq r \leq 10$일 때 $ar^2 \leq 100$인 홀수 a의 값은 1로

1개이다.

따라서 순서쌍 (a, r)의 개수는

$13+6+3+2+1\times5 = 29$이다.

답 29

230

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

n이 짝수이면

$a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$에서 $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$이고,

n이 홀수이면

$a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$에서 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$이다.

이때 $a_1 = 1$이고 $a_2 = a$라 하자.

$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2a - 1$

$a_4 = a_3 - a_2 = (2a-1) - a = a - 1$

$a_5 = 2a_4 - a_3 = 2(a-1) - (2a-1) = -1$

$a_6 = a_5 - a_4 = -1 - (a-1) = -a$

$a_7 = 2a_6 - a_5 = 2(-a) - (-1) = -2a + 1$

$a_8 = a_7 - a_6 = (-2a+1) - (-a) = -a + 1$

$a_8 = 5$라 주어졌으므로

$-a + 1 = 5$에서 $a = -4$이다.

$\therefore\ a_3 = -9$

답 ①

231

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d > 0)$라 하자.

$a_2 = 3$이므로 $a_5 a_6 = 99$에서

$(3+3d)(3+4d) = 99$,

$12d^2 + 21d + 9 = 99$,

$4d^2 + 7d - 30 = 0$,

$(d-2)(4d+15) = 0$,

$d = 2$이다. $(\because\ d > 0)$

$\therefore\ a_{10} = a_2 + 8d = 3 + 8 \times 2 = 19$

답 ⑤

232

a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a + c = 2b$이다. ……㉠

2^a, 3^b, 4^c이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$2^a \times 4^c = (3^b)^2$이다. ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(3^b)^2 = 3^{2b} = 3^{a+c}$이고, ……㉢

㉡, ㉢에 의하여

$3^a \times 3^c = 2^a \times 4^c$이므로

$\dfrac{3^a}{2^a} = \dfrac{4^c}{3^c}$,

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^a = \left(\dfrac{4}{3}\right)^c$이다.

$\therefore\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{c}{a}} = \dfrac{3}{2}$

답 ②

233

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d \neq 0)$라 하자.

$|a_3 - 5| = |a_7 - 5|$이고 $a_3 \neq a_7$이므로

$a_3 - 5 = -a_7 + 5$에서 $a_3 + a_7 = 10$

$2a + 8d = 10 \qquad \therefore\ a + 4d = 5$ ……㉠

한편 $S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 60$이므로

$2a + 9d = 12$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3$, $d = 2$

$\therefore\ a_{12} = -3 + 11 \times 2 = 19$

답 19

234

$S_5 - S_4 = \dfrac{1}{4a_7}$에서

$a_5 a_7 = \dfrac{1}{4}$, 즉 $(a_6)^2 = \dfrac{1}{4}$이므로 ……㉠

$a_6 = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $a_6 = \dfrac{1}{2}$이다.

$S_{10} - S_9 = \dfrac{16}{a_8}$에서

$a_{10} a_8 = 16$, 즉 $(a_9)^2 = 16$이므로 ……㉡

$a_9 = -4$ 또는 $a_9 = 4$이다.

또한 ㉡÷㉠에서

$r^6 = 64$이므로 $r = -2$ 또는 $r = 2$이다.

이때 $a_3 < a_1 < a_2$를 만족시키려면

$a_1 < 0$, $r = -2$이어야 하므로

$a_6 = \dfrac{1}{2}$, $a_9 = -4$이다.

따라서 $a_1 = \dfrac{a_6}{r^5} = -\dfrac{1}{64}$, $a_2 = a_1 r = \dfrac{1}{32}$이다.

$\therefore\ a_2 - a_1 = \dfrac{3}{64}$

답 ①

235

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 c, 등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_n = a_1 + (n-1)c$, $b_n = b_1 + (n-1)d$이므로

$3a_n + 2b_n = (3a_1 + 2b_1) + (n-1)(3c+2d)$

이때 수열 $\{3a_n + 2b_n\}$은 첫째항이 6이고,

제6항이 16인 등차수열이므로

수열 $\{3a_n + 2b_n\}$의 공차는 2이다.

즉, $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(3a_k + 2b_k) = \frac{20(2\times6+19\times2)}{2} = 500$이고,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(3a_k + 2b_k) = 3\sum_{k=1}^{20}a_k + 2\sum_{k=1}^{20}b_k = 3S_{20} + 2T_{20}$

이므로

$3S_{20} + 2T_{20} = 500$이다.

이때 $S_{20} = 88$이므로

$3\times88 + 2T_{20} = 500$,

$2T_{20} = 236$이다.

$\therefore\ T_{20} = 118$

답 118

236

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n > 0) \\ 2^{a_n} & (a_n \le 0) \end{cases}$$

이므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이다.

$a_4 > 0$에서 $a_5 = 2a_4$이므로 $a_4 = 2$ ($\because a_5 = 4$)

$a_3 > 0$에서 $a_4 = 2a_3$이므로 $a_3 = 1$

$a_2 > 0$에서 $a_3 = 2a_2$이므로 $a_2 = \dfrac{1}{2}$

(i) $a_1 > 0$일 때

$a_2 = 2a_1$이므로 $a_1 = \dfrac{1}{4}$

(ii) $a_1 \le 0$일 때

$a_2 = 2^{a_1}$이므로 $a_1 = -1$

(i), (ii)에서 a_1의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은

$\dfrac{1}{4} + (-1) = -\dfrac{3}{4}$

답 ①

237

$a_1 = 2$이므로 조건 (나)에서

$a_2 = 3\times1 = 3$,

$a_3 = 3\times2 = 6$,

$a_6 = 3\times3 = 9$,

$a_9 = 3\times6 = 18$,

$a_{18} = 3\times9 = 27$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이고 조건 (가)에서

$a_{n+1} > a_n$이므로

$a_9 < a_{10} < a_{11} < \cdots < a_{18}$

이다.

$a_9 = 18$, $a_{18} = 27$이므로

$a_{10} = 19$, $a_{11} = 20$, $a_{12} = 21$, $\cdots$, $a_{17} = 26$이다.

$\therefore\ a_{13} = 22$

답 ③

238

방정식 $f(x) = \left|\dfrac{1}{n}x\right|$의 실근의 개수는

함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = \left|\dfrac{1}{n}x\right|$의 그래프의

교점의 개수와 같다.

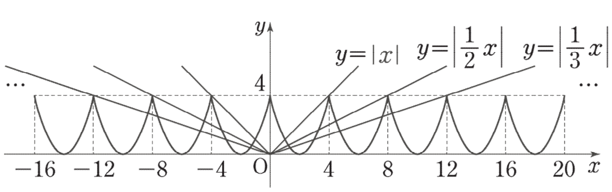
모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$를 만족시키므로

함수 $f(x)$의 그래프의 주기는 4이다.

따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프와

n의 값이 1, 2, 3, $\cdots$일 때의 함수 $y = \left|\dfrac{1}{n}x\right|$의 그래프는

다음 그림과 같다.



이때 두 함수의 그래프의 교점의 개수는

$a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_3 = 12$, $\cdots$이므로

$a_n = 4n\ (n \ge 1)$이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k = \sum_{k=1}^{10}4k = 4\times\frac{10\times11}{2} = 220$

답 ④

239

$a_1 = 4$이고 $a_2 = t$라 하자.

조건 (나)에 의하여

$a_3 = a_1 - 2 = 4 - 2 = 2$,

$a_4 = a_2 - 2 = t - 2$이다.

따라서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 + t + 2 + (t - 2) = 2t + 4$$

이다.

자연수 n에 대하여

$b_n = a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n}$이라 하면

조건 (다)에 의하여 $b_{n+1} = b_n + 4$이다.

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $2t+4$이고 공차가 4인 등차수열이다.

또한 $29 = 1 + 4 \times 7$이므로

$a_{29} = a_1 + 1 \times 7 = 11$이고

$30 = 2 + 4 \times 7$이므로

$a_{30} = a_2 + 1 \times 7 = t + 7$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{n=1}^{7} b_n + a_{29} + a_{30} = \frac{7\{2(2t+4) + 6 \times 4\}}{2} + 11 + (t+7) = 15t + 130 = 120$$

즉, $15t = -10$이므로 $t = -\frac{2}{3}$이다.

$\therefore a_2 = -\frac{2}{3}$

답 ②

240

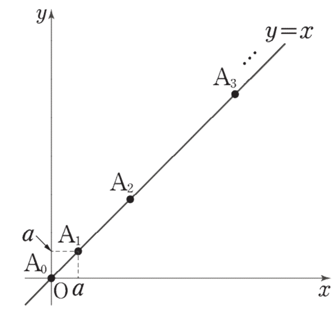
점 A_1의 좌표를 (a, a)라 하고, $a_n = \overline{A_{n-1}A_n}$이라 하자.

점 A_{n+1}은 선분 $A_{n-1}A_n$을 $3:2$로 외분하는 점, 즉

$\overline{A_{n-1}A_{n+1}} : \overline{A_nA_{n+1}} = 3:2$이므로

$a_n : a_{n+1} = 1:2$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}a$이고 공비가 2인 등비수열이다.



따라서

$$\overline{A_1A_9} = a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = \frac{2\sqrt{2}a(2^8 - 1)}{2 - 1} = 510\sqrt{2}a = 15\sqrt{2}$$

이므로 $a = \frac{1}{34}$이다.

즉, 점 A_1의 좌표는 $\left(\frac{1}{34}, \frac{1}{34}\right)$이므로 x좌표와 y좌표의 합은 $\frac{1}{34} + \frac{1}{34} = \frac{1}{17}$이다.

$\therefore p + q = 17 + 1 = 18$

답 18