빠른 정답

어려운 3점 쉬운 4점 **핵** / **심** / **문** / **제**

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

SET 01	001 ①	002 ④	003 3	004 ③	005 12	006 ④	007 16
	008 ⑤	009 ⑤	010 ⑤				
SET 02	011 ③	012 8	013 32	014 2	015 ②	016 9	017 ①
	018 ②	019 ⑤	020 ③				
SET 03	021 ⑤	022 ①	023 13	024 ②	025 11	026 3	027 2
	028 ④	029 ②	030 ②				
SET 04	031 ②	032 ②	033 1	034 ⑤	035 ①	036 6	037 ③
	038 ②	039 6	040 ③				
SET 05	041 ④	042 42	043 30	044 ②	045 ②	046 ④	047 ⑤
	048 ④	049 16	050 ③				
SET 06	051 2	052 ①	053 ③	054 16	055 ②	056 ③	057 ④
	058 ⑤	059 ③	060 ④				
SET 07	061 ②	062 29	063 ⑤	064 ⑤	065 56	066 ①	067 54
	068 ④	069 ③	070 ②				
SET 08	071 ②	072 ①	073 7	074 ②	075 34	076 14	077 ①
	078 ⑤	079 ③	080 ⑤				

Ⅱ. 미분

SET 09	081 ①	082 12	083 28	084 ③	085 ⑤	086 ③	087 ④
	088 ②	089 ④	090 9				
SET 10	091 ③	092 3	093 177	094 ⑤	095 ⑤	096 ⑤	097 ④
	098 1	099 12	100 63				
SET 11	101 ④	102 ⑤	103 ②	104 24	105 ⑤	106 4	107 ②
	108 ⑤	109 ②	110 ③				
SET 12	111 ⑤	112 30	113 ⑤	114 ③	115 ②	116 4	117 ③
	118 ②	119 ①	120 6				
SET 13	121 ⑤	122 ④	123 ②	124 ④	125 ①	126 ①	127 ④
	128 ④	129 ①	130 ②				
SET 14	131 ②	132 ②	133 ②	134 ②	135 26	136 ⑤	137 ④
	138 ①	139 ⑤	140 44				
SET 15	141 ②	142 ④	143 ③	144 ③	145 2	146 ②	147 ④
	148 ②	149 ①	150 ③				
SET 16	151 ③	152 4	153 ③	154 ③	155 ②	156 ③	157 18
	158 ①	159 ①	160 37				

Ⅲ. 적분

SET 17	161 ③	162 ②	163 ⑤	164 ②	165 ③	166 ④	167 19
	168 ③	169 72	170 ④				
SET 18	171 ①	172 40	173 ①	174 ②	175 15	176 ②	177 27
	178 ⑤	179 9	180 ④				
SET 19	181 ②	182 ⑤	183 11	184 32	185 10	186 ③	187 15
	188 ②	189 ③	190 10				
SET 20	191 ②	192 ⑤	193 ⑤	194 10	195 13	196 ③	197 ④
	198 37	199 ①	200 61				
SET 21	201 ②	202 ⑤	203 ②	204 56	205 ④	206 ④	207 ③
	208 54	209 ②	210 12				
SET 22	211 343	212 ②	213 17	214 ②	215 ④	216 ②	217 17
	218 ②	219 ①	220 ③				
SET 23	221 ③	222 ②	223 4	224 ③	225 ⑤	226 ③	227 11
	228 ⑤	229 ④	230 86				
SET 24	231 ④	232 ③	233 7	234 ③	235 8	236 20	237 ②
	238 ①	239 19	240 ③				

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

빠른 정답

부록 핵심 문제 짝기출

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

SET 01	001 ①	002 ①	003 ①	004 ④	005 ④	006 ②	007 ③
	008 ③						
SET 02	009 ①	010 ④	011 6	012 30			
SET 03	013 ⑤	014 ②	015 ⑤	016 ④	017 10	018 13	019 13
	020 ④						
SET 04	021 ②	022 ⑤	023 24	024 ⑤			
SET 05	025 ④	026 ④	027 ⑤	028 ③			
SET 06	029 ②	030 ②	031 ④	032 16	033 ①	034 ⑤	035 10
SET 07	036 ③	037 11	038 ③	039 ④	040 ④		
SET 08	041 ①	042 ①	043 ③	044 27	045 ①	046 ③	047 8

Ⅱ. 미분

SET 09	048 14	049 10	050 ⑤	051 ③	052 ⑤	053 ④	054 ④
	055 27	056 3	057 ①				
SET 10	058 ①	059 ⑤	060 ④	061 ①	062 3	063 ②	064 15
SET 11	065 22	066 16	067 ②	068 28	069 ①	070 ④	071 32
	072 ③						
SET 12	073 ②	074 ①	075 ②	076 ①	077 ⑤	078 ③	
SET 13	079 28	080 ①	081 24	082 ③	083 12		
SET 14	084 ④	085 21	086 ①	087 5	088 ①	089 10	090 ⑤
SET 15	091 ⑤	092 12	093 ②	094 ③			
SET 16	095 ①	096 6	097 97	098 32	099 ②	100 21	

Ⅲ. 적분

SET 17	101 ④	102 ①	103 10	104 4	105 ⑤	106 ①	107 12
SET 18	108 25	109 ①	110 ①	111 ②	112 ④	113 ⑤	114 ④
	115 ①	116 ⑤					
SET 19	117 ③	118 12	119 ①	120 ①	121 2	122 ④	123 ③
SET 20	124 ②	125 ②	126 ④	127 ④	128 ②	129 ③	
SET 21	130 14	131 14	132 6	133 ⑤			
SET 22	134 43	135 ②	136 17	137 40	138 ⑤	139 ⑤	
SET 23	140 17	141 ②	142 ③	143 ②	144 7	145 ①	146 ③
SET 24	147 ①	148 200	149 40	150 8	151 ④	152 39	

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

어삼쉬사 Plus+

정답과 풀이

수학Ⅱ

240제

어삼쉬사를 넘어야 **1등급** 도전이 시작된다.

3

4

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

학습진단표

약점 유형 확인

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 함수의 극한	유형 01 함수의 극한의 뜻	001, 011, 021, 031, 041, 051, 056, 073	/ 8개
	유형 02 함수의 극한의 성질과 유리함수의 극한값 계산	007, 018, 025, 035, 043, 052, 059, 067, 075	/ 9개
	유형 03 무리함수의 극한값 계산	004, 013, 024, 042	/ 4개
	유형 04 미정계수의 결정(1) – $\frac{0}{0}$ 꼴	003, 012, 022, 033	/ 4개
	유형 05 미정계수의 결정(2) – 다항함수의 추론	008, 016, 027, 032, 034, 044, 048, 053, 060, 064, 076, 077	/ 12개
	유형 06 함수의 극한의 활용	009, 014, 030, 045, 057, 068, 078	/ 7개
② 함수의 연속	유형 07 그래프가 주어진 함수의 연속	019, 028, 050, 072	/ 4개
	유형 08 연속함수의 성질과 판정	020, 040, 069, 074, 079	/ 5개
	유형 09 함수의 연속과 미정계수의 결정	002, 005, 006, 017, 023, 026, 029, 037, 038, 046, 047, 049, 054, 055, 058, 061, 062, 063, 071, 080	/ 20개
	유형 10 합성함수의 극한과 연속	036, 065, 066	/ 3개
	유형 11 불연속점의 개수	010, 015, 039, 070	/ 4개

Ⅱ. 미분

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 미분계수와 도함수	유형 01 미분계수의 뜻	091, 104, 124	/ 3개
	유형 02 다항함수의 도함수	084, 095, 116, 140	/ 4개
	유형 03 도함수와 미분계수	085, 107, 117, 151	/ 4개
	유형 04 곱의 미분법	081, 105, 106, 125, 138	/ 5개
	유형 05 미분가능한 함수의 미정계수 결정	086, 097, 126, 142, 157	/ 5개
② 도함수의 활용	유형 06 접선의 방정식	082, 093, 103, 111, 121, 132, 144, 155	/ 8개
	유형 07 접선의 방정식의 활용	109, 135, 149	/ 3개
	유형 08 함수의 증가와 감소	114, 123, 136, 147	/ 4개
	유형 09 함수의 극대와 극소	083, 092, 096, 102, 113, 119, 131, 137, 143, 153, 156, 158	/ 12개
	유형 10 함수의 최대와 최소	087, 115, 128, 154	/ 4개
	유형 11 함수의 그래프 추론(1) – 함수의 식이 주어진 경우	099, 120, 139, 146	/ 4개
	유형 12 함수의 그래프 추론(2) – 함수의 식이 주어지지 않은 경우	100, 108, 129, 145	/ 4개
	유형 13 방정식과 부등식	089, 090, 098, 110, 118, 127, 130, 134, 148, 150, 159, 160	/ 12개
	유형 14 속도와 가속도	088, 094, 101, 112, 122, 133, 141, 152	/ 8개

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅲ. 적분

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
1 부정적분	유형 01 다항함수의 부정적분	161, 175, 223	/ 3개
	유형 02 다항함수의 부정적분의 활용	166, 182, 184, 206, 220, 236	/ 6개
2 정적분	유형 03 다항함수의 정적분 계산	173, 187, 197, 207	/ 4개
	유형 04 정적분의 성질과 계산	162, 168, 171, 193, 203, 212, 228, 230, 239	/ 9개
	유형 05 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분 계산	163, 172, 181, 194, 208, 218, 221, 233	/ 8개
	유형 06 적분과 미분의 관계	167, 170, 176, 178, 186, 188, 191, 198, 202, 209, 215, 217, 224, 227, 232, 237, 240	/ 17개
3 정적분의 활용	유형 07 정적분과 넓이	164, 169, 174, 180, 183, 189, 192, 195, 204, 210, 211, 222, 225, 231, 235	/ 15개
	유형 08 넓이로 해석(1) – 정적분 계산	200, 213, 216, 234	/ 4개
	유형 09 넓이로 해석(2) – 평행이동·대칭 이용	179, 190, 196, 201, 219, 226	/ 6개
	유형 10 속도와 거리	165, 177, 185, 199, 205, 214, 229, 238	/ 8개

풀이 시간 확인

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

SET	SET 01	SET 02	SET 03	SET 04	SET 05	SET 06	SET 07	SET 08
Time								

Ⅱ. 미분

SET	SET 09	SET 10	SET 11	SET 12	SET 13	SET 14	SET 15	SET 16
Time								

Ⅲ. 적분

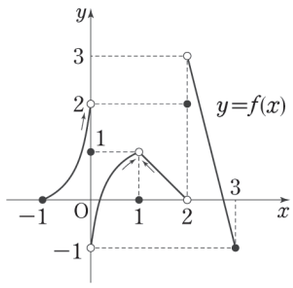
SET	SET 17	SET 18	SET 19	SET 20	SET 21	SET 22	SET 23	SET 24
Time								

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅰ 함수의 극한과 연속

001

주어진 그래프에서



$\lim_{x\to 0-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1} f(x)=1$, $f(2)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x-1}+\lim_{x\to 1} f(x)+f(2)$

$=\frac{\lim_{x\to 0-} f(x)}{\lim_{x\to 0-}(x-1)}+\lim_{x\to 1} f(x)+f(2)$

$=\frac{2}{-1}+1+2=1$

답 ①

002

$g(x)=(2a-1)x-12$, $h(x)=x^2-x+a$라 하면

두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합에서

연속이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=2a^2-a-12$,

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} h(x)=a^2$,

$f(a)=g(a)=2a^2-a-12$에서

$2a^2-a-12=a^2$

$a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=4$

따라서 상수 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

003

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+(1-a)x-a}{x^2+bx}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-a)(x+1)}{x(x+b)}=4$

에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자)→0이므로 (분모)→0이다.

따라서 $-(-1+b)=0$에서 $b=1$이다.

이때 $\lim_{x\to -1}\frac{(x-a)(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-a}{x}=4$에서

$\frac{-1-a}{-1}=4$이므로 $a=3$이다.

$\therefore\ ab=3\times 1=3$

답 3

004

$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{4-x}-2}$라 하면

$\lim_{x\to 0} g(x)=-6$이다.

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{g(x)\times\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{g(x)\times\frac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{x(\sqrt{4-x}+2)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{g(x)\times\frac{-1}{\sqrt{4-x}+2}\right\}$

$=(-6)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

답 ③

005

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$, 즉 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-12}{x-2}=b$이다.

이때 극한값이 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+ax-12)=2a-8=0$에서

$a=4$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+6)=8$$

$\therefore\ a+b=4+8=12$

답 12

006

$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\geq -1) \\ (x+1)(x+b) & (x<-1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to -1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=-1+a$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)$ ($\because\ a\neq 1$)

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고, 함수

$f(x-2)=\begin{cases} x-2+a & (x\geq 1) \\ (x-1)(x-2+b) & (x<1) \end{cases}$

는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(x)=f(x)f(x-2)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $g(x)$가 $x=-1$에서 연속일 때

$\lim_{x\to -1-} g(x)=\lim_{x\to -1+} g(x)=g(-1)$이므로

$$\lim_{x\to -1-} g(x)$$

$$=\lim_{x\to -1-}\{(x+1)(x+b)\times(x-1)(x-2+b)\}$$

$$=0,$$

$$\lim_{x\to -1+} g(x)$$

$$=\lim_{x\to -1+}\{(x+a)\times(x-1)(x-2+b)\}$$

$$=-2(a-1)(b-3),$$

$$g(-1)=(-1+a)\times(-1-1)(-1-2+b)$$

$$=-2(a-1)(b-3)$$

에서 $-2(a-1)(b-3)=0$

$\therefore\ b=3$ ($\because\ a\neq 1$)

(ii) $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$이므로

$$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}\{(x+a)\times(x-1)(x-2+b)\}$$

$$=0,$$

$$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}\{(x+a)\times(x-2+a)\}$$

$$=(a+1)(a-1),$$

$$g(1)=(1+a)\times(1-2+a)=(a+1)(a-1)$$

에서 $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a\neq 1$)

(i), (ii)에서

$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq -1) \\ (x+1)(x+3) & (x<-1) \end{cases}$

$\therefore\ g(0)=f(0)f(-2)=-1\times(-1)=1$

답 ④

007

$g(x)=\frac{f(x)}{x+1}$라 하면

$\lim_{x\to 1} g(x)=12$이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)f(x)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)}{(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{g(x)\times\frac{(x+1)^2}{x+2}\right\}$$

$$=12\times\frac{2^2}{3}=16$$

답 16

008

조건 (가)에서 함수 $f(x)-x^3$은 일차 이하의 다항식이므로

$f(x)-x^3=ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+ax+b$

조건 (나)에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^3+ax+b)=b=0$

이므로 $f(x)=x^3+ax$이고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+a)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+a)=a=-4$$

에서 $f(x)=x^3-4x$이다.

$\therefore\ f(3)=15$

답 ⑤

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

009

점 $A(t, t)$에서

직선 $y=t$와 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점은 $B(t^2, t)$,

직선 $x=t$와 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점은 $C(t, \sqrt{t})$이므로

$\overline{AB}=t^2-t$, $\overline{AC}=t-\sqrt{t}$이다.

$$\therefore \lim_{t\to 1+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{t\to 1+}\frac{t-\sqrt{t}}{t^2-t}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-\sqrt{t})(t+\sqrt{t})}{(t^2-t)(t+\sqrt{t})}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{1}{t+\sqrt{t}}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

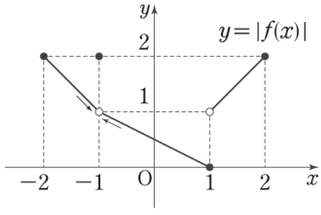
010

ㄱ. $|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (f(x)<0)\\ f(x) & (f(x)\geq 0)\end{cases}$이고

$-2\leq x<-1$일 때 $f(x)<0$

$-1\leq x\leq 2$일 때 $f(x)\geq 0$이므로

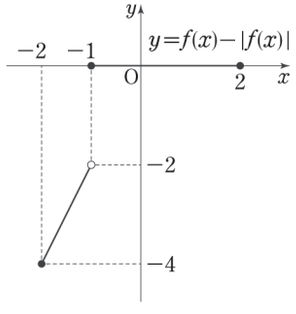
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다. 참고①



$\therefore \lim_{x\to -1}|f(x)|=1$ (참)

ㄴ. $y=f(x)-|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\geq 0)\end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)-|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$\lim_{x\to 1}\{f(x)-|f(x)|\}=f(1)-|f(1)|$이므로

함수 $y=f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는

$x=-1$, $x=1$에서만 불연속이고

함수 $f(x)-|f(x)|$는 $x=-1$에서만 불연속이므로

함수 $f(x)\{f(x)-|f(x)|\}$는 $x=-1$ 또는

$x=1$에서 연속성을 확인해야 한다. 참고②

x	$f(x)$	$f(x)-\|f(x)\|$	$f(x)\{f(x)-\|f(x)\|\}$
$-1-$	-1	-2	2
-1	2	0	0
$-1+$	1	0	0

위의 표에서

$\lim_{x\to -1-}f(x)\{f(x)-|f(x)|\}$

$\neq \lim_{x\to -1+}f(x)\{f(x)-|f(x)|\}$이므로

$x=-1$에서 불연속이다.

x	$f(x)$	$f(x)-\|f(x)\|$	$f(x)\{f(x)-\|f(x)\|\}$
$1-$	0	0	0
1	0	0	0
$1+$	1	0	0

위의 표에서

$\lim_{x\to 1}f(x)\{f(x)-|f(x)|\}=f(1)\{f(1)-|f(1)|\}$

이므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)\{f(x)-|f(x)|\}$는 $x=-1$에서만

불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고①

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는
함수 $y=f(x)$의 그래프의 $f(x)<0$인 부분을
x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

참고②

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속인 경우
항상 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
반면 두 함수 중 하나라도 $x=a$에서 불연속이면
함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속인지 아닌지를 확인하기 위해서는
$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)=\lim_{x\to a+}f(x)g(x)$인지를 확인해야 한다.
특히 $\lim_{x\to a-}f(x)$, $f(a)$, $\lim_{x\to a+}f(x)$의 값이 존재하지만
$x=a$에서 연속이 아닐 때는 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)=0$이면
항상 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이 된다.
($\because \lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)\times 0=0$,
$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}f(x)\times 0=0$,
$f(a)g(a)=f(a)\times 0=0$)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

011

$x+1=t$라 하면 $x\to-1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x+1)=0$

또한 $x-1=s$라 하면 $x\to0+$일 때 $s\to-1+$이므로

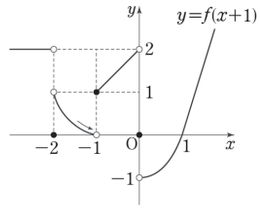
$\lim\limits_{x\to0+}f(x-1)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to-1-}f(x+1)+\lim\limits_{x\to0+}f(x-1)=1$

답 ③

참고

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는



함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로
$\lim\limits_{x\to-1-}f(x+1)=0$임을 알아낼 수도 있다.
마찬가지 방법으로 함수 $y=f(x-1)$의 그래프는
함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같음을 이용하여
$\lim\limits_{x\to0+}f(x-1)=1$임을 알아낼 수 있다.

012

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-a}{x^2-1}=4$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to1}(x^n-a)=1-a=0$이므로 $a=1$이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1}{x+1}=\frac{n}{2}$$

$\dfrac{n}{2}=4$에서 $n=8$

$\therefore\ an=1\times8=8$

답 8

013

$8x-32\le f(x)\le x^2-16$이고

$x>4$일 때 $\sqrt{x}-2>0$이므로

$$\frac{8x-32}{\sqrt{x}-2}\le\frac{f(x)}{\sqrt{x}-2}\le\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x\to4+}\frac{8x-32}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4+}\frac{8(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to4+}\{8(\sqrt{x}+2)\}=32$$

$$\lim_{x\to4+}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4+}\frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to4+}(x+4)(\sqrt{x}+2)=32$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to4+}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-2}=32$$

답 32

014

$x=0$일 때,

$y=|0-t|=t$이므로 $\mathrm{A}(0,\ t)$

$y=0$일 때,

$|x^2-t|=0,\ x^2=t\qquad\therefore\ x=\pm\sqrt{t}$

$\therefore\ \mathrm{B}(-\sqrt{t},\ 0),\ \mathrm{C}(\sqrt{t},\ 0)$

즉, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$l(t)=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$

$=\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2+t}+2\sqrt{t}$

$=2(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t})$

삼각형 ABC의 넓이는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AO}}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{t}\times t=t\sqrt{t}$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times l(t)}{S(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times2(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t})}{t\sqrt{t}}$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}}{t}$$

$$=2\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}}\right)=2$$

답 2

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

015

두 함수 $y=x^2+ax+b$, $y=2x$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=3$에서 불연속이다. 즉, $k=-3$ 또는 $k=3$이어야 한다.

(i) $k=-3$일 때

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속, 즉

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)=f(3)$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(x^2+ax+b)=9+3a+b$,

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+} 2x=6$,

$f(3)=9+3a+b$에서

$9+3a+b=6 \quad \therefore\ 3a+b=-3$

그런데 위의 식을 만족시키는 두 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ii) $k=3$일 때

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속, 즉

$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3+} f(x)=f(-3)$이므로

$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3-} 2x=-6$,

$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3+}(x^2+ax+b)=9-3a+b$,

$f(-3)=9-3a+b$에서

$9-3a+b=-6 \quad \therefore\ b=3a-15$ ……㉠

이때 b는 자연수, 즉 $b>0$이므로

$a\geq 6$ ……㉡

이고, $f(3)\neq \lim_{x\to 3+} f(x)$를 만족시키므로

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이 된다.

(i), (ii)에서 $k=3$이고

$a+b=a+(3a-15)$ ($\because$ ㉠)

$=4a-15$

$\geq 4\times 6-15$ ($\because$ ㉡)

$=9$

따라서 $a+b$의 최솟값은 9이다.

답 ②

016

방정식 $f(x)=x+2$의 세 실근이 -1, 0, 2이므로

$f(x)-x-2=kx(x+1)(x-2)$ (단, k는 양수)

라 하자.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{kx(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{kx(x+1)}$$

$$=\frac{1}{6k}=\frac{1}{2}$$

이므로 $k=\frac{1}{3}$이고

$f(x)=\frac{1}{3}x(x+1)(x-2)+x+2$이다.

$\therefore\ f(3)=9$

답 9

017

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)=1$을 만족시킨다.

이때 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=1$에서

극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2+}(a\sqrt{x+2}+b)=2a+b=0$에서

$b=-2a$이므로

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=1$에서 $a=4$, $b=-8$

$\therefore\ a+b=-4$

답 ①

018

$\lim_{x\to -1}(x-1)f(x+1)=3$에서

$x+1=t$라 하면 $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to -1}(x-1)f(x+1)=\lim_{t\to 0}(t-2)f(t)=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\{(x-2)f(x)\}^2\times\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}\right]$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}(x-2)f(x)\right\}^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

$$=3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

답 ②

019

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1+}g(x)=g(-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립해야 한다.

$t=x+2$라 하면 $x\to -1-$일 때 $t\to 1-$,

$x\to -1+$일 때 $t\to 1+$이므로

$$\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)+k\lim_{x\to -1-}f(x+2)$$

$$=\lim_{x\to -1-}f(x)+k\lim_{t\to 1-}f(t)$$

$$=2+k\times(-1)=-k+2$$

$$\lim_{x\to -1+}g(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)+k\lim_{x\to -1+}f(x+2)$$

$$=\lim_{x\to -1+}f(x)+k\lim_{t\to 1+}f(t)$$

$$=-2+k\times 1=k-2$$

$g(-1)=f(-1)+kf(1)=0$

이므로 ㉠에 대입하면

$-k+2=k-2=0$

$\therefore\ k=2$

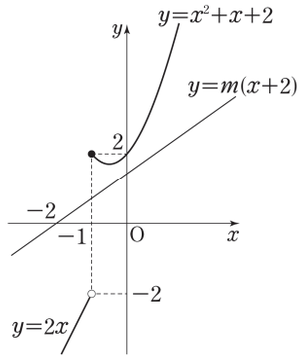
답 ⑤

020

$y=x^2+x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 직선 $y=m(x+2)$가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때의 m의 값은

$2=m(-1+2)$에서 $m=2$

(ii) 직선 $y=m(x+2)$가 함수 $y=x^2+x+2$의 그래프와 접할 때의 m의 값은

$x^2+x+2=m(x+2)$에서

$x^2+(1-m)x+2(1-m)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$에서

$(1-m)^2-8(1-m)=0$

$m^2+6m-7=0,\ (m+7)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1\ (\because\ m>0)$

(iii) 직선 $y=m(x+2)$가 점 $(-1,\ -2)$를 지날 때의 m의 값은 $-2=m(-1+2)$에서 $m=-2$

(i), (ii), (iii)에서 $g(m)=\begin{cases}2 & (m>1)\\ 1 & (m=1)\\ 0 & (-2\le m<1)\\ 1 & (m<-2)\end{cases}$

($m=2$에서 $g(m)$이 불연속이 아님에 주의해야 한다.

$m>2$일 때 $y=f(x)$의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.)

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=-2$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $h(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -2-}h(x)=\lim_{x\to -2+}h(x)=h(-2)$이므로

$1\times(4-2a+b)=0\times(4-2a+b)$

$\therefore\ 4-2a+b=0$ $\cdots\cdots ㉠$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)=h(1)$이므로

$0\times(1+a+b)=2\times(1+a+b)$

$\therefore\ 1+a+b=0$ $\cdots\cdots ㉡$

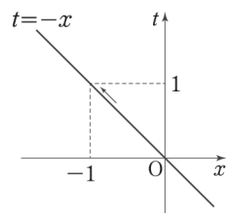
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore\ a-b=3$

답 ③

021

$t=-x$라 하자.



$x\to -1+$일 때 $t\to 1-$이므로

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\lim_{x\to -1+} f(-x) = \lim_{t\to 1-} f(t) = 2$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to -1+} f(-x) = 1+2 = 3$

답 ⑤

022

$\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+ax+b}-x}{x-2} = 2$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $\sqrt{4+2a+b}-2=0$이므로 $b=-2a$ ……㉠

$\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+ax-2a}-x}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-2a-x^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+ax-2a}+x)}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+ax-2a}+x)}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{a}{\sqrt{x^2+ax-2a}+x} = 2$

$\dfrac{a}{4} = 2$에서 $a=8$, $b=-16$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=-8$

답 ①

023

$x\neq 2$일 때 $f(x) = \dfrac{x^3+x+k}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x+k}{x-2} = f(2)$

즉, 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 2}(x^3+x+k)=0$에서

$10+k=0 \quad \therefore k=-10$

$\therefore f(2) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x-10}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+5)}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+5) = 13$

답 13

024

함수 $f(x)$는 공역이 양의 실수 전체의 집합이므로

모든 실수 x에 대하여

$\sqrt{x^2-x+1} \le f(x) \le \sqrt{x^2-x+3}$

$\therefore x-\sqrt{x^2-x+3} \le x-f(x) \le x-\sqrt{x^2-x+1}$

$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+3})$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-x+3})(x+\sqrt{x^2-x+3})}{x+\sqrt{x^2-x+3}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{x-3}{x+\sqrt{x^2-x+3}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$

$= \dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-x+1})(x+\sqrt{x^2-x+1})}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$= \dfrac{1}{2}$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\{x-f(x)\} = \dfrac{1}{2}$

답 ②

025

$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = \dfrac{4}{3}$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$, 즉 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$이다.

$\lim_{x\to 1} \dfrac{xf(x)-f(x)}{\{f(x)\}^2-4} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)f(x)}{\{f(x)-2\}\{f(x)+2\}}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{f(x)-2} \times \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{f(x)+2}$

$= \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{8}$

$\therefore p+q=8+3=11$

답 11

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

026

함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-}|f(x)|=\lim_{x\to a+}|f(x)|=|f(a)|$를 만족시킨다.

$\lim_{x\to a-}|f(x)|=|a+1|$,

$\lim_{x\to a+}|f(x)|=|f(a)|=|a^2-1|$이므로

$|a+1|=|a^2-1|$

$\therefore\ a+1=\pm(a^2-1)$

(i) $a+1=a^2-1$인 경우

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a+1=-(a^2-1)$인 경우

$a^2+a=0$, $a(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=0$

(i), (ii)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 값은 -1, 0, 2로 3개이다.

답 3

027

조건 (가)에서 함수 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로

$f(x)-2x^3=6x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=2x^3+6x^2+ax+b$

한편 조건 (나)에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이다.

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(2x^3+6x^2+ax+b)=a+b+8=0$

$\therefore\ b=-a-8$, $f(x)=(x-1)(2x^2+8x+a+8)$

이때 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{2x^2+8x+a+8}$$

$$=\frac{3}{a+18}=\frac{1}{5}$$

이므로 $a=-3$, $b=-5$이고

$f(x)=2x^3+6x^2-3x-5$이다.

$\therefore\ f(-1)=2$

답 2

028

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)$

$=f(a)f(0)$ ……㉠

이 성립해야 한다.

$t=x-a$라 하면

$\lim_{x\to a-}f(x-a)=\lim_{t\to0-}f(t)=0$,

$\lim_{x\to a+}f(x-a)=\lim_{t\to0+}f(t)=3$, $f(0)=3$이므로

㉠에 대입하면

$\lim_{x\to a-}f(x)\times0=\lim_{x\to a+}f(x)\times3=f(a)\times3$

즉, $f(a)=\lim_{x\to a+}f(x)=0$이어야 한다.

따라서 그림에서 이를 만족시키는 a의 값은 1이다. TIP

답 ④

TIP

$\lim_{x\to2+}f(x)=0$이지만 $f(2)\neq0$이므로 $a\neq2$이다.

029

함수 $f(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이고,

함수 $g(x)$는 $x\neq b$인 모든 실수 x에서 연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$x=0$, $x=b$ $(b>0)$일 때 각각 연속이어야 한다.

(i) $x=0$일 때

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$
$0-$	a	-3	$-3a$
$0+$	2	-3	-6
0	2	-3	-6

위의 표에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$-3a=-6$이어야 한다.

즉, $a=2$이어야 한다.

(ii) $x=b$일 때

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$
$b-$	2	-3	-6
$b+$	2	b^2-5b+3	$2(b^2-5b+3)$
b	2	b^2-5b+3	$2(b^2-5b+3)$

위의 표에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=b$ $(b>0)$에서

연속이려면 $2(b^2-5b+3)=-6$이어야 한다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$b^2-5b+3=-3,\ b^2-5b+6=0$

$(b-2)(b-3)=0$

$\therefore\ b=2$ 또는 $b=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 2),\ (2,\ 3)$으로 2개이다.

답 ②

030

두 점 P, Q의 좌표가

$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t+1}-1),\ \mathrm{Q}\left(t,\ -\dfrac{t}{t+1}\right)$이므로

$A(t)=\dfrac{1}{2}t\left|\sqrt{t+1}-1\right|,$

$B(t)=\dfrac{1}{2}t\left|-\dfrac{t}{t+1}\right|$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to0+}\dfrac{A(t)}{B(t)}$

$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\frac{1}{2}t\left|\sqrt{t+1}-1\right|}{\frac{1}{2}t\left|-\frac{t}{t+1}\right|}$

$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\sqrt{t+1}-1}{\frac{t}{t+1}}\ (\because\ t>0)$

$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{(t+1)(\sqrt{t+1}-1)}{t}$

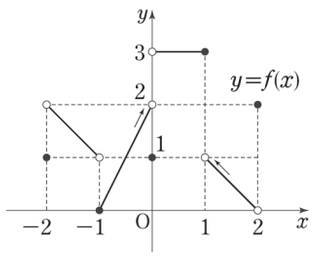
$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{(t+1)(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}{t(\sqrt{t+1}+1)}$

$=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{t+1}{\sqrt{t+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

답 ②

031

주어진 그래프에서



$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$이므로 $a=1$이다.

한편 $\lim\limits_{x\to b-}f(x-1)=2$에서 $x-1=t$라 하면

$x\to b-$일 때, $t\to(b-1)-$이므로

$\lim\limits_{x\to b-}f(x-1)=\lim\limits_{t\to(b-1)-}f(t)=2$

이때 그림에서 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=2$이므로

$b-1=0$에서 $b=1$이다.

$\therefore\ a-b=1-1=0$

답 ②

032

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$a=0,\ c=0$

또한 $f(2)=-10$이므로

$8+2b=-10\qquad\therefore\ b=-9$

따라서 $f(x)=x^3-9x$이므로

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-9x}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x(x+3)(x-3)}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-3}x(x-3)$

$=-3\times(-6)=18$

답 ②

033

$f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-ax^2+x-a}{x^2-a^2}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^2+1)}{(x-a)(x+a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+1}{x+a}=\dfrac{a^2+1}{a+a}$

$=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

이때 $a>0,\ \dfrac{1}{a}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\dfrac{1}{a}\ge2\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}=2$

(단, 등호는 $a=\dfrac{1}{a}=1$일 때 성립한다.)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(a)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq \frac{1}{2}\times 2=1$이므로

함수 $f(a)$의 최솟값은 1이다.

답 1

034

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$에서

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{x-n}=24$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $f(n)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x-n$을 인수로 갖는다.

$f(x)=3(x-n)(x+k)$ (단, k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{x-n}=\lim_{x\to n}\frac{3(x-n)(x+k)}{x-n}$$
$$=\lim_{x\to n}\{3(x+k)\}$$
$$=3(n+k)=24$$

이므로 $n+k=8$

$\therefore\ k=8-n$ ……㉠

$f(2n)=195$이므로 $3(2n-n)(2n+k)=195$

$n(2n+k)=65$, $n(2n+8-n)=65$ ($\because$ ㉠)

$n^2+8n-65=0$, $(n+13)(n-5)=0$

$\therefore\ n=5$ ($\because$ n은 자연수)

이를 ㉠에 대입하면 $k=3$

따라서 $f(x)=3(x-5)(x+3)$이므로

$f(-n)=f(-5)$

$=3\times(-10)\times(-2)=60$

답 ⑤

035

조건 (나)에서 $h(x)=3f(x)-g(x)$라 하면

$g(x)=3f(x)-h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=4$이다.

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)}=0$이고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{4x^2+g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\{3f(x)-h(x)\}}{4x^2+\{3f(x)-h(x)\}}$

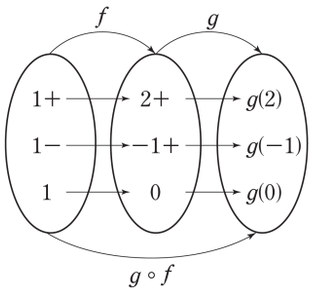
$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2\left\{3-\frac{h(x)}{f(x)}\right\}}{4\times\frac{x^2}{f(x)}+\left\{3-\frac{h(x)}{f(x)}\right\}}$

$=\frac{1-2\times 3}{0+3}=-\frac{5}{3}$

답 ①

036

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로



위의 그림에서 $g(2)=g(-1)=g(0)$이어야 한다.

따라서 $g(0)=3$이므로

$g(-1)+g(2)=g(0)+g(0)=3+3=6$

답 6

037

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이고

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x+2}{f(x)} & (x<1)\\ \dfrac{3x^4+2x^2-1}{f(x)} & (x\geq 1)\end{cases}$$ 이므로

$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{-x^2+x+2}{f(x)}=\frac{2}{f(1)}$, TIP

$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{3x^4+2x^2-1}{f(x)}=\frac{4}{f(1)}$이다.

주어진 조건 $\lim_{x\to 1-}g(x)+\lim_{x\to 1+}g(x)=4$에서

$\frac{2}{f(1)}+\frac{4}{f(1)}=4$

$\therefore\ f(1)=\frac{3}{2}$

답 ③

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

TIP

$f(x)g(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 & (x<1)\\ 3x^4+2x^2-1 & (x\geq 1)\end{cases}$에서

$f(1)g(1)=4$이므로 $f(1)\neq 0$이다.

따라서 $\dfrac{2}{f(1)}$의 값이 정의된다.

038

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=4a-4b+4$,

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=4$,

$f(2)=f(0)=4$에서

$4a-4b+4=4 \quad \therefore\ a=b$

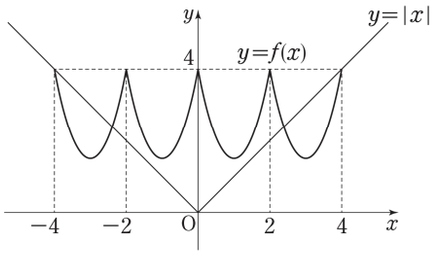
$\therefore\ f(x)=ax^2-2ax+4$

$=a(x-1)^2-a+4$

이때 $0\leq x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선

$x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (나)에 의하여

$-4\leq x\leq 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=|x|$의 서로 다른 실근의 개수가

4 이하가 되려면 $0\leq x<2$에서 방정식 $f(x)=x$가

실근을 갖지 않아야 한다.

$ax^2-2ax+4=x$에서 $ax^2-(2a+1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$(2a+1)^2-16a<0$, $4a^2-12a+1<0$

$\therefore\ \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

이때 a는 자연수이므로 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=b=2$일 때

$2+2=4$

답 ②

039

함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속인 다항함수이므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 불연속인 경우는

함수 $f(x)$가 불연속인 경우와

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 함숫값을 갖지 않는 $f(x)=0$인 경우를

확인해야 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 불연속인 경우

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=-4$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=f(2)=-1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{4}$, $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(2)}{f(2)}=3$이므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ii) $f(x)=0$인 경우

$x\leq 2$일 때 $1-x=0$에서 $x=1$

$x>2$일 때 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0$에서

$x=3$이므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 불연속이 되는 모든 x의 값의

합은 $2+1+3=6$이다.

답 6

040

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(x^2+x-2)=-2$ (참)

ㄴ. $a=1$일 때, $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (|x|<1)\\ x^2+x-2 & (|x|\geq 1)\end{cases}$이다.

x	$f(x)$	$\{f(x)\}^2$
$-1-$	-2	4
-1	-2	4
$-1+$	2	4

$\lim\limits_{x\to -1}\{f(x)\}^2=\{f(-1)\}^2$이므로

함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)\{f(x)+2\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이면 된다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

x	$f(x)$	$f(x)+2$	$f(x)\{f(x)+2\}$
$-1-$	-2	0	0
-1	-2	0	0
$-1+$	$a+1$	$a+3$	$(a+1)(a+3)$

x	$f(x)$	$f(x)+2$	$f(x)\{f(x)+2\}$
$1-$	$a-1$	$a+1$	$(a-1)(a+1)$
1	0	2	0
$1+$	0	2	0

$(a+1)(a+3)=0$에서 $a=-3$ 또는 $a=-1$이고

$(a-1)(a+1)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$이므로

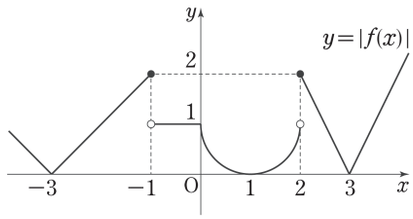
함수 $f(x)\{f(x)+2\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 a의 값은 $a=-1$로 1개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

041

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x\to -1+}|f(x)|+\lim_{x\to 0}|f(x)|+|f(2)|$$

$$=1+1+2=4$$

답 ④

042

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+6x}-bx)=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2+6x)-b^2x^2}{\sqrt{ax^2+6x}+bx}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b^2)x^2+6x}{\sqrt{ax^2+6x}+bx}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b^2)x+6}{\sqrt{a+\frac{6}{x}}+b}=\frac{1}{2}$$

이므로 $a-b^2=0$, ……㉠

$$\frac{6}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{2}$$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{|b|+b}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{6}{2b}=\frac{1}{2}$ TIP

$\therefore\ b=6,\ a=36$

$\therefore\ a+b=42$

답 42

TIP

$\frac{6}{|b|+b}=\frac{1}{2}$에서

$b\le 0$이면 $|b|+b=(-b)+b=0$,

$b>0$이면 $|b|+b=b+b=2b$

이므로 $b>0$이어야 한다.

043

$x-2=t$라 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t+2)}{t}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x+2)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{x}{f(x+2)}\right\}$$

$$=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 20a=20\times\frac{3}{2}=30$$

답 30

044

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2}f(x)\neq 0$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+x-2}{f(x)-x+2}=\frac{f(2)}{f(2)}=1\neq\frac{4}{3}$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$이므로

$x-2$는 이차식 $f(x)$의 인수이다.

$f(x)=(x-2)(x-a)$ (단, a는 상수)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+x-2}{f(x)-x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-a)+(x-2)}{(x-2)(x-a)-(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-a)+1}{(x-a)-1}$$

$$=\frac{3-a}{1-a}=\frac{4}{3}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$4-4a=9-3a$에서 $a=-5$이므로

$f(x)=(x-2)(x+5)$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right)\left(\frac{1}{x}+5\right)$

$=(-2)\times 5=-10$

답 ②

045

$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times t=\frac{3}{2}t$

$S_2=\frac{1}{2}\times 4\times\left(\frac{1}{2}t^3+at\right)=t^3+2at$

$\lim_{t\to 0+}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^3+2at}{\frac{3}{2}t}=\lim_{t\to 0+}\frac{2(t^2+2a)}{3}$

$=\frac{4}{3}a=4$

$\therefore a=3$

답 ②

046

함수 $f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ 2x-a^2 & (x\geq 1)\end{cases}$에서

$\{f(x)\}^2=\begin{cases} a^2x^2 & (x<1) \\ 4x^2-4a^2x+a^4 & (x\geq 1)\end{cases}$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=a$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)=2-a^2$에서

$a\neq 2-a^2$이어야 한다. 즉,

$a^2+a-2\neq 0$, $(a+2)(a-1)\neq 0$

$\therefore a\neq -2$, $a\neq 1$ ……㉠

한편 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=a^2$,

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2=4-4a^2+a^4$

에서 $a^2=4-4a^2+a^4$이어야 한다. 즉,

$a^4-5a^2+4=0$, $(a^2-1)(a^2-4)=0$

$(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ (∵ ㉠)

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-1+2=1$

답 ④

047

$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$에서

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속일 때

$f(-1)=4>0$이므로

$\lim_{x\to -1-} g(x)=\lim_{x\to -1+} g(x)=g(-1)$이려면

$\lim_{x\to -1-} g(x)=\lim_{x\to -1-}(x+5)=4$,

$\lim_{x\to -1+} g(x)=\lim_{x\to -1+} bx(x-3)=4b$,

$g(-1)=f(-1)=4$에서

$4=4b$ $\therefore b=1$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$0<x\leq 1$에서 $f(x)<0$ (∵ $b=1$)이므로

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)=0$이다.

이때 $\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)\leq 0$이어야 하므로

$2+a\leq 0$에서 $a\leq -2$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $a=-2$, $b=1$일 때

$-2+1=-1$

답 ⑤

048

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x-1)f(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=2$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(x-1)f(x+1)$은 $(x+1)^2$을 인수로 가져야 한다.

(i) $f(x-1)$이 $(x+1)^2$을 인수로 갖는 경우

$f(x-1)=(x+1)^2$이므로

$f(x)=(x+2)^2$, $f(x+1)=(x+3)^2$이다.

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x-1)f(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x+3)^2}{(x-1)(x+1)^2}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)^2}{x-1}=-2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ii) $f(x+1)$이 $(x+1)^2$을 인수로 갖는 경우

$f(x+1)=(x+1)^2$이므로

$f(x)=x^2$, $f(x-1)=(x-1)^2$이다.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x-1)f(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$$

(iii) $f(x-1)$, $f(x+1)$이 모두 $x+1$을 인수로 갖는 경우

$f(x-1)=(x+1)(x+k)$ (단, $k\neq 1$)이라 하면

$f(x+1)=(x+3)(x+2+k)$이므로

$2+k=1$, $k=-1$이어야 한다.

따라서

$f(x-1)=(x-1)(x+1)$,

$f(x+1)=(x+1)(x+3)$,

$f(x)=x(x+2)$이다.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x-1)f(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)^2(x+3)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$$

(i)~(iii)에서 $f(x)=x(x+2)$이다.

$\therefore\ f(4)=24$

답 ④

049

함수 $g(x)=\begin{cases} ax\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x<a) \\ f(x) & (x\geq a)\end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=6$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to -2}ax\left(x+\frac{3}{2}\right)\neq 0$이므로

$a<-2$이고 $\lim_{x\to -2}f(x)=0$, 즉 $f(-2)=0$이어야 한다.

$f(x)=(x+2)(x^2+px+q)$(단, p, q는 상수)라 하자.

$$\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+px+q)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x^2+px+q)$$

$$=4-2p+q=6$$

이므로 $2p-q=-2$ ……㉠

또한 $g(-1)=f(-1)=2$이므로

$1-p+q=2$에서 $p-q=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=0$

$\therefore\ f(x)=x(x+2)(x-1)$

이때 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$a^2\left(a+\frac{3}{2}\right)=a(a+2)(a-1)$

$a^2+\frac{3}{2}a=a^2+a-2$에서 $a=-4$ ($\because\ a\neq 0$)

$\therefore\ a^2=16$

답 16

050

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이고,

이차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$가 $x=0$, $x=1$에서 연속이면 된다.

x	$f(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)\{f(x)-g(x)\}$
$0+$	3	$3-g(0)$	$3\{3-g(0)\}$
$0-$	-3	$-3-g(0)$	$3\{3+g(0)\}$
0	-3	$-3-g(0)$	$3\{3+g(0)\}$

위의 표에서 $3\{3-g(0)\}=3\{3+g(0)\}$이어야 하므로

$3-g(0)=3+g(0)$

$\therefore\ g(0)=0$

x	$f(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)\{f(x)-g(x)\}$
$1+$	4	$4-g(1)$	$4\{4-g(1)\}$
$1-$	4	$4-g(1)$	$4\{4-g(1)\}$
1	0	$-g(1)$	0

위의 표에서 $4\{4-g(1)\}=0$이어야 한다.

$\therefore\ g(1)=4$

따라서 $g(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$g(0)=b=0$,

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$g(1)=1+a+b=4$에서 $a=3$이므로

$g(x)=x^2+3x$이다. $\therefore\ g(5)=40$

답 ③

051

주어진 그래프에서 좌극한값과 우극한값이 다른 점은

$x=-1$, $x=0$, $x=1$이므로 이 세 점에서

주어진 부등식을 만족시키는지 확인해 보자.

(i) $x=-1$에서

$\lim_{x\to -1-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x) < \lim_{x\to a+} f(x)$

(ii) $x=0$에서

$\lim_{x\to 0-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x) > \lim_{x\to a+} f(x)$

(iii) $x=1$에서

$\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x) < \lim_{x\to a+} f(x)$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식을 만족시키는 상수 a의 값은

-1, 1로 2개이다.

답 2

052

$\lim_{x\to 1} g(x)=\infty$에서 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{g(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+2g(x)\}=3$에서

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+2g(x)\}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{g(x)}=0$

$\therefore\ \lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}+2\right\}=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\times\frac{f(x)}{g(x)}-1}{\frac{f(x)}{g(x)}+3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left\{\frac{f(x)}{g(x)}+2\right\}-5}{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}+2\right\}+1}$$

$$=\frac{2\times 0-5}{0+1}=-5$$

답 ①

053

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=8$에서 극한값이 존재하고 $x\to -1$일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)=0$에서 $f(-1)=0$ ……㉠

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)}{x-2}=8$에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x+1)=0$에서 $f(3)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=(x+1)(x-3)(ax+b)$ (a, b는 상수)

라 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-3)(ax+b)$$

$$=-4(-a+b)=8$$

이므로 $b=a-2$ ……㉢

또한

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)\{a(x+1)+(a-2)\}}{x-2}\ (\because\ ㉢)$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)(ax+2a-2)$$

$=4(4a-2)=8$

이므로 $a=1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-3)(x-1)$이므로

$f(4)=5\times 1\times 3=15$

답 ③

054

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고

함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

실수 전체의 집합에서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 연속이기 위해서는

$x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\frac{f(1)}{g(1)}=f(1)$에서 극한값이

존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $f(x)=(x-1)(x-a)$ (단, a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-a)$$
$$=1-a=0\ (\because\ f(1)=0)$$

에서 $a=1$, $f(x)=(x-1)^2$이다.

$\therefore\ f(5)=16$

답 16

055

두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=x$의 실근과 같다.

$(x-2)^2=x$, $x^2-5x+4=0$,

$(x-1)(x-4)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$이므로

$$g(x)=\begin{cases}a-(x-2)^2 & (1\le x\le 4)\\ b(x-3)^2+1 & (x<1 \text{ 또는 } x>4)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$, $x=4$에서 연속이어야 한다.

$g(1)=\lim_{x\to1+}g(x)=a-1$이고

$\lim_{x\to1-}g(x)=4b+1$이므로

$a-1=4b+1$, $a-4b=2$ ……㉠

$g(4)=\lim_{x\to4-}g(x)=a-4$이고

$\lim_{x\to4+}g(x)=b+1$이므로

$a-4=b+1$, $a-b=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=1$

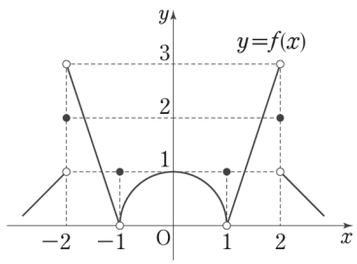
$\therefore\ a+b=6+1=7$

답 ②

056

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=0+3=3$

답 ③

057

점 M은 선분 OA의 중점이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{0+t}{2},\ \frac{0+\frac{2}{t}}{2}\right)$$

$\therefore\ \mathrm{M}\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{t}\right)$

직선 l은 기울기가 -2이고 점 M을 지나는 직선이므로

$y-\frac{1}{t}=-2\left(x-\frac{t}{2}\right)$

$\therefore\ y=-2x+t+\frac{1}{t}$

두 점 P, Q는 각각 직선 l의 x절편, y절편이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\overline{\mathrm{OQ}}=t+\frac{1}{t}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}=2\overline{\mathrm{OP}}$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{t\times\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\times2\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}\times2\overline{\mathrm{OP}}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(2t-1)\overline{\mathrm{OP}}}{2\overline{\mathrm{OP}}^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-1}{2\overline{\mathrm{OP}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-1}{t+\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=2$$

답 ④

058

함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-a-}f(x)=\lim_{x\to-a+}f(x)=f(-a)$를 만족시킨다.

$x\ne-a$일 때, $f(x)=\frac{(x-1)|x+a|}{x+a}$이므로

$$\lim_{x\to-a-}f(x)=\lim_{x\to-a-}\frac{-(x-1)(x+a)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to-a-}(-x+1)=a+1$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\lim_{x\to -a+} f(x)=\lim_{x\to -a+}\frac{(x-1)(x+a)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a+}(x-1)=-a-1$$

즉, $a+1=-a-1$이므로 $a=-1$이다.

따라서 $(x-1)f(x)=(x-1)|x-1|$의 양변에

$x=-1$을 대입하면

$-2f(-1)=-2\times 2,\ f(-1)=2$

$\therefore\ f(a)=f(-1)=2$

답 ⑤

059

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f(x-1)}$의 값이 존재하고 $f(0)=0$에 의하여

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore\ f(1)=0$

마찬가지 방법으로 $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{f(x-1)}$ $(n=2,\ 3)$의 값이

존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

$\therefore\ f(2)=0,\ f(3)=0$

따라서 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$에서

$f(x)$는 $x,\ x-1,\ x-2,\ x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)$ (단, a는 0이 아닌 상수)

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(-x)}{f(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(-x)(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{a(x+2)(x+1)x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax(x+1)(x+2)(x+3)}{ax(x+1)(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x-1}=-3$$

답 ③

060

조건 (가)에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+ax}{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{a}{t}}{\frac{f(t)}{t^2}-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+at}{f(t)-t^2}=\frac{1}{4}$$

에서 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 $4a$인 일차식이다.

따라서 $f(x)-x^2=4ax+b$ (단, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+4ax+b$

조건 (나)에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+4ax+b)$$
$$=1+4a+b=0$$

$\therefore\ b=-4a-1,\ f(x)=(x-1)(x+4a+1)$

이때 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+4a+1)$$
$$=4a+2=10$$

$\therefore\ a=2,\ b=-9,\ f(x)=x^2+8x-9$

$\therefore\ f(a)=f(2)=11$

답 ④

061

함수 $y=x+2$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $g(x)=(x+2)f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a}(x+2)=0$ 또는 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 한다.

(i) $\lim_{x\to a}(x+2)=0$인 경우

$\lim_{x\to a}(x+2)=a+2=0$

$\therefore\ a=-2$

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$인 경우

$\lim_{x\to a-}(x+1)=f(a)=a+1,$

$\lim_{x\to a+}(x^2-1)=a^2-1$이므로

$a^2-1=a+1$에서

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$(-2)+(-1)+2=-1$이다.

답 ②

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

062

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x(x-1)}=2$이므로

다항함수 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. ……㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=6$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

따라서 $f(x)-x^2$은 $x-1$을 인수로 갖는다. ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-x^2=2(x-1)(x-a)$ (단, a는 상수)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x-a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}2(x-a)$$
$$=2(1-a)=6$$

$a=-2$, $f(x)=2(x-1)(x+2)+x^2$

$\therefore\ f(3)=29$

답 29

063

$x\neq0$일 때 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+ax+9}-bx-3}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+ax+9}-bx-3}{x^2}=-4$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+ax+9}-bx-3}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+ax+9})^2-(bx+3)^2}{x^2(\sqrt{x^2+ax+9}+bx+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)x+(a-6b)}{x(\sqrt{x^2+ax+9}+bx+3)}=-4$$

에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}\{(1-b^2)x+(a-6b)\}=0$에서 $a=6b$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)x+(a-6b)}{x(\sqrt{x^2+ax+9}+bx+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-b^2}{\sqrt{x^2+6bx+9}+bx+3}$$
$$=\frac{1-b^2}{3+0+3}=-4$$

에서 $b^2=25$ $\therefore\ b=5\ (\because\ b>0)$, $a=30$

$\therefore\ a+b=35$

답 ⑤

064

$f(x)$는 일차함수이고, 조건 (가)에서 $f(0)\neq0$이므로

$f(x)=ax+b$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)이라 하자.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2(ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{ax^3+bx^2}=1$$

이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 a인 삼차함수이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=-3$이고,

$f(x)$는 x를 인수로 갖지 않으므로

$g(x)$는 x^3을 인수로 가져야 한다.

즉, $g(x)=ax^3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(ax+b)\times ax^3}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}a(ax+b)=ab=-3 \quad \text{……㉠}$$

또한, 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로 $a+b=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x+3$, $g(x)=-x^3$ 또는

$f(x)=3x-1$, $g(x)=3x^3$이므로

$h(x)=-x^3-x+3$ 또는 $h(x)=3x^3+3x-1$

즉, $h(-1)=5$ 또는 $h(-1)=-7$이므로

최댓값은 5이다.

답 ⑤

065

$f(x)$가 n차함수일 때, $(f\circ f)(x)$는 n^2차함수이고

$\{f(x)\}^2$은 $2n$차함수이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

조건 (가)에서 극한값이 0이 아닌 실수이므로

$n^2=2n$에서 $n=2$ TIP

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c}{(ax^2+bx+c)^2}=\frac{a^3}{a^2}=a$$

에서 $a=2$

조건 (나)에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(2x-c)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-c)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-c}{x+1}=1-\frac{c}{2}=3$$

에서 $c=-4$, $f(x)=(x-1)(2x+4)$

$\therefore\ f(5)=56$

답 56

TIP

$n=0$이면 $f(x)$는 상수함수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

066

(i) $x\geq 0$일 때

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+a)$$
$$=(-x+a)^2+4(-x+a)$$
$$=x^2-(2a+4)x+a^2+4a$$

(ii) $x<0$일 때

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-5)$$
$$=(2x-5)^2+4(2x-5)$$
$$=4x^2-12x+5$$

(i), (ii)에서

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2-(2a+4)x+a^2+4a & (x\geq 0)\\ 4x^2-12x+5 & (x<0)\end{cases}$$

이고, 함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

이므로

$$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-}(4x^2-12x+5)=5,$$

$$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+}\{x^2-(2x+4)x+a^2+4a\}$$
$$=a^2+4a,$$

$(g\circ f)(0)=a^2+4a$에서

$a^2+4a=5$, $a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$ $\therefore\ a=-5$ 또는 $a=1$

따라서 상수 a의 최댓값은 1이다.

답 ①

067

$x=-t$라 하면 $x\to -3$일 때 $t\to 3$이므로

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3g(x)}{f(x)}=\lim_{t\to 3}\frac{(-t)^3g(-t)}{f(-t)}=\lim_{t\to 3}\frac{-t^3g(t)}{-f(t)}$$
$$=\lim_{t\to 3}\frac{t^3g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to 3}t^3\times\lim_{t\to 3}\frac{g(t)}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to 3}t^3\times\lim_{t\to 3}\frac{1}{\frac{f(t)}{g(t)}}=27\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=54$$

답 54

068

점 $\mathrm{P}(t,\ 3\sqrt{t})$에서 x축에 내린 수선의 발이 H이므로

$\mathrm{H}(t,\ 0)$

점 Q는 선분 PH를 2 : 1로 내분하므로 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t})$

두 점 Q, R의 y좌표가 서로 같고, 점 R는 곡선

$y=3\sqrt{x}$ 위의 점이므로 점 R의 x좌표는

$\sqrt{t}=3\sqrt{x}$에서 $t=9x$ $\therefore\ x=\frac{t}{9}$, $\mathrm{R}\left(\frac{t}{9},\ \sqrt{t}\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\left(\frac{t}{9}-t\right)^2+(\sqrt{t}-3\sqrt{t})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{64}{81}t^2+4t},$$

$$\overline{\mathrm{QR}}=\left|\frac{t}{9}-t\right|=\frac{8}{9}t\ (\because\ t>0)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PR}}-\overline{\mathrm{QR}})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{64}{81}t^2+4t}-\frac{8}{9}t\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{64}{81}t^2+4t}\right)^2-\left(\frac{8}{9}t\right)^2}{\sqrt{\frac{64}{81}t^2+4t}+\frac{8}{9}t}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4t}{\sqrt{\frac{64}{81}t^2+4t}+\frac{8}{9}t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4}{\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{4}{t}}+\frac{8}{9}} = \frac{4}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}} = \frac{9}{4}$$

답 ④

069

ㄱ. $x \le 1$일 때 $g(x) = x+1$이므로

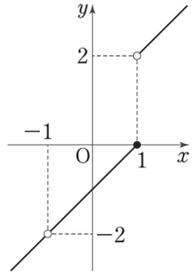
$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x-1)$$

$$= -2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & (x<-1,\ -1<x\le 1) \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x>1) \end{cases}$

$$= \begin{cases} x-1 & (x<-1,\ -1<x\le 1) \\ x+1 & (x>1) \end{cases}$$



이때 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-1$에서

함숫값이 존재하지 않으므로 $x=-1$에서 불연속이다.

또한 $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1-} (x-1) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1+} (x+1) = 2$, $\dfrac{f(1)}{g(1)} = 0$이므로

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 불연속인 점의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x) = \dfrac{(x-1)f(x)}{g(x^2)}$라 하면

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+1} & (-1\le x\le 1) \\ x-1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{x\to -1+} h(x) = 0 \ne -2 = \lim\limits_{x\to -1-} h(x)$이므로

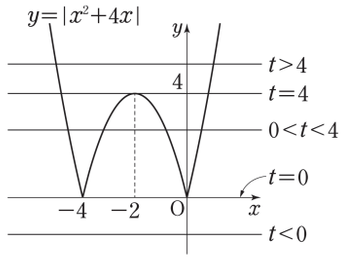
함수 $\dfrac{(x-1)f(x)}{g(x^2)}$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

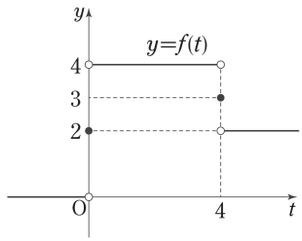
070

t의 값의 범위에 따른 직선 $y=t$와 곡선 $y=|x^2+4x|$의 위치 관계는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같고,

함수 $f(t)$는 $t=0$, $t=4$일 때 불연속이다.



이차함수 $g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이므로

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서만 불연속이려면

$t=0$일 때 불연속, $t=4$일 때 연속이면 된다.

(i) $t=0$일 때

$\lim\limits_{t\to 0-} f(t)g(t) = 0\times g(0) = 0$,

$\lim\limits_{t\to 0+} f(t)g(t) = 4g(0)$,

$f(0)g(0) = 2g(0)$

이므로 함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서 불연속이려면

$g(0) \ne 0$이어야 한다.

(ii) $t=4$일 때

$\lim\limits_{t\to 4-} f(t)g(t) = 4g(4)$,

$\lim\limits_{t\to 4+} f(t)g(t) = 2g(4)$,

$f(4)g(4) = 3g(4)$

이므로 함수 $f(t)g(t)$가 $t=4$에서 연속이려면

$g(4) = 0$이어야 한다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g(0)\neq 0$, $g(4)=0$이고
이차함수 $g(t)$의 최고차항의 계수는 1이므로
$g(t)=(t-4)(t-a)$ (단, $a\neq 0$)라 하자.
$g(-2)=f(2)=4$이므로
$(-2-4)(-2-a)=4$, $12+6a=4$

$\therefore\ a=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $g(t)=(t-4)\left(t+\dfrac{4}{3}\right)$이므로

$g(1)=(1-4)\left(1+\dfrac{4}{3}\right)=-7$

답 ②

071

$x\neq 2$일 때
$(x-2)f(x)=g(x)+x^2-2x$의 양변을
$x-2$로 각각 나누면

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-2}+x$에서 $\dfrac{g(x)}{x-2}=f(x)-x$이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}[f(x)\times\{f(x)-x\}]$$
$$=\lim_{x\to 2}f(x)\times\lim_{x\to 2}\{f(x)-x\}$$
$$=f(2)\times\{f(2)-2\}$$
$$=5\times 3=15$$

답 ②

072

함수 $g(x)=f(x)\{|f(x)|+k\}$가 $x=1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)$이어야 한다.

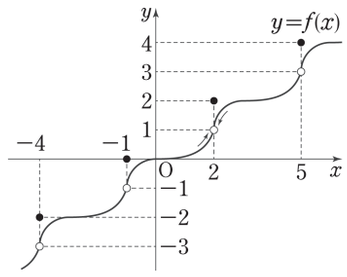
x	$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert+k$	$f(x)\{\lvert f(x)\rvert+k\}$
$1-$	0	k	0
1	-3	$k+3$	$-3(k+3)$
$1+$	-3	$k+3$	$-3(k+3)$

위의 표에서 $\lim_{x\to 1-}g(x)=0$,
$g(1)=\lim_{x\to 1+}g(x)=-3(k+3)$이므로
$-3(k+3)=0$이어야 한다.
$\therefore\ k=-3$

답 ①

073

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)+2$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore\ \lim_{x\to 11}f(x)=\lim_{x\to 8}f(x)+2$$
$$=\lim_{x\to 5}f(x)+4$$
$$=\lim_{x\to 2}f(x)+6$$
$$=1+6=7$$

답 7

074

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}-1 & (0<x\leq 1)\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}-1 & (1<x<2)\end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3} & (0<x\leq 1)\\ -\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} & (1<x<2)\end{cases}$$

ㄱ. $f(x)g(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+1)}{x^3} & (0<x\leq 1)\\ -x(x-2) & (1<x<2)\end{cases}$

이므로
$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=1$,
$f(1)g(1)=0$
즉, 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)^4(x^2+x+1)}{x^3} & (0<x\leq 1)\\ -x(x-1)(x-2) & (1<x<2)\end{cases}$

이므로
$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=0$,
$f(1)g(1)=0$
즉, 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄷ. $f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{3x^3} & (0<x<1)\\ -\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+1)}{x^3} & (x=1)\\ -x(x-2) & (1<x<2)\end{cases}$

이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=1,\ \lim_{x\to1+} f(x)g(x)=1,$

$f(1)g(1)=0$

즉, 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는 ㄴ이다.

답 ②

075

$\lim_{x\to6}\dfrac{|x-n|-n+6}{x-6}$의 극한값이 존재하고

(분모)→0이므로 (분자)→0이다.

$\lim_{x\to6}(|x-n|-n+6)=|6-n|-n+6=0$에서

$|6-n|=-(6-n)$이므로 $n\geq6$이다.

(i) $n=6$일 때

$\lim_{x\to6+}\dfrac{|x-6|}{x-6}=\lim_{x\to6+}\dfrac{x-6}{x-6}=1$

$\lim_{x\to6-}\dfrac{|x-6|}{x-6}=\lim_{x\to6-}\dfrac{6-x}{x-6}=-1$

이므로 $\lim_{x\to6}\dfrac{|x-n|-n+6}{x-6}$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $n>6$일 때

$\lim_{x\to6}\dfrac{|x-n|-n+6}{x-6}=\lim_{x\to6}\dfrac{-(x-n)-n+6}{x-6}$

$=\lim_{x\to6}\dfrac{6-x}{x-6}=-1$

(i), (ii)에서 $n=7, 8, 9, 10$일 때

$\lim_{x\to6}\dfrac{|x-n|-n+6}{x-6}$의 값이 존재하므로

구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$7+8+9+10=34$

답 34

076

$f(x)+g(x)=x^2+5x-6$에서

$f(x)+g(x)=(x+6)(x-1)$ ……㉠

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=1$에서

(분모)→0이므로 (분자)→0이다.

즉, 다항식 $f(x)-g(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)-g(x)=(x-1)h(x)$ (단, $h(x)$는 일차식) ……㉡

㉠, ㉡에서 $x-1$은 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 인수이다. TIP

$f(x)=a(x-1)$ (단, a는 0이 아닌 실수)이라 하면

㉠에 의하여 $g(x)=(x+6-a)(x-1)$이므로

㉡에 의하여 $h(x)=-x-6+2a$

한편

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)h(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}h(x)=h(1)=1$

이므로 $h(1)=-7+2a=1$에서 $a=4$이고

$f(x)=4(x-1)$, $g(x)=(x+2)(x-1)$이다.

∴ $f(2)+g(3)=4+10=14$

답 14

TIP

㉠, ㉡의 양변을 각각 더하면

$2f(x)=(x-1)\{h(x)+x+6\}$,

㉠, ㉡의 양변을 각각 빼면

$2g(x)=(x-1)\{x+6-h(x)\}$

이므로 $x-1$은 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 인수이다.

077

조건 (가)를 만족하려면 $f(x)+g(x)$는

최고차항의 계수가 3인 이차함수이어야 한다.

이때 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수가 모두 자연수이고,

조건 (나)에서 $f(x)g(x)$는 삼차 이상의 다항함수이어야

하므로 $f(x)$, $g(x)$는 그 순서를 고려하지 않으면

3×(이차함수)와 (일차함수)

또는 2×(이차함수)와 1×(이차함수)

꼴이다. ……㉠

이때 조건 (나)를 만족하려면

상수함수 또는 일차함수 $h(x)$가 존재하여

$f(x)g(x)=h(x)(x+1)^3$ 꼴이어야 하고,

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)g(x)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to-1}\dfrac{h(x)(x+1)^3}{(x+1)^3}$

$=\lim_{x\to-1}h(x)=h(-1)$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

에서 $h(-1)=6$이어야 한다. ……㉡

따라서 ㉠, ㉡을 만족시키는 $f(x)$와 $g(x)$를 순서에 관계없이 찾으면 다음과 같다.

(i) $h(x)$가 상수함수 $h(x)=6$일 때

두 함수는 $3(x+1)^2$, $2(x+1)$이므로

$f(1)+g(1)=12+4=16$

(ii) $h(x)$가 일차함수 $h(x)=2(x+4)$일 때

두 함수는 $2(x+1)^2$, $(x+4)(x+1)$

또는 $(x+1)^2$, $2(x+4)(x+1)$이다.

ⓐ $2(x+1)^2$, $(x+4)(x+1)$인 경우

$f(1)+g(1)=8+10=18$

ⓑ $(x+1)^2$, $2(x+4)(x+1)$인 경우

$f(1)+g(1)=4+20=24$

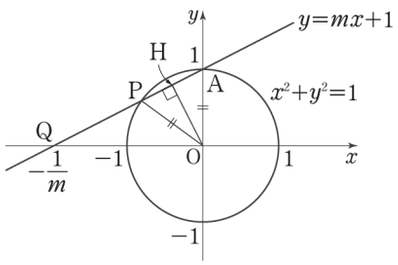
(i), (ii)에서 $f(1)+g(1)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$24+16=40$

답 ①

078

직선 l의 방정식이 $y=mx+1$이므로 $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{m},\ 0\right)$



직각삼각형 AOQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{m}\right)^2}=\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}$

원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}$는 원점과 직선 $y=mx+1$ 사이의 거리와 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=2\sqrt{1-\frac{1}{m^2+1}}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$ 참고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}-\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}\left(\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}-\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$=2-\frac{4m^2}{m^2+1}$

$\therefore\ \lim_{m\to0+}(\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PQ}})=\lim_{m\to0+}\left(2-\frac{4m^2}{m^2+1}\right)=2$

답 ⑤

참고

$\overline{\mathrm{AP}}$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

삼각형 AOH와 삼각형 AQO는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{OA}}$에서

$1:\overline{\mathrm{HA}}=\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}:1$,

$\overline{\mathrm{HA}}=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

이때 이등변삼각형 AOP에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\times\overline{\mathrm{HA}}=\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$이다.

079

$f(x)=t$라 하면 조건 (가)에서

$|t|^3-|x||t|^2-4|t|+4|x|=0$

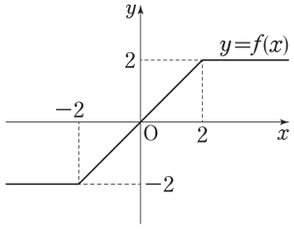
$(|t|+2)(|t|-2)(|t|-|x|)=0$

$\therefore\ |t|=2$ 또는 $|t|=|x|$

즉, $f(x)=\pm2$ 또는 $f(x)=\pm x$이고,

조건 (나)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

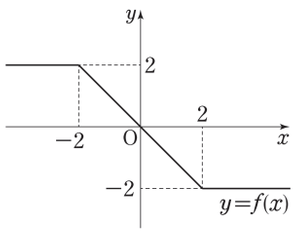
(i)



즉, $f(x)=\begin{cases}2 & (x>2)\\ x & (-2<x\le2)\\ -2 & (x\le-2)\end{cases}$이므로

$f(1)=1$

(ii)



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $f(x)=\begin{cases}-2 & (x>2)\\ -x & (-2<x\le 2)\\ 2 & (x\le -2)\end{cases}$이므로

$f(1)=-1$

(i), (ii)에서 모든 $f(1)$의 값의 곱은

$1\times(-1)=-1$

답 ③

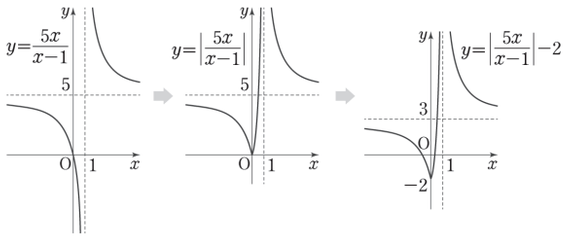
080

곡선 $y=\left|\dfrac{5x}{x-1}\right|-2$는 곡선 $y=\dfrac{5x}{x-1}$,

즉 $y=\dfrac{5}{x-1}+5$에서 x축 아래에 있는 부분을

x축에 대하여 대칭이동시킨 곡선 $y=\left|\dfrac{5x}{x-1}\right|$를

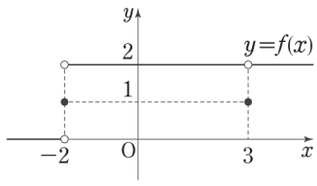
y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.



따라서 곡선 $y=\left|\dfrac{5x}{x-1}\right|-2$와 직선 $y=t$의 교점의 개수

$f(t)$는 $f(t)=\begin{cases}0 & (t<-2)\\ 1 & (t=-2)\\ 2 & (-2<t<3)\\ 1 & (t=3)\\ 2 & (t>3)\end{cases}$이고,

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=3$에서만 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는

$x=-2$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to -2-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to -2+} f(x)g(x)=f(-2)g(-2)$

에서

$0\times g(-2)=2\times g(-2)=1\times g(-2)$이므로

$g(-2)=0$ ……㉠

$\lim\limits_{x\to 3-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 3+} f(x)g(x)=f(3)g(3)$에서

$2\times g(3)=2\times g(3)=1\times g(3)$이므로

$g(3)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x+2)(x-3)$이다.

$\therefore\ g(5)=14$

답 ⑤

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅱ 미분

081

$\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)-3}{x+1}=7$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(-1)=3$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)=7$$

이때 $g(x)=(x-1)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$\therefore\ g'(-1)=f(-1)-2f'(-1)$

$=3-2\times 7=-11$

답 ①

082

$f(x)=x^3+2x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 기울기는 $f'(1)=5$이다.

따라서 접선의 방정식은 $y-2=5(x-1)$이다.

점 $(3,\ a)$가 이 접선 위의 점이므로

$a-2=5(3-1)$

$\therefore\ a=12$

다른풀이

$f(x)=x^3+2x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 기울기는 $f'(1)=5$이다.

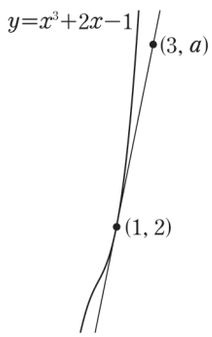
또한 두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ a)$를 지나는

직선의 기울기는 $\dfrac{a-2}{2}$이고, 이는

접선의 기울기와 같다.

$f'(1)=\dfrac{a-2}{2}$에서 $5=\dfrac{a-2}{2}$

$\therefore\ a=12$



답 12

083

$f(x)=x^3-ax$에서 $f'(x)=3x^2-a$이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=0$이어야 한다.

$f'(-2)=12-a=0$에서

$a=12$, $f(x)=x^3-12x$이므로

$b=f(-2)=16$

$\therefore\ a+b=12+16=28$

답 28

084

함수 $f(x)=x^2-4x+6$은 닫힌구간 $[a,\ b]$에서

연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로 평균값

정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나

존재한다.

$f(x)=x^2-4x+6$에서

$f'(x)=2x-4$

$\therefore\ f'(c)=2c-4$

㉠에서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2c-4$

$\therefore\ k=2c-4$

이때 c는 열린구간 $(3,\ 6)$에 속하므로 $3<c<6$이고

$6<2c<12$, $2<2c-4<8$

$\therefore\ 2<k<8$

따라서 구하는 정수 k의 개수는

3, 4, 5, 6, 7로 5개이다.

답 ③

085

$f(1)=1+5-1=5$, $g(1)=1-4+8=5$에서

$f(1)=g(1)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-g(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3\right\}$$
$$+\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}\times 2\right\}$$
$= 3f'(1)+2g'(1)$

$f'(x)=3x^2+10x-1$이므로 $f'(1)=12$

$g'(x)=2x-4$이므로 $g'(1)=-2$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-g(1-2h)}{h}=3f'(1)+2g'(1)$$
$$=3\times 12+2\times(-2)$$
$$=32$$

답 ⑤

086

$f(x)=\begin{cases}x^3+1 & (x<2)\\ ax+b & (x\geq 2)\end{cases}$에서

$g(x)=x^3+1$, $h(x)=ax+b$라 하면

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$g(2)=h(2)$이다.

$2a+b=9$ ……㉠

한편 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분계수를 가져야 하므로

$g'(2)=h'(2)$이다.

$g'(x)=3x^2$, $h'(x)=a$이므로

$a=12$, $b=-15$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b=12+(-15)=-3$

답 ③

087

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2-8x=4x(x+1)(x-2)$

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 $f'(x)=0$이다.

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-\frac{5}{3}$	↗	a	↘	$a-\frac{32}{3}$

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $M=a$를 갖고,

$a-\frac{5}{3}>a-\frac{32}{3}$이므로

$x=2$일 때 최솟값 $m=a-\frac{32}{3}$를 갖는다.

이때 $M+m=6$이므로

$a+\left(a-\frac{32}{3}\right)=6$

$\therefore\ a=\frac{25}{3}$

답 ④

088

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=P'(t)=-3t^2+6t$,

$v_Q=Q'(t)=t-2$이므로

두 점의 속도가 같아지는 순간은

$-3t^2+6t=t-2$에서

$3t^2-5t-2=0$, $(3t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2$ ($\because\ t\geq 0$)

$P(2)=4$, $Q(2)=k-2$이고

이때 두 점 사이의 거리가 10이므로

$|(k-2)-4|=10$에서

$k-6=-10$ 또는 $k-6=10$

$\therefore\ k=-4$ 또는 $k=16$

따라서 구하는 모든 k의 값의 곱은

$(-4)\times 16=-64$

답 ②

089

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+k$에서

$h'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$일 때

$h'(x)=0$이다.

$x\geq -1$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$k-9$	↗	$k+7$	↘	$k-9$	↗

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $x \geq -1$에서 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=3$일 때
최솟값 $k-9$를 가지며 $h(x) \geq 0$을 만족시켜야 하므로
$k-9 \geq 0$
$\therefore\ k \geq 9$
따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 9이다.

답 ④

090

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$라 하면

$f'(x)=3x^2-3x-6$
$\quad=3(x+1)(x-2)$

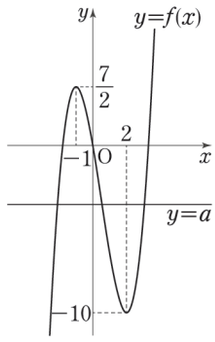
이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 $f'(x)=0$이다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{7}{2}$,

$x=2$에서 극솟값 -10을 갖는다.



방정식 $f(x)=a$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과
한 개의 음의 실근을 갖기 위해서는
그림과 같이 $-10<a<0$이어야 하므로
구하는 정수 a의 개수는 $-9, -8, -7, \cdots, -1$로 9이다.

답 9

091

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x^2-4}=\frac{1}{2}$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-8\}=0$이고,

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=8$이다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

즉, $f'(2)=2$이다.

$\therefore\ f(2)f'(2)=8\times 2=16$

답 ③

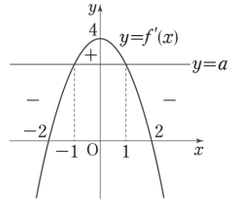
092

$g(x)=f(x)-ax+5$에서
$g'(x)=f'(x)-a$이고,
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로
$g'(1)=0$이다.
즉, $f'(1)-a=0$이므로
$a=f'(1)=3$

답 3

참고

$h(x)=ax-5$라 하면 $h'(x)=a$이고
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로
$g'(x)=f'(x)-h'(x)$의 부호는 그림과 같다.



093

곡선 $y=x^3-6x^2+8x+5$의 기울기가 -4인 접선의
접점을 $(t,\ t^3-6t^2+8t+5)$라 하자.
$y'=3x^2-12x+8$이고 $x=t$일 때의 접선의 기울기가
-4이므로
$3t^2-12t+8=-4$, $t^2-4t+4=0$
$(t-2)^2=0$
$\therefore\ t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이므로 접선의 방정식은
$y=-4(x-2)+5$, 즉 $y=-4x+13$이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\mathrm{A}\left(\frac{13}{4}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, 13)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{13}{4}\times 13=\frac{169}{8}$

따라서 $p=8$, $q=169$이므로 $p+q=177$이다.

답 177

094

선분 PQ의 중점 M의 시각 t에서의 위치를 $m(t)$라 하면

$m(t)=\frac{p(t)+q(t)}{2}=2t^3-3t^2-36t+k$

점 M의 운동 방향이 바뀌는 때는

점 M의 속도의 부호가 바뀌는 때이므로

점 M의 시각 t에서의 속도를 구하면

$m'(t)=6t^2-6t-36=6(t+2)(t-3)$

이고 $t\geq 0$이므로 점 M의 속도의 부호는 $t=3$에서 바뀐다.

즉, 점 M의 운동 방향은 $t=3$일 때 바뀌며

이때 점 M이 원점에 있어야 하므로

$m(3)=54-27-108+k=0$

$\therefore\ k=81$

답 ⑤

095

$f(x)=ax^2-x+b$에서

$f'(x)=2ax-1$이므로

이를 $2f(x)=\{f'(x)\}^2+3$에 대입하면

$2ax^2-2x+2b=4a^2x^2-4ax+4$

이 x에 대한 항등식에서 양변의 계수는 서로 같아야 한다.

x^2의 계수에서 $2a=4a^2$이므로 $a=0$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ ……㉠

x의 계수에서 $-2=-4a$이므로 $a=\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\frac{1}{2}$

상수항에서 $2b=4$이므로 $b=2$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$

$\therefore\ f(4)=6$

답 ⑤

096

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$x=-1$ 또는 $x=3$에서 $f'(x)=0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ \alpha=-1$, $\beta=3$

이때 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 α에서 β까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{-25-7}{4}=-8$

즉, $f'(a)=-8$이어야 하므로 $3a^2-6a-9=-8$에서

$3a^2-6a-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{3}$이다.

답 ⑤

097

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq a) \\ b-f(x) & (x<a) \end{cases}$에서

$h(x)=b-f(x)$라 하면

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$f(a)=h(a)$이다.

$f(a)=b-f(a)$

$\therefore\ b=2f(a)$ ……㉠

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분계수를 가져야 하므로

$f'(a)=h'(a)$이다.

즉, $f'(a)=-f'(a)$에서 $f'(a)=0$이고,

$f'(x)=3x^2+6x$이므로

$3a^2+6a=0$, $3a(a+2)=0$

$\therefore\ a=-2\ (\because\ a<0)$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$b=2f(-2)=2(-8+12-1)=6$

$\therefore\ a+b=-2+6=4$

답 ④

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

098

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4+3x+a-(-x^3+2x)$

$\quad=x^4+x^3+x+a$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$의 서로 다른 실근이 한 개뿐이어야 한다.

$h'(x)=4x^3+3x^2+1=(x+1)(4x^2-x+1)$에서

이차방정식 $4x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times4\times1<0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $4x^2-x+1>0$이므로

$x=-1$에서만 $h'(x)=0$이다.

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-1$일 때 극소이면서 최소이므로

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근이 한 개뿐이려면

$h(-1)=0$이어야 한다.

$h(-1)=1-1-1+a=0$

$\therefore\ a=1$

답 1

099

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고, 조건 (가)에서

함수 $f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$2b=0$

$\therefore\ b=0$

즉, $f'(x)=3ax^2+c$, $f(x)=ax^3+cx+4$이고,

조건 (나)에서 $f'(-2)=0$, $f(-2)=-4$이므로

$f'(-2)=12a+c=0$

$\therefore\ c=-12a$ ……㉠

$f(-2)=-8a-2c+4=-4$

$\therefore\ 4a+c=4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $c=6$

$\therefore\ f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6$, $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+6x+4$

$f'(x)=-\frac{3}{2}(x+2)(x-2)$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$일 때 $f'(x)=0$이다.

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

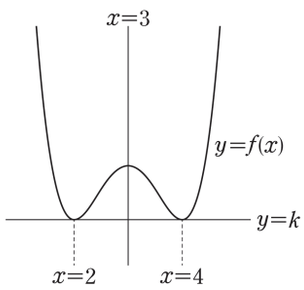
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로

구하는 극댓값은

$f(2)=-4+12+4=12$

답 12

100



조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다. ……㉠

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로

㉠에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖고,

두 극솟값은 서로 같다.

또한 사차함수의 그래프의 개형에 의하여 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 k라 하면

$f(x)-k=(x-2)^2(x-4)^2$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x-4)^2+k$

조건 (다)에서 $f(3)=0$이므로

$f(3)=1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-4)^2-1$이므로

$f(0)=4\times16-1=63$

답 63

101

점 P의 시각 t $(t\geq0)$에서의 위치 x는

$x=t^3-6t^2+at$이므로 속도 v와 가속도 a는

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+a$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

$t=2$일 때 점 P의 가속도가 0이고,

이때 점 P의 위치는 원점이므로

$0=8-24+2a$

$\therefore\ a=8$

답 ④

102

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(-1)=2,\ f'(-1)=0$

$g(x)=(x^2+3)f(x)$라 하면

$g(-1)=4f(-1)=8$

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$이므로

$g'(-1)=-2f(-1)+4f'(-1)=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1,\ 8)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4(x+1)+8$, 즉 $y=-4x+4$이므로

접선의 y절편은 4이다.

답 ⑤

103

점 $(1,\ 1)$에서 곡선 $y=x^3-4x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t)$라 하면

$y'=3x^2-4$이므로

$x=t$일 때의 접선의 기울기는 $3t^2-4$이고

접선의 방정식은

$y-(t^3-4t)=(3t^2-4)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-4)x-2t^3$ ……㉠

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3t^2-4$

$2t^3-3t^2+5=0$

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$

$\therefore\ t=-1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하면

접선의 방정식은 $y=-x+2$이다.

$\therefore\ a=2$

답 ②

104

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(-x+1)+4}{x^2-9}=1$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(-x+1)+4\}=0$이고,

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(-2)=-4$이다.

$-x+1=t$라 하면 $x\to3$일 때 $t\to-2$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(-x+1)+4}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(-x+1)-(-4)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{t\to-2}\frac{f(t)-f(-2)}{(-t+4)(-t-2)}$$

$$=\lim_{t\to-2}\left\{\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}\times\frac{1}{t-4}\right\}$$

$$=f'(-2)\times\left(-\frac{1}{6}\right)=1$$

따라서 $f'(-2)=-6$이므로

$f(-2)f'(-2)=-4\times(-6)=24$

답 24

105

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2g(x)}{3x}=2$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-2g(x)\}=f(0)-2g(0)=0$에서

$f(0)=2g(0)$ ……㉠

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2g(x)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)+2g(0)-2g(x)}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f'(0)-2g'(0)\}=2$$

$\therefore\ f'(0)-2g'(0)=6$ ……㉡

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{g(x)-2}=4$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{g(x)-2\}=g(0)-2=0$에서

$g(0)=2$ ……㉢

㉠에서 $f(0)=2g(0)=4$ ……㉣

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{g(x)-2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{g(x)-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{g(x)-g(0)}{x}}\ (\because\ ㉢)$$

$$=\frac{f(0)}{g'(0)}=4$$

$\therefore\ g'(0)=\frac{1}{4}f(0)=\frac{1}{4}\times 4=1\ (\because\ ㉣)$

㉡에서 $f'(0)=2g'(0)+6=2\times 1+6=8$

따라서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=8\times 2+4\times 1=20$

답 ⑤

106

이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로

$f(x)=(x-a)^2$ (a는 상수)으로 놓으면

$f'(x)=2(x-a)$

$\therefore\ g(x)=2(x^2+2x)(x-a)$

$=2x^3-2(a-2)x^2-4ax$

이때 곡선 $y=g(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수가 0이어야 한다.

즉, $-2(a-2)=0$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-2)^2$이므로

$f(4)=4$

답 4

107

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)\{f(x)+f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$에서

극한값이 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이다.

따라서 $\lim_{x\to -1}f(x)=0$에서 $f(-1)=0$ ……㉠

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{(x+1)\{f(x)+f'(x)\}^2}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)\{f(x)+f'(x)\}^2}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\lim_{x\to -1}\frac{1}{\{f(x)+f'(x)\}^2}$

$=f'(-1)\times\frac{1}{\{f(-1)+f'(-1)\}^2}$

$=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f'(-1)=2$

㉠에 의하여

$f(x)=(x+1)(ax+b)$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(1)=8$에서 $2(a+b)=8$

$\therefore\ a+b=4$ ……㉡

또한 $f'(x)=(ax+b)+a(x+1)$이므로

$f'(-1)=2$에서 $-a+b=2$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 $f(x)=(x+1)(x+3)$이므로

$f(2)=15$

답 ②

108

조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (단, a, b는 상수)로 놓으면

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.

$f'(x)=4x^3+2ax$에서

$f'(1)=4+2a=0$

$\therefore\ a=-2$, $f(x)=x^4-2x^2+b$

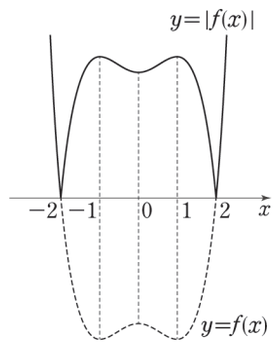
$f'(x)=4x(x+1)(x-1)$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$일 때 $f'(x)=0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$b-1$	↗	b	↘	$b-1$	↗

조건 (다)에 의하여 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f(2)=0$이다.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(2)=16-8+b=0$에서 $b=-8$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2-8$이므로 $f(1)=-9$이다.

답 ⑤

TIP

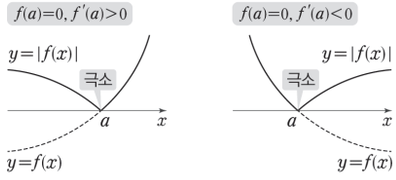
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이고, $f'(a)>0$이면
충분히 작은 양수 h에 대하여
$a-h<x<a$에서 $f(x)<0$,
$a<x<a+h$에서 $f(x)>0$이다.
따라서 함수 $g(x)=|f(x)|$에 대하여

$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (a-h<x<a)\\ f(x) & (a\le x<a+h)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to a-} g'(x)=-f'(a)<0$이고,

$\lim_{x\to a+} g'(x)=f'(a)>0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극솟값 $g(a)=f(a)=0$을 갖는다.
$f(a)=0$, $f'(a)<0$인 경우도 마찬가지이다.



109

$y=x^3-x+2$에서 $y'=3x^2-1$이고

두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 각각 2이므로

$3x^2-1=2$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 A$(-1,\ 2)$, B$(1,\ 2)$이다.

점 A에서의 접선의 방정식은

$y=2(x+1)+2=2x+4$이므로

$x^3-x+2=2x+4$

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$에서 점 C의 좌표는

C$(2,\ 8)$이다. 참고①

마찬가지 방법으로 점 B에서의 접선의 방정식은

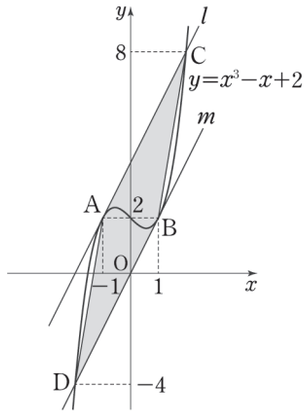
$y=2x$이므로

$x^3-x+2=2x$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$에서 점 D의 좌표는

D$(-2,\ -4)$이다. 참고②



$\therefore$ (사각형 ACBD의 넓이)

=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 ABD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times(8-2)$

$+\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times\{2-(-4)\}$

$=12$

답 ②

참고①

근과 계수의 관계에 의하여 점 C의 좌표 C$(p,\ q)$를 구할 수 있다.
곡선 $y=x^3-x+2$ 위의
점 A$(-1,\ 2)$에서의 접선 $y=2x+4$와 곡선은
$x=-1$에서 접하고 $x=p$일 때 만나므로
방정식 $x^3-x+2=2x+4$는
중근 $x=-1$과 또 다른 한 실근 $x=p$를 갖는다.
따라서 삼차방정식 $x^3-3x-2=0$에서
근과 계수의 관계에 의하여
$(-1)+(-1)+p=0$이므로 $p=2$에서 C$(2,\ 8)$이다.

참고②

대칭성에 의하여 점 D의 좌표 D$(a,\ b)$를 쉽게 구할 수 있다.
$f(x)=x^3-x+2$라 하면
$f(-x)=-x^3+x+2$이므로
모든 실수 x에서 $f(x)+f(-x)=4$를 만족시킨다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 2)$에 대하여 대칭이므로
점 C$(2,\ 8)$과 점 D$(a,\ b)$도 점 $(0,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

$\frac{2+a}{2}=0$에서 $a=-2$이고,

$\frac{8+b}{2}=2$에서 $b=-4$이므로 D$(-2,\ -4)$이다.

110

$f(x)=2x^3-3x^2$이라 하면 방정식 $2x^3-3x^2+a=0$,

즉 $f(x)=-a$가 오직 한 개의 실근만 가지려면

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 개수가 1개뿐이어야 한다. ……㉠

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$일 때 $f'(x)=0$이다.

$|x|\le 1$, 즉 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	↗	0	↘	-1

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

㉠을 만족시키려면

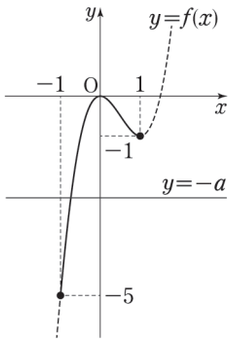
$-5\le -a<-1$ 또는

$-a=0$이어야 한다.

따라서 $a=0$ 또는

$1<a\le 5$이므로 구하는 정수 a는

0, 2, 3, 4, 5로 5개이다.



답 ③

111

$f(x)=x^3-2x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

곡선 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-4t$

따라서 점 (t, t^3-2t^2+1)에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2-4t)(x-t)+t^3-2t^2+1$,

즉 $y=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2+1$이다.

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+5t^2-4t+1$

$(2t-1)(t-1)^2=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

즉, 점 $(1, 0)$을 지나는 접선의 접점의 x좌표는

$\frac{1}{2}$ 또는 1이다.

따라서 구하는 모든 접선의 기울기의 곱은

$f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1)=-\frac{5}{4}\times(-1)=\frac{5}{4}$

답 ⑤

112

시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

이때의 속도는 0이다.

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+2at-12$이므로

$-3+2a-12=0$

$\therefore\ a=\frac{15}{2}$

$v=\frac{dx}{dt}$

$=-3t^2+15t-12$

$=-3(t-1)(t-4)$

따라서 점 P는 $t=4$일 때

두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 TIP

$b+8=12$

$\therefore\ b=4$

$\therefore\ ab=\frac{15}{2}\times 4=30$

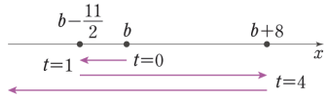
답 30

TIP

점 P의 위치의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	0	$-$
x	b	↘	$b-\frac{11}{2}$	↗	$b+8$	↘

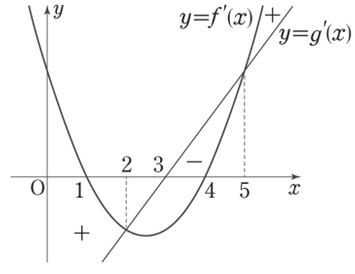
따라서 점 P의 수직선 위에서의 운동은 다음과 같다.



113

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이다.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$h'(x)$의 부호는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖고

$x=5$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ a=5$

답 ⑤

114

조건 (나)에서

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+6x}{f(x)+2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+6}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+2}$$

$$=\frac{f'(0)+6}{f'(0)+2}$$

즉, $f'(0)=\frac{f'(0)+6}{f'(0)+2}$이므로

$f'(0)\{f'(0)+2\}=f'(0)+6$

$\{f'(0)\}^2+f'(0)-6=0$

$\{f'(0)+3\}\{f'(0)-2\}=0$

$f'(0)=-3$ 또는 $f'(0)=2$이다.

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하므로

$f'(x)\le 0$이다.

$\therefore\ f'(0)=-3$

답 ③

115

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$에서

$-f(0)=f(0)\qquad\therefore\ f(0)=0$ ……㉠

또한 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>0) \\ -f'(x) & (x<0) \end{cases}$에서

$-f'(0)=f'(0)\qquad\therefore\ f'(0)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^2(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$

조건 (나)에서 $g'(-1)=-f'(-1)=-5$이므로

$-(-3-2a)=5$에서 $a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2(x-1),\ f'(x)=x(3x-2)$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$에서 $f'(x)=0$이다.

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 4를 갖고,

$x=\frac{2}{3}$에서 최솟값 $-\frac{4}{27}$를 가지므로 두 값의 곱은

$4\times\left(-\frac{4}{27}\right)=-\frac{16}{27}$

답 ②

116

$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$이다.

조건 (가)의 $f'(1)=0$에서

$2+a=0$

$\therefore\ a=-2$

조건 (나)에서 다항식 $f(x)=x^2-2x+b$가

다항식 $f'(x)=2(x-1)$로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여 $f(1)=0$이어야 한다. TIP

$1-2+b=0$

$\therefore\ b=1$

$f(x)=x^2-2x+1$

$\therefore\ f(3)=4$

답 4

TIP

〈수학〉에서 학습한 '인수정리'는 다음과 같다.
다항식 $f(x)$에 대하여
(1) $f(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
(2) $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

117

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x^3}{x^2}=3$이므로

$f(x)=-2x^3+3x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=-6x^2+6x+a$이다.

조건 (나)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-7}{x^3-1}=\frac{4}{3}$에서

극한값이 존재하고 (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-7\}=0$이므로 $f(1)=7$에서

$1+a+b=7$이다. ……㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-7}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{4}{3}$$

따라서 $f'(1)=4$이므로 $a=4$이고 $b=2$이다. ($\because$ ㉠)

$f(x)=-2x^3+3x^2+4x+2$에서 $f(0)=2$이고

$f'(x)=-6x^2+6x+4$에서 $f'(0)=4$이므로

$\therefore\ f(0)f'(0)=2\times4=8$

답 ③

118

$f(x)=x^3-6x^2+9x+2k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x=1$ 또는 $x=3$에서 $f'(x)=0$이다.

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$2k$	↗	$2k+4$	↘	$2k+2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $2k$를 갖고, $x=1$에서 최댓값 $2k+4$를 갖는다.

이때 $|f(x)|\le10-k$, 즉

$-10+k\le f(x)\le10-k$가 항상 성립하려면

$-10+k\le2k$이고 $2k+4\le10-k$이어야 한다.

$-10+k\le2k$에서 $k\ge-10$ ……㉠

$2k+4\le10-k$에서 $3k\le6$, $k\le2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-10\le k\le2$이므로 정수 k의 개수는

-10, -9, …, 2로 13개이다.

답 ②

119

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$x=1$ 또는 $x=2$에서 $f'(x)=0$이다.

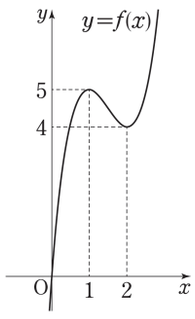
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

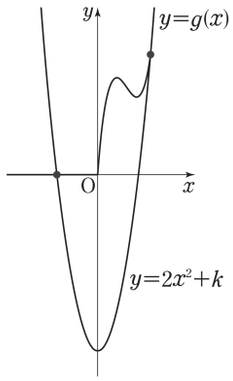
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같으므로

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

즉, 곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=2x^2+k$의 교점의 개수가 2가 되려면 [그림 2]와 같이 $x\ge0$에서 곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=2x^2+k$의 교점의 개수가 1이어야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

$2x^3-9x^2+12x=2x^2+k$에서

$2x^3-11x^2+12x=k$

이때 $h(x)=2x^3-11x^2+12x$라 하면

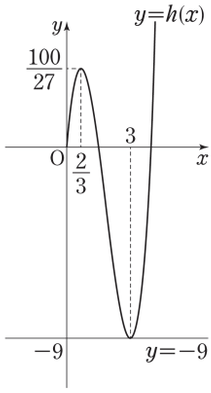
$h'(x)=6x^2-22x+12=2(3x-2)(x-3)$

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$에서 $h'(x)=0$이다.

$x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{2}{3}$	…	3	…
$h'(x)$		+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{100}{27}$	↘	−9	↗

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>



따라서 $x \geq 0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로

$k=-9$

답 ①

120

$f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$이므로 $f(-1)=0$이다.

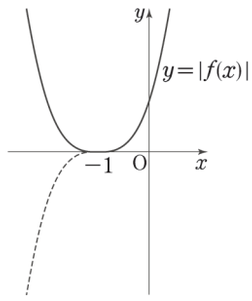
조건 (가)에 의하여

함수 $y=|f(x)|$가 $x=-1$에서 미분가능해야 하므로

$f(x)=(x+1)^2(x-k)$ (단, k는 상수)이어야 한다.

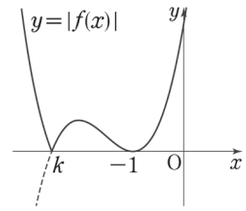
$h(x)=|f(x)|$라 하자.

(i) $k=-1$인 경우



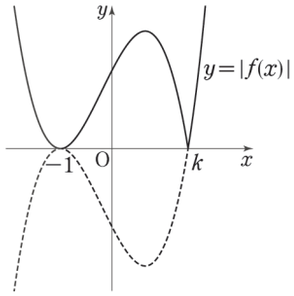
$f(x)=(x+1)^3$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $k<-1$인 경우



이때 $(-\infty, -1)$에서 증가하는 구간이 있으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $k>-1$인 경우



이때 $x>k$에서 $h'(x)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $k \leq 2$이어야 한다.

(i)~(iii)에서 $-1 \leq k \leq 2$인 경우 조건을 만족시키고

$x^2+ax+b=(x+1)(x-k)$

$=x^2+(1-k)x-k$

에서 $a+b=(1-k)+(-k)=1-2k$이므로

$k=-1$일 때 $a+b$는 최댓값 $M=3$,

$k=2$일 때 $a+b$는 최솟값 $m=-3$을 갖는다.

$\therefore\ M-m=3-(-3)=6$

답 6

121

점 $(3, 2)$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점이므로

$f(3)=2,\ g(3)=2$ ……㉠

또한 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선이 서로 일치하므로 $x=3$에서의 미분계수는 서로 같다.

$\therefore\ f'(3)=g'(3)$ ……㉡

한편 $h'(3)=2$이고

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=2f'(3)+2g'(3)$ ($\because$ ㉠)

$=4f'(3)=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ f'(3)=\frac{1}{2}$

답 ⑤

122

점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x는

$x=t^4-8t^3+28t^2$이므로 속도 v와 가속도 a는

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$v=\dfrac{dx}{dt}=4t^3-24t^2+56t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t^2-48t+56=12(t-2)^2+8$

$t=2$일 때 점 P의 가속도가 최소이므로

점 P의 가속도가 최소인 시각에서의 점 P의 속도는

$32-96+112=48$

답 ④

123

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의

역함수가 존재하려면

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3(x^2+2ax+2a)\geq 0$이어야 하므로

이차방정식 $x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a\leq 0$이어야 한다.

$a(a-2)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 2$

따라서 정수 a의 값의 합은

$0+1+2=3$이다.

답 ②

124

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-x^3\}=0$이고

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(1)-1=0$에서 $f(1)=1$이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)-x^3+1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right\}\times\frac{1}{x+1}\right]$$

$=\{f'(1)-3\}\times\dfrac{1}{2}=2$

$\therefore\ f'(1)=7$

$\therefore\ f(1)+f'(1)=1+7=8$

답 ④

125

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$에서

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로

$f(x)=x^2(x+a)$ (단, a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+a)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x+a)=a=2$$

에서 $f(x)=x^2(x+2)$이다.

한편 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-3}{x-1}=4$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)g(x)-3\}=0$에서

$f(1)g(1)=3$이므로 ……㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$=4$$ ……㉡

$f(x)=x^2(x+2)$에서 $f(1)=3$이므로 ㉠에서

$g(1)=1$

$f'(x)=2x(x+2)+x^2$이므로

$f'(1)=2\times 3+1=7$

㉡에서 $7\times 1+3\times g'(1)=4$

$\therefore\ g'(1)=-1$

답 ①

126

$g(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & (x<1)\\ f(x) & (1\leq x<3)\\ -4x+12 & (x\geq 3)\end{cases}$에서

$p(x)=x^2-2x+1$, $q(x)=-4x+12$라 하면

함수 $g(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 연속이므로

$f(1)=p(1)=0$, $f(3)=q(3)=0$이다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

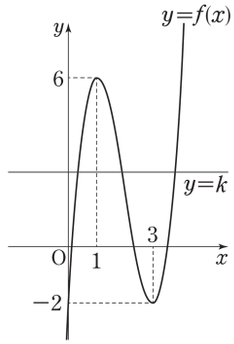
$f(x)=(ax+b)(x-1)(x-3)$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)
이라 하자.
함수 $g(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 미분계수를 가지므로
$f'(1)=p'(1)=0$, $f'(3)=q'(3)=-4$이다.
$f'(x)=a(x-1)(x-3)+(ax+b)(x-3)$
$\qquad +(ax+b)(x-1)$
$f'(1)=-2(a+b)=0$, $a+b=0$ ……㉠
$f'(3)=2(3a+b)=-4$, $3a+b=-2$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$이므로
$f(x)=-(x-1)^2(x-3)$이다.
$\therefore\ f(2)=1$

답 ①

127

$2x^3-8x^2+7x-2=4x^2-11x+k$에서
$2x^3-12x^2+18x-2=k$
즉, 두 곡선 $y=2x^3-8x^2+7x-2$,
$y=4x^2-11x+k$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록
하는 실수 k의 값은 곡선 $y=2x^3-12x^2+18x-2$와
직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 실수
k의 값과 같다.
$f(x)=2x^3-12x^2+18x-2$라 하면
$f'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$
$x=1$ 또는 $x=3$에서 $f'(x)=0$이다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	6	↘	−2	↗



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 위의 그림과
같으므로 실수 k의 값의 범위는
$-2<k<6$
따라서 모든 정수 k의 값은
-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5
이므로 그 합은
$-1+0+1+2+3+4+5=14$

답 ④

128

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$이므로
$x=0$ 또는 $x=a$에서 $f'(x)=0$이다.
구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.
(i) $a\geq 2$인 경우

x	0	…	2
$f'(x)$		−	
$f(x)$	2	↘	$18-12a$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 2를
가지므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $0<a<2$인 경우

x	0	…	a	…	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	2	↘	$2-a^3$	↗	$18-12a$

$f(0)=2$이므로 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는
$x=2$일 때 최댓값 6을 가져야 한다.
$f(2)=18-12a=6$이므로 $a=1$
(i), (ii)에서 $f(x)=2x^3-3x^2+2$이므로
구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(a)=f(1)=1$

답 ④

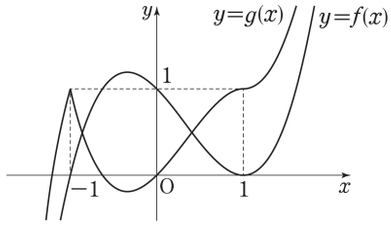
129

조건 (가)에서 $x\neq 1$일 때
$g(x)=\begin{cases}|f(x)|+1 & (x>1)\\ -|f(x)|+1 & (x<1)\end{cases}$
이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$에서
$-|f(1)|+1=|f(1)|+1$, $|f(1)|=0$
$\therefore\ f(1)=0$, $g(1)=1$ ……㉠
한편 함수 $y=|f(x)|+1$의 그래프는 삼차함수
$y=f(x)$의 그래프의 $y<0$인 부분을 x축에 대하여
대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

또한 함수 $y=-|f(x)|+1$의 그래프는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 $y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $f(1)=0$이고 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같이 $x=1$에서 x축과 접해야 하고 점 $(-1, 0)$을 지나야 한다.



따라서 $f(x)=(x+1)(x-1)^2$이므로

$$g(x)=\begin{cases}|(x+1)(x-1)^2|+1 & (x\ge 1)\\ -|(x+1)(x-1)^2|+1 & (x<1)\end{cases}\ (\because\ ㉠)$$

$\therefore\ g(-2)+g(1)+g(2)=-8+1+4=-3$

답 ①

130

$f(x)=x^3-2x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-2=3\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

이므로 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때 $f'(x)=0$이다.

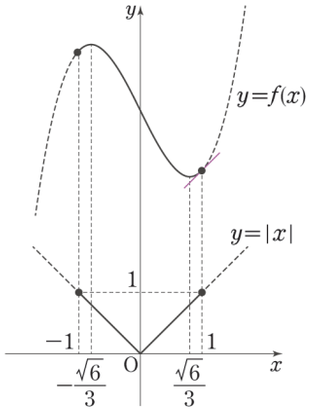
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	…	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f'(1)=1$이므로

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 부등식 $f(x)\ge|x|$가 성립하기 위해서는

$f(-1)\ge 1$이고 $f(1)\ge 1$이어야 한다. TIP



$f(-1)=a+1\ge 1$에서 $a\ge 0$ ……㉠

$f(1)=a-1\ge 1$에서 $a\ge 2$ ……㉡

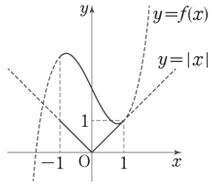
㉠, ㉡에서 $a\ge 2$이므로

구하는 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

TIP

결국 실수 $a=f(0)$의 값이 최소가 되는 경우는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$가 $x=1$에서 접할 때이다.



131

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 2를 가지므로

$f(-1)=2,\ f'(-1)=0$

$g(x)=x^2f(x)$라 하면 $g(-1)=f(-1)=2$이고

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(-1)=-2\times 2+1\times 0=-4$

$$\therefore\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2f(x)-2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}g'(-1)=2$$

답 ②

132

$y=x^3-4x-1$에서 $y'=3x^2-4$이므로

$x=1$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 접선의 방정식은

$y=-(x-1)-4$, 즉 $y=-x-3$이다.

곡선 $y=x^3-4x-1$과 직선 $y=-x-3$이 만나는 점의 x좌표는

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

방정식 $x^3-4x-1=-x-3$에서

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

이때 점 B의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고

$x=-2$에서의 접선의 기울기는 8이므로

접선의 방정식은 $y=8(x+2)-1$

즉, $y=8x+15$이다.

따라서 구하는 x절편은 $-\frac{15}{8}$이다.

다른풀이

점 B의 좌표를 $B(p,\ q)$라 하자.

곡선 $y=x^3-4x-1$ 위의 점 $A(1,\ -4)$에서의

접선의 방정식을 $y=ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

곡선과 직선은 $x=1$일 때 접하고

$x=p$일 때 만나므로

방정식 $x^3-4x-1=ax+b$는

중근 $x=1$과 또 다른 한 실근 $x=p$를 갖는다.

따라서 삼차방정식 $x^3-(a+4)x-b-1=0$에서

근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+p=0$이므로

$p=-2,\ q=-1$ $\therefore\ B(-2,\ -1)$

$x=-2$에서의 접선의 기울기는 8이므로

접선의 방정식은 $y=8(x+2)-1$

즉, $y=8x+15$이다.

따라서 구하는 x절편은 $-\frac{15}{8}$이다.

답 ②

133

점 P의 시간 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x는

$x=-t^3+4t^2+at+5$이므로

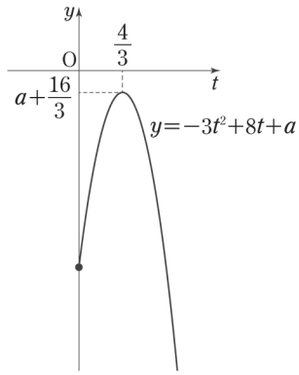
속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+8t+a$이다.

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면

속도의 부호가 바뀌지 않아야 하므로

$t\geq 0$에서 $-3t^2+8t+a\leq 0$이어야 한다.



즉, 이차함수 $y=-3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+a+\frac{16}{3}$의

$t\geq 0$에서의 최댓값이 0 이하이어야 하므로

$a+\frac{16}{3}\leq 0$에서 $a\leq -\frac{16}{3}$이다.

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -6이다.

답 ②

134

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=2x^3-3x^2-12x-a$이다.

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 $h'(x)=0$이다.

이때 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$7-a$	↘	$-20-a$	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의

그래프의 개형은 그림과 같다.

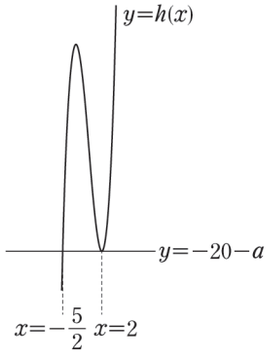
부등식 $h(x)\leq 0$을 만족시키는

양수 x가 단 1개가 되려면

$-20-a=0$이어야 하고,

이때 양수 x는 $x=2$뿐이다.

$\therefore\ a=-20$



답 ②

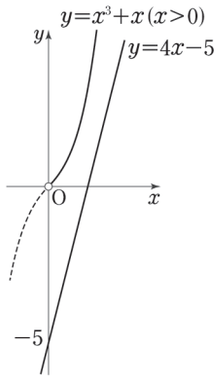
135

$f(x)=x^3+x$라 하면 $f'(x)=3x^2+1>0$이므로

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하고

그 그래프는 다음과 같다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>



참고

원의 중심을 P라 하면 원의 반지름의 길이는
점 P와 직선 $y=4x-5$ 사이의 거리와 같다.
이 거리가 최소이려면
곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가
직선 $y=4x-5$의 기울기와 같아야 하므로
방정식 $3x^2+1=4$에서 $x=1$ ($\because$ $x>0$)
따라서 점 P의 좌표가 $(1, 2)$일 때
점 P와 직선 $y=4x-5$ 사이의 거리가 최소이다.
점 $(1, 2)$와 직선 $4x-y-5=0$ 사이의 거리를 r라 하면

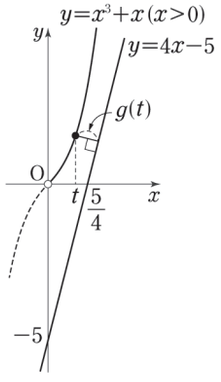
$r=\dfrac{|4\times1-2-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{17}}$이므로

구하는 원의 넓이는 $r^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi$이다.

$\therefore$ $p+q=17+9=26$

다른풀이

곡선 $y=x^3+x$ $(x>0)$ 위의 점 (t, t^3+t)와
직선 $y=4x-5$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자.



좌표평면에서 곡선 $y=x^3+x$ $(x>0)$이
직선 $y=4x-5$보다 위에 나타나므로,
양수 t에 대하여 $t^3+t>4t-5$이다.

$g(t)=\dfrac{|4t-(t^3+t)-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{t^3-3t+5}{\sqrt{17}}$

이때 $g'(t)=\dfrac{3(t^2-1)}{\sqrt{17}}$이므로
구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(t)$는
$t=1$일 때 극소이자 최소이고, $g(1)=\dfrac{3}{\sqrt{17}}$이다.
따라서 구하는 원의 넓이는 $\left(\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi$이다.
$\therefore$ $p+q=17+9=26$

답 26

참고

곡선 $y=x^3+x$ $(x>0)$와 직선 $y=4x-5$가 서로 만나지 않는 이유는 다음과 같다.
$x^3+x=4x-5$, $x^3-3x+5=0$에서
$h(x)=x^3-3x+5$라 하면
$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로
$x=1$일 때 $h'(x)=0$이다.
$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	1	…
$h'(x)$		−	0	+
$h(x)$		↘	3	↗

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 3이다.
따라서 방정식 $h(x)=0$, 즉 $x^3+x=4x-5$의 실근은 존재하지 않으므로
곡선 $y=x^3+x$ $(x>0)$와 직선 $y=4x-5$는 서로 만나지 않는다.

136

$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+9x-9a+4 & (x\geq a)\\ x^3-3x^2-9x+9a+4 & (x<a)\end{cases}$

가 실수 전체의 집합에서 증가하려면
a가 아닌 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.
(i) $x>a$일 때
$f'(x)=3x^2-6x+9=3(x-1)^2+6>0$이므로
함수 $f(x)$는 $x>a$에서 항상 증가한다.
(ii) $x<a$일 때
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$에서
$f'(x)\geq0$인 x의 값의 범위는
$x\leq-1$ 또는 $x\geq3$이다.
따라서 $x<a$에서 항상 $f'(x)\geq0$이기 위해서는
$a\leq-1$이어야 한다.
(i), (ii)에서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ⑤

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

137

$f(x)=x^4-2a^2x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-4a^2x=4x(x+a)(x-a)$

이므로 $x=-a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$일 때

$f'(x)=0$이다.

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$와 $x=a$에서 극소이다.

한편 $b<0$에서 $2b-(b+3)=b-3<0$이므로

$2b<b+3$

즉, $-a=2b$이고 $a=b+3$이어야 한다.

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로

$a+b=1$

답 ④

138

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)g(x)-2}{x-2}=6$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)g(x)-2\}=0$에서

$f(2)g(2)=2$이고, ……㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$$
$$=\{f(2)g(2)\}'=6$$

에서 $f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=6$ ……㉡

한편 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2g(x)}{x^2-2x}=5$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-2g(x)\}=0$에서

$f(2)-2g(2)=0$이고, ……㉢

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2-2x}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2g(x)-\{f(2)-2g(2)\}}{x-2}\times\frac{1}{x}$$
$$=\{f(2)-2g(2)\}'\times\frac{1}{2}=5$$

에서 $f'(2)-2g'(2)=10$ ……㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$f(2)\times\dfrac{1}{2}f(2)=2$, $\{f(2)\}^2=4$

$\therefore\ f(2)=2$, $g(2)=1$ ($\because\ f(2)>0$)

따라서 ㉡에서 $f'(2)+2g'(2)=6$이므로

㉣과 연립하여 풀면

$f'(2)=8$, $g'(2)=-1$

다른풀이

$i(x)=f(x)g(x)$, $j(x)=f(x)-2g(x)$라 하면

$i'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

$j'(x)=f'(x)-2g'(x)$이다.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{i(x)-2}{x-2}=6$에서 $i(2)=2$, $i'(2)=6$이므로

$f(2)g(2)=2$ ……㉠

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=6$ ……㉡

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{j(x)}{x(x-2)}=5$, 즉 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{j(x)-0}{x-2}=10$에서

$j(2)=0$, $j'(2)=10$이므로

$f(2)-2g(2)=0$ ……㉢

$f'(2)-2g'(2)=10$ ……㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$f(2)\times\dfrac{1}{2}f(2)=2$, $\{f(2)\}^2=4$

$\therefore\ f(2)=2$, $g(2)=1$ ($\because\ f(2)>0$)

따라서 ㉡에서 $f'(2)+2g'(2)=6$이므로

㉣과 연립하여 풀면

$f'(2)=8$, $g'(2)=-1$

답 ①

139

$f(x)f'(x)=12(x-1)^3(x-3)(x-4)$ ……㉠

이 식은 5차식이므로 $f(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수를 t라 하면

$f'(x)$의 최고차항의 계수는 $3t$이므로

$3t^2=12$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $f'(x)$는 $x-1$을 인수로 가져야 한다.

㉠을 만족시키기 위해서는

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(x)=6(x-1)(x-3)$,

$f(x)=2(x-1)^2(x-4)$

또는

$f'(x)=-6(x-1)(x-3)$,

$f(x)=-2(x-1)^2(x-4)$

인 경우가 가능하다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가져야 하므로

$f'(x)=-6(x-1)(x-3)$,

$f(x)=-2(x-1)^2(x-4)$이어야 한다.

$\therefore\ f(2)=4$

답 ⑤

140

조건 (가)의 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+f'(x)-x^4}{x^3}=2$에서

분자 $f(x)+f'(x)-x^4$의 최고차항은 $2x^3$이다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)-x^4}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+4)x^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d}{x^3}$$

$=2$

$a+4=2$

$\therefore\ a=-2$

조건 (나)의 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)f'(x)}{x^3}=18$에서

$f(x)f'(x)=x^3h(x)$, $h(0)\neq0$ ($h(x)$는 다항식) ……㉠

이므로 다음과 같이 생각할 수 있다.

(i) $f(x)=x^3(x-2)$인 경우

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$이므로

$f(x)f'(x)=x^3\times2x^2(x-2)(2x-3)$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=x^2(x^2-2x+b)$ ($b\neq0$)인 경우

$f'(x)=4x^3-6x^2+2bx=2x(2x^2-3x+b)$

이므로

$f(x)f'(x)=x^3\times2(x^2-2x+b)(2x^2-3x+b)$

이는 ㉠을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=x^2(x^2-2x+b)$이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^3(x^2-2x+b)(2x^2-3x+b)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}2(x^2-2x+b)(2x^2-3x+b)$$

$=2b^2=18$

이므로 $b=-3$ 또는 $b=3$

$f(x)=x^2(x^2-2x-3)$일 때 $f(-2)=20$

$f(x)=x^2(x^2-2x+3)$일 때 $f(-2)=44$

따라서 구하는 $f(-2)$의 최댓값은 44이다.

답 44

141

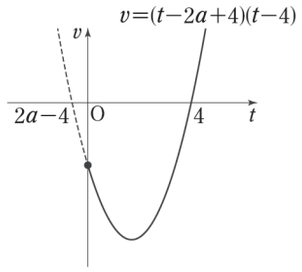
점 P의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치 x는

$x=\dfrac{1}{3}t^3-at^2-(16-8a)t$이므로

속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-2at-16+8a$

$=(t-2a+4)(t-4)$



이때 점 P는 $t=4$에서만 운동 방향이 바뀌어야 하므로

$2a-4\leq0$이어야 한다.

즉, $a\leq2$이어야 하므로

구하는 a의 최댓값은 2이다.

답 ②

142

$g(x)=\begin{cases}-x & (x<-2)\\ f(x) & (-2\leq x\leq2)\\ x & (x>2)\end{cases}$에서

$p(x)=-x$, $q(x)=x$라 하면

함수 $g(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속이어야 하므로

$f(-2)=p(-2)$, $f(2)=q(2)$이어야 한다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $f(2)=2$, $f(-2)=2$이므로

$f(x)-2=a(x+2)(x-2)$ (단, a는 상수)라 하면

$f(x)=ax^2-4a+2$

함수 $g(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 미분가능해야 하므로

$f'(-2)=p'(-2)$, $f'(2)=q'(2)$이어야 한다.

$f'(x)=2ax$, $p'(x)=-1$, $q'(x)=1$이므로

$4a=1$에서 $a=\frac{1}{4}$

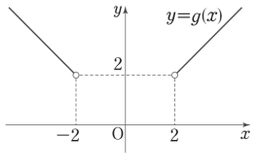
$f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$

$\therefore\ f(1)=\frac{5}{4}$

답 ④

참고

$|x|>2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $g(x)$가 $x=2$, $x=-2$에서 미분가능하려면
함수 $g(x)$가 $x=2$, $x=-2$에서 연속이어야 하므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 2)$, $(-2,\ 2)$를 지나야 한다.
따라서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
결국 이 문제는 $f(x)=ax^2+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)가
$f(2)=2$, $f'(2)=1$을 만족시키도록 하는 상수 a, b의 값을 구하면 된다.

143

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로

$f'(x)=6x^2-12x+a$에서

방정식 $6x^2-12x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 두 실근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{a}{6}$

한편 두 극값 $f(\alpha)=2\alpha^3-6\alpha^2+a\alpha$,

$f(\beta)=2\beta^3-6\beta^2+a\beta$의 합이 -14이므로

$2(\alpha^3+\beta^3)-6(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)=-14$

이때

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times\frac{a}{6}\times 2=8-a$,

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\frac{a}{6}=4-\frac{a}{3}$

이므로

$2(8-a)-6\left(4-\frac{a}{3}\right)+2a=-14$

$16-2a-24+2a+2a=-14$

$2a=-6$

$\therefore\ a=-3$

답 ③

144

삼차함수 $f(x)$에 대하여

점 $(0,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(0)=0$이고, ……㉠

점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1$이다. ……㉡

한편 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의

방정식은 $y=f'(0)x$이고, ……㉢

$y=x^2f(x)$에서 $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=\{2f(1)+f'(1)\}(x-1)+1$, 즉

$y=\{2+f'(1)\}(x-1)+1$이다. ($\because$ ㉡) ……㉣

이때 ㉢=㉣에서 직선 ㉢은 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f'(0)=1$이고, ……㉤

직선 ㉣은 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-\{2+f'(1)\}+1$에서 $f'(1)=-1$이다. ……㉥

㉠, ㉤에 의하여 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여

$f(x)=ax^3+bx^2+x$, $f'(x)=3ax^2+2bx+1$로

놓으면

㉡에서 $f(1)=a+b+1=1$

$\therefore\ a+b=0$

㉥에서 $f'(1)=3a+2b+1=-1$

$\therefore\ 3a+2b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

따라서 $f(x)=-2x^3+2x^2+x$,

$f'(x)=-6x^2+4x+1$이므로

$f(-1)+f'(-1)=3+(-9)=-6$

답 ③

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

145

조건 (가)를 만족시키려면

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(x)=ax^3+bx$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)라 할 수 있다.

$f'(x)=3ax^2+b$에 대하여

방정식 $f'(x)=0$의 실근이 -3, 3이어야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b}{3a}=-9$, 즉 $b=-27a$이다.

따라서 $f(x)=a(x^3-27x)$, $f'(x)=3a(x^2-9)$이다.

한편 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)+x$가 증가해야 하므로

모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)+x\}'\geq 0$

즉, $3a(x^2-9)\geq -1$이어야 한다.

따라서 $a>0$이어야 하고

함수 $y=3a(x^2-9)$의 최솟값이 -1 이상이어야 한다.

즉, $-27a\geq -1$에서 $a\leq \frac{1}{27}$이므로

$f(6)=54a\leq 2$이다.

따라서 $f(6)$의 최댓값은 2이다.

답 2

146

$f(x)=x^3-3x+2$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

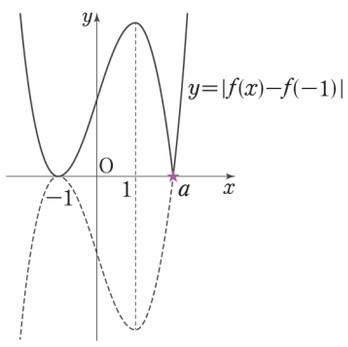
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고,

함수 $y=|f(x)-f(-1)|$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-f(-1)$만큼 평행이동시킨 후

x축 아래쪽에 놓인 부분을 위쪽으로 접어올린 것과 같으므로

그림과 같다.



$g(x)=f(x)-f(-1)$이라 하면

$g(x)>0$ 또는 $g(x)<0$인 경우 함수 $|g(x)|$는

미분가능하므로

$g(x)=0$인 $x=-1$, $x=a$인 경우를 확인해야 한다. TIP

(i) $x=-1$인 경우

$g'(-1)=0$이므로

함수 $|g(x)|$의 $x=-1$에서 좌미분계수와

우미분계수는 0으로 같다.

즉, 함수 $|g(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

(ii) $x=a$인 경우

함수 $|g(x)|$의 $x=a$에서

좌미분계수는 $-g'(a)$, 우미분계수는 $g'(a)$이고

$g'(a)>0$이므로 $-g'(a)\neq g'(a)$이다.

즉, 함수 $|g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 $t=a$이므로

$f(t)=f(-1)$ $(t\neq -1)$을 만족시켜야 한다.

이때 $f(-1)=4$이므로

$t^3-3t+2=4$, $(t+1)^2(t-2)=0$

$\therefore\ t=2$

답 ②

TIP

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$라 하면

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (f(x)>0) \\ -f'(x) & (f(x)<0) \end{cases}$이다.

(1) $f(a)>0$이면

$g'(a)=f'(a)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) $f(a)<0$이면

$g'(a)=-f'(a)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) ① $f(a)=0$, $f'(a)>0$이면

함수 $g(x)$의 $x=a$에서

좌미분계수는 $-f'(a)$, 우미분계수는 $f'(a)$이므로

$-f'(a)\neq f'(a)$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

② $f(a)=0$, $f'(a)<0$이면

함수 $g(x)$의 $x=a$에서

좌미분계수는 $f'(a)$, 우미분계수는 $-f'(a)$이므로

$f'(a)\neq -f'(a)$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

③ $f(a)=0$, $f'(a)=0$이면

$g'(a)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않기 위한 필요충분조건은

①, ②의 $f(a)=0$, $f'(a)\neq 0$이다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

147

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(1)=3$이므로

$1+a+b=3$ $\quad\therefore\ b=-a+2$

$\therefore\ f(x)=x^2+ax-a+2$

한편 곡선 $y=xf(x)$와 직선 $y=2x+t$의 교점의 개수는 곡선 $y=xf(x)-2x$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같고, 함수 $xf(x)-2x$는 삼차함수이므로 곡선 $y=xf(x)-2x$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1 이상이다.

그런데 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 곡선 $y=xf(x)-2x$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 항상 1이어야 한다.

즉, $h(x)=xf(x)-2x$라 하면 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)\geq 0$이다. ($\because$ $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수)

$$\begin{aligned}h'(x)&=f(x)+xf'(x)-2\\&=(x^2+ax-a+2)+x(2x+a)-2\\&=3x^2+2ax-a\geq 0\end{aligned}$$

이고, 이차방정식 $3x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2+3a\leq 0$이어야 하므로

$a(a+3)\leq 0$ $\quad\therefore\ -3\leq a\leq 0$

따라서 $f(-1)=-2a+3$의 최댓값은 $a=-3$일 때, 9이다.

답 ④

148

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(f(x))=x$

삼차함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이고 일대일대응이므로 $x=f(t)$라 하면 방정식

$\{g(x)\}^2+11g(x)=x$에서

$\{g(f(t))\}^2+11g(f(t))=f(t)$

$t^2+11t=t^3-2t^2+2t+k$

$\therefore\ -t^3+3t^2+9t=k$

즉, 방정식 $\{g(x)\}^2+11g(x)=x$가 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 실수 k의 값은 곡선 $y=-t^3+3t^2+9t$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값과 같다.

$h(t)=-t^3+3t^2+9t$라 하면

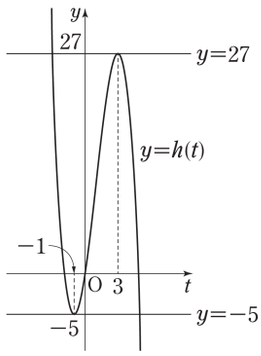
$h'(t)=-3t^2+6t+9=-3(t+1)(t-3)$

$t=-1$ 또는 $t=3$에서 $h'(t)=0$이다.

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	↘	-5	↗	27	↘

함수 $h(t)$는 $t=-1$에서 극솟값 -5를 갖고, $t=3$에서 극댓값 27을 가지므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 직선 $y=-5$ 또는 $y=27$과 서로 다른 두 점에서 만난다.



$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-5+27=22$

답 ②

149

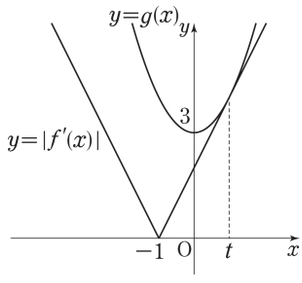
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고 x축과 점 $(-1,\ 0)$에서 접하므로

$f(x)=a(x+1)^2$

$\therefore\ f'(x)=2a(x+1)$

한편 $g(x)=x^2+3$이라 할 때 $|f'(x)|\leq g(x)$를 만족시키려면 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프와 곡선 $y=g(x)$가 만나지 않거나 다음 그림과 같이 한 점에서 접해야 한다. ……㉠

이때 접점의 x좌표를 t라 하자. (단, $t>0$)



$g'(x)=2x$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ t^2+3)$에서의 접선의 방정식은

$y=2t(x-t)+t^2+3$

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=2t(-1-t)+t^2+3$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

따라서 접선의 기울기는 2이므로 ㉠을 만족시키려면

$|2a|\le 2$, 즉 $-1\le a\le 1$이어야 한다.

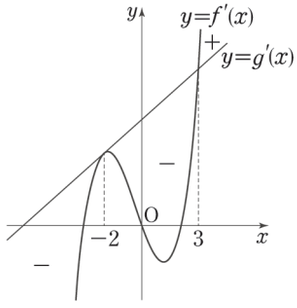
따라서 $M=1$, $m=-1$이므로 $Mm=-1$이다.

답 ①

150

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이다.



$h'(x)$의 부호는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

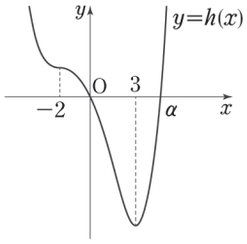
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $h(0)=0$일 때

함수 $y=h(x)$의 그래프는

그림과 같다.



따라서 $h(0)=0$이면 방정식

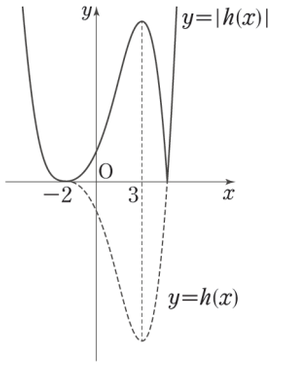
$h(x)=0$은

$x=0$과 $x=\alpha$ $(\alpha>3)$를

실근으로 갖는다. (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 $h(-2)=0$일 때

두 함수 $y=h(x)$, $y=|h(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$$\lim_{x\to -2-}\frac{|h(x)|-|h(-2)|}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=h'(-2),$$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{|h(x)|-|h(-2)|}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2+}\frac{-h(x)+h(-2)}{x-(-2)}=-h'(-2)$$

에서 $h'(-2)=-h'(-2)=0$이므로

함수 $|h(x)|$는 $x=-2$에서 미분가능하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

151

$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f'(1)}{x-1}=10$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1}\{xf(x)-f'(1)\}=f(1)-f'(1)=0$에서

$f(1)=f'(1)$이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f'(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f(x)+f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$=f(1)+f'(1)$

즉, $f(1)+f'(1)=10$이고 $f(1)=f'(1)$이므로

$f(1)=f'(1)=5$

$f(1)=1+a+b=5$ ……㉠

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(1)=2+a=5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=1$

$\therefore\ ab=3$

답 ③

152

두 점 P, Q가 만나는 순간의 시각 t를 구하면

$-t^3+8t^2-20t+19=-t+7$에서

$t^3-8t^2+19t-12=0$,

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$(t-1)(t-3)(t-4)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$ ……㉠

두 점 P와 Q가 시각 t에서 서로 반대 방향으로 움직이면 두 점 P와 Q의 속도 $f'(t)$, $g'(t)$의 부호가 서로 반대이다.

$g'(t)=-1$이므로 $f'(t)>0$일 때 두 점 P와 Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

$f'(t)=-3t^2+16t-20>0$에서

$-(3t-10)(t-2)>0$

$\therefore\ 2<t<\dfrac{10}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 시각은 $t=3$이므로

이때 점 P의 위치는

$f(3)=g(3)=4$

답 4

참고

$f(t)=g(t)$에서 $t=1$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$이고,

$f'(t)=-3t^2+16t-20=-(3t-10)(t-2)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=\dfrac{10}{3}$이므로

곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=g(t)$는 오른쪽 그림과 같다.

$t=1$과 $t=4$에서 함수 $f(t)$와 $g(t)$의 값이 모두 작아지므로

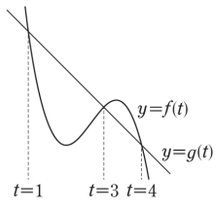
두 점 P, Q는 모두 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

즉, 두 점 P, Q는 $t=1$과 $t=4$일 때 같은 방향으로 움직이면서 만난다.

$t=3$에서 함수 $f(t)$의 값은 커지고, 함수 $g(t)$의 값은 작아지므로

점 P는 수직선의 양의 방향, 점 Q는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

즉, 두 점 P, Q는 $t=3$일 때 서로 반대 방향으로 움직이면서 만난다.



153

$f(-x)=f(x)$에서 사차함수 $f(x)$는 짝수차항과 상수항으로만 이루어진 함수이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+2ax$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(1)=2$, $f'(1)=0$

$f(1)=2$에서 $1+a+b=2$ $\therefore\ a+b=1$

$f'(1)=0$에서 $4+2a=0$ $\therefore\ a=-2$, $b=3$

$\therefore\ f(x)=x^4-2x^2+3$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$에서 $f'(x)=0$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 극댓값은

$f(0)=3$

답 ③

154

$f(x)=x(x-a)(x-3)$이라 하면 $f(0)=0$이므로

원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고,

원점에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$이다.

또한 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중

원점이 아닌 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0=-tf'(t)+f(t)$

$tf'(t)-f(t)=0$ ……㉠

$f(x)=x(x-a)(x-3)=x^3-(a+3)x^2+3ax$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+3)x+3a$이므로 ㉠에 의하여

$t\{3t^2-2(a+3)t+3a\}-\{t^3-(a+3)t^2+3at\}=0$

$2t^3-(a+3)t^2=0$, $t^2\{2t-(a+3)\}=0$

$\therefore\ t=\dfrac{a+3}{2}$ ($\because\ t\neq 0$)

따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 기울기는

$f'(0)=3a$와

$$f'\left(\frac{a+3}{2}\right)=3\left(\frac{a+3}{2}\right)^2-2(a+3)\times\frac{a+3}{2}+3a$$

$$=-\frac{1}{4}(a+3)^2+3a$$

$$=-\frac{1}{4}(a^2-6a+9)$$

이므로 $0<a<3$인 실수 a에 대하여

두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$$g(a)=3a\left\{-\frac{1}{4}(a^2-6a+9)\right\}=-\frac{3}{4}(a^3-6a^2+9a)$$

$$g'(a)=-\frac{3}{4}(3a^2-12a+9)=-\frac{9}{4}(a-1)(a-3)$$

이므로 $a=1$일 때 $g'(a)=0$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$0 < a < 3$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$g(1)=-\frac{3}{4}(1-6+9)=-3$$

답 ③

155

조건 (가)의 $xf(x)=g(x)+1$ ……㉠

이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=g(0)+1$

$\therefore\ g(0)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=g'(x)$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=g'(0)$

조건 (나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+1}{x}=-1$에서

극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $f(0)g(0)+1=0$이므로

$f(0)\times(-1)+1=0$

$\therefore\ f(0)=1,\ g'(0)=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}\\&=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\\&=f'(0)\times(-1)+1\times 1\\&=-1\end{aligned}$$

$\therefore\ f'(0)=2$

따라서 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)x+f(0)$에서 $y=2x+1$이므로

점 $(0,\ -1)$과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

156

$f(x)=x^4-2kx^2$에서

$f'(x)=4x^3-4kx$

$\quad=4x(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})$

이므로 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{k}$일 때

$f'(x)=0$이고

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{k}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k^2$	↗	0	↘	$-k^2$	↗

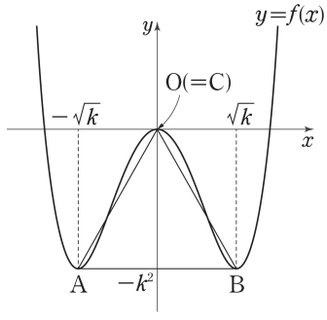
따라서 함수 $f(x)$는

$x=-\sqrt{k}$에서 극솟값 $-k^2$,

$x=\sqrt{k}$에서 극솟값 $-k^2$,

$x=0$에서 극댓값 0을 가지므로

$\mathrm{A}(-\sqrt{k},\ -k^2)$, $\mathrm{B}(\sqrt{k},\ -k^2)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$이다.



삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\sqrt{k}\times\sqrt{3}=k^2$

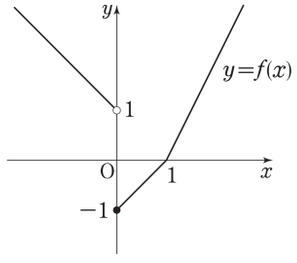
$\therefore\ k^3=3$

답 ③

157

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고,

$x=1$에서는 연속이지만 미분가능하지 않다.



이때 다항함수 $g(x)$에 대하여

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(-x+1)g(x) & (x<0)\\ (x-1)g(x) & (0\le x<1)\\ (2x-2)g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$\{f(x)g(x)\}'=\begin{cases}-g(x)+(-x+1)g'(x) & (x<0)\\ g(x)+(x-1)g'(x) & (0<x<1)\\ 2g(x)+(2x-2)g'(x) & (x>1)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하려면 $x=0$과 $x=1$에서 미분가능하면 된다.

(i) $x=0$에서 미분가능하려면

먼저 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=1\times g(0)=g(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=(-1)\times g(0)=-g(0),$$

$$f(0)g(0)=(-1)\times g(0)=-g(0)$$

에서 $g(0)=-g(0)$이므로 $g(0)=0$이다. ……㉠

또한 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수

$\{f(0)g(0)\}'$이 존재해야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 0-}\{-g(x)+(-x+1)g'(x)\}=-g(0)+g'(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\{g(x)+(x-1)g'(x)\}=g(0)-g'(0)$$

에서 $g'(0)=-g'(0)$이므로 $g'(0)=0$이다. ……㉡

(ii) $x=1$에서 미분가능하려면

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수

$\{f(1)g(1)\}'$이 존재해야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 1-}\{g(x)+(x-1)g'(x)\}=g(1),$$

$$\lim_{x\to 1+}\{2g(x)+(2x-2)g'(x)\}=2g(1)$$

에서 $g(1)=2g(1)$이므로 $g(1)=0$이다. ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $g(x)$는 $x^2(x-1)$을 인수로 가지므로

$h(x)=x^2(x-1)$

$\therefore\ h(3)=18$

답 18

참고

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

따라서 미분계수의 존재를 따질 때에는

$$\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)$$

가 성립하도록 하면 충분하다.

158

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-1$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$이므로

$$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}(x+1)f(x)=2a+2b,$$

$$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=a+b,$$

$g(1)=a+b$에서

$2a+2b=a+b$

$\therefore\ a+b=0$ ……㉠

또한 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1-}g'(x)=\lim_{x\to 1+}g'(x)$이어야 한다.

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x>1)\\ f(x)+(x+1)f'(x) & (x<1)\end{cases}$이므로

$$\lim_{x\to 1-}g'(x)=\lim_{x\to 1-}\{f(x)+(x+1)f'(x)\}$$
$$=(a+b)+2(2a+2)$$
$$=5a+b+4,$$

$\lim_{x\to 1+}g'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)=2a+2$에서

$5a+b+4=2a+2$

$\therefore\ 3a+b+2=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore\ f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)(x-1)^2 & (x\ge 1)\\ (x+1)^2(x-1)^2 & (x<1)\end{cases},$$

$$g'(x)=\begin{cases}(3x+1)(x-1) & (x\ge 1)\\ 4x(x+1)(x-1) & (x<1)\end{cases}$$

$g'(x)=0$에서

$x\ge 1$일 때 $x=1$

$x<1$일 때 $x=0$ 또는 $x=-1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…	1	…
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는

$x=-1$에서 극솟값 $g(-1)=0$,

$x=0$에서 극댓값 $g(0)=1$,

$x=1$에서 극솟값 $g(1)=0$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

을 가지므로 서로 다른 모든 극값의 합은

$0+1=1$

답 ①

159

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=f'(1)$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0+}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$=-f'(1)$$

$f'(1)=-f'(1)$에서 $f'(1)=0$이다.

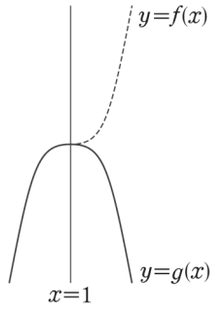
한편 $x>1$일 때 함수 $y=f(2-x)$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=1$에 대하여

대칭이동시킨 것이므로

(i) 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

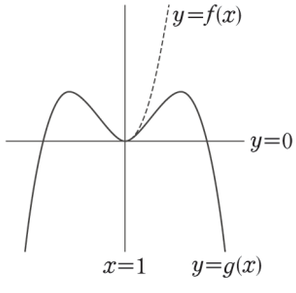


따라서 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가질 수 없다.

(ii) 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지면

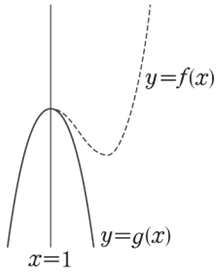
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지기 위해서는 $f(1)=0$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지면

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가질 수 없다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 가진다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b+3=0$ ……㉠

$f(1)=a+b+2=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$f(x)=x^3-x^2-x+1$이다.

$\therefore\ f(2)=2^3-2^2-2+1=3$

답 ①

160

$g(x)=|f(x)+1|-|f(x)-1|$이라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-2 & (f(x)<-1)\\ 2f(x) & (-1\le f(x)\le 1)\\ 2 & (f(x)>1)\end{cases}$$이다.

$h(x)=2f(x)$라 하면 $h(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x$에서

$h'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=\frac{3}{8}(x+2)(x-2)$이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$일 때 $h'(x)=0$이고

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	2	↘	-2	↗

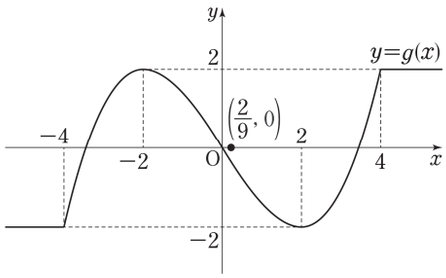
따라서 삼차함수 $h(x)$는

극댓값 $h(-2)=2$와 극솟값 $h(2)=-2$를 갖고,

$h(-4)=-2$, $h(4)=2$이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

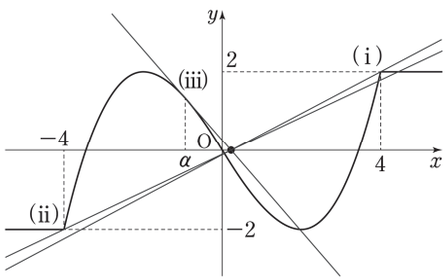
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\frac{1}{a}\left(x-\frac{2}{9}\right)$의 그래프는

점 $\left(\frac{2}{9}, 0\right)$을 지나면서 기울기가 $\frac{1}{a}$인 직선이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프와의 교점의 개수가 짝수인 경우는 다음의 3가지가 있다.



(i) 점 $(4, 2)$를 지날 때

$\frac{1}{a}=\frac{2-0}{4-\frac{2}{9}}=\frac{9}{17}$이므로 $a=\frac{17}{9}$이다.

(ii) 점 $(-4, -2)$를 지날 때

$\frac{1}{a}=\frac{(-2)-0}{(-4)-\frac{2}{9}}=\frac{9}{19}$이므로 $a=\frac{19}{9}$이다.

(iii) 점 $(\alpha, h(\alpha))$에서 접할 때

$-2<\alpha<0$이고 $\frac{1}{a}=h'(\alpha)=\frac{h(\alpha)-0}{\alpha-\frac{2}{9}}$이다.

$\frac{3}{8}\alpha^2-\frac{3}{2}=\frac{\frac{1}{8}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha}{\alpha-\frac{2}{9}}$를 정리하면

$3\alpha^3-\alpha^2+4=0$, $(\alpha+1)(3\alpha^2-4\alpha+4)=0$

즉, $\alpha=-1$이므로 $a=\frac{1}{h'(-1)}=-\frac{8}{9}$이다.

(i)~(iii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{17}{9}+\frac{19}{9}+\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{28}{9}$

$\therefore\ p+q=9+28=37$

답 37

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅱ 적분

161

$$f(x)=\int\left(2x^3-\frac{1}{6}x^2+5\right)dx+\int\left(2x^3+\frac{1}{6}x^2\right)dx$$

$$=\int\left\{\left(2x^3-\frac{1}{6}x^2+5\right)+\left(2x^3+\frac{1}{6}x^2\right)\right\}dx$$

$$=\int(4x^3+5)dx$$

$$=x^4+5x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

$f(x)=x^4+5x-2$

$\therefore\ f(-1)=-6$

답 ③

162

$$\int_0^a(3x^2+5x)dx+\int_a^0(x+5)dx$$

$$=\int_0^a(3x^2+5x)dx-\int_0^a(x+5)dx$$

$$=\int_0^a(3x^2+4x-5)dx=\left[x^3+2x^2-5x\right]_0^a$$

$$=a^3+2a^2-5a=6$$

$a^3+2a^2-5a-6=0$

$(a-2)(a+1)(a+3)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

답 ②

163

$$\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2-2|x|+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2+1)dx-\int_{-1}^{1}2|x|dx$$

$$=2\int_0^1(3x^2+1)dx-\left\{\int_{-1}^{0}(-2x)dx+\int_0^1 2x\,dx\right\}$$

$$=2\left[x^3+x\right]_0^1-\left\{\left[-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^2\right]_0^1\right\}$$

$$=4-(1+1)$$

$$=2$$

다른풀이

좌표평면에서 함수 $y=4x^3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

함수 $y=3x^2-2|x|+1$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1}(4x^3+3x^2-2|x|+1)dx$$

$$=2\int_0^1(3x^2-2|x|+1)dx$$

$$=2\int_0^1(3x^2-2x+1)dx\ (\because\ 0\le x\le 1\text{일 때 }|x|=x)$$

$$=2\left[x^3-x^2+x\right]_0^1$$

$$=2$$

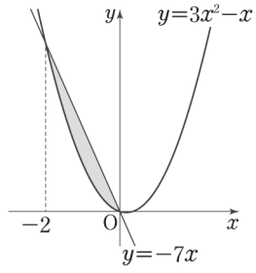
답 ⑤

164

$3x^2-x=-7x$에서

$3x(x+2)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=-2$



따라서 구하는 넓이는 참고

$$\int_{-2}^{0}\{-7x-(3x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-3x^2-6x)dx$$

$$=\left[-x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=4$$

답 ②

참고

99쪽 단축Key 내용을 이용하면

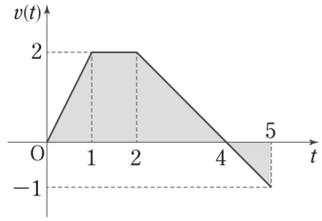
구하는 넓이는 $\frac{3\{0-(-2)\}^3}{6}=4$이다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

165

점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 직선 $t=0$, $t=5$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합과 같다.



$$\frac{1}{2}\times(1+4)\times 2+\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{11}{2}$$

답 ③

166

$$f'(x)=\begin{cases}-x+1 & (x<2)\\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$에서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x<2)\\ x^2-3x+C_2 & (x>2)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때 $f(4)=9$이므로

$4+C_2=9$에서 $C_2=5$

또한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+C_1\right)=\lim_{x\to 2+}(x^2-3x+5)$

이므로 $C_1=3$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+3 & (x<2)\\ x^2-3x+5 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$\therefore\ f(1)=\frac{7}{2}$

답 ④

167

$$xf(x)=x^2+\int_1^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)$

$xf'(x)=2x$

$f'(x)=2$이므로

$f(x)=2x+C$ (단, C는 적분상수)

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$이므로

$2+C=1$에서 $C=-1$

$f(x)=2x-1$

$\therefore\ f(10)=19$

답 19

168

조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 한 근을 $2-\alpha$ $(\alpha>0)$라 하면 다른 한 근은 $2+\alpha$이다.

조건 (나)에 의하여 $(2-\alpha)(2+\alpha)=3$이므로

$4-\alpha^2=3$, $\alpha^2=1$

$\therefore\ \alpha=1$ $(\because\ \alpha>0)$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 1, 3이고,

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 3이므로

$f(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$

$$\therefore\ \int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}(3x^2-12x+9)\,dx$$
$$=2\int_0^3(3x^2+9)\,dx$$
$$=2\left[x^3+9x\right]_0^3$$
$$=2\times 54=108$$

답 ③

169

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax$ (단, a는 상수)라 하면 TIP

$f'(x)=3x^2+a$에서

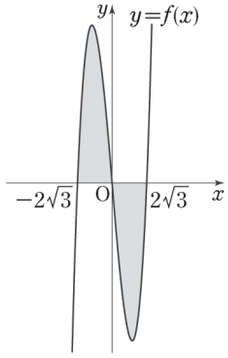
$f'(2)=0$이므로

$f'(2)=12+a=0$,

$a=-12$이다.

$f(x)=x^3-12x$

$=x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이므로 $x=0$ 또는 $x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=2\sqrt{3}$ 이다. 참고①

따라서 구하는 넓이는 참고②

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2\sqrt{3}}\{-f(x)\}dx$$

$$=\int_{-2\sqrt{3}}^{0}(x^3-12x)dx+\int_{0}^{2\sqrt{3}}\{-(x^3-12x)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2\right]_{-2\sqrt{3}}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2\right]_{0}^{2\sqrt{3}}$$

$$=36-(-36)=72$$

답 72

TIP

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{x}(t^3+at^2+bt+c)dt$$

$$=2\int_{0}^{x}(at^2+c)dt=2\left[\frac{a}{3}t^3+ct\right]_{0}^{x}$$

$$=2\left(\frac{a}{3}x^3+cx\right)=0$$

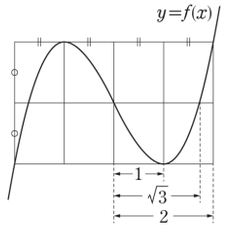
즉, 모든 실수 x에 대하여 $\frac{a}{3}x^3+cx=0$을 만족시켜야 하므로

$a=c=0$이다.

따라서 $f(x)=x^3+bx$ 꼴이다.

참고①

극값을 갖는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 다음과 같은 길이 관계를 만족시킨다.



(1) 그림의 직사각형 8개는 서로 합동이다.

(2) 표시된 세 부분의 길이는 $1:\sqrt{3}:2$의 비를 갖는다.

따라서 위의 문제에서 $f(0)=0$이고 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f(2\sqrt{3})=0$, $f(-2\sqrt{3})=0$임을 바로 알 수 있다.

참고②

곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

구하는 넓이는 $2\int_{-2\sqrt{3}}^{0} f(x)dx$의 값과 같다.

170

$f(x)$는 $f'(x)$의 한 부정적분이므로

조건 (가)의 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-6}^{x} f'(t)dt=36$에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-6)}{x}=36$$

이때 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-f(-6)\}=0$에서 $f(0)=f(-6)$이고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-6)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=f'(0)=36$$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고,

$f(0)=f(-6)$에서 $c=-216+36a-6b+c$

$\therefore\ 6a-b=36$

또한 $f'(0)=36$에서 $b=36$, $a=12$

$\therefore\ f(x)=x^3+12x^2+36x+c$,

$f'(x)=3x^2+24x+36=3(x+6)(x+2)$

$x=-6$ 또는 $x=-2$에서 $f'(x)=0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극댓값 5를 갖고,

$f(0)=f(-6)$이므로 $f(0)=c=5$이다.

따라서 $f(x)=x^3+12x^2+36x+5$이므로 극솟값은

$f(-2)=-8+48-72+5=-27$

답 ④

171

$$\int_{-a}^{a}(x^3-6x^2+x+8)dx=2\int_{0}^{a}(-6x^2+8)dx$$

$$=2\left[-2x^3+8x\right]_{0}^{a}$$

$$=-4a(a+2)(a-2)=0$$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

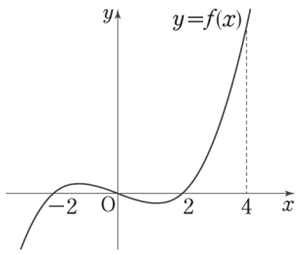
답 ①

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

172

$f(x)=x(x-2)(x+2)$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 2$일 때 $f(x) \le 0$이고

$x \ge 2$일 때 $f(x) \ge 0$이므로

$$\int_0^4 |x(x-2)(x+2)|\,dx$$

$$= \int_0^2 \{-(x^3-4x)\}dx + \int_2^4 (x^3-4x)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_2^4$$

$$= 4+36 = 40$$

답 40

173

$\int_0^1 tf(t)dt = a$ (단, a는 상수)라 하면

$f(x)=x^2-6x+a$이므로

$$\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t(t^2-6t+a)dt$$

$$= \int_0^1 (t^3-6t^2+at)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{7}{4}+\frac{a}{2} = a$$

에서 $a=-\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=x^2-6x-\frac{7}{2}$이므로

$$6\int_0^1 f(x)dx = 6\int_0^1 \left(x^2-6x-\frac{7}{2}\right)dx$$

$$= 6\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2-\frac{7}{2}x\right]_0^1$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}-3-\frac{7}{2}\right) = -37$$

답 ①

174

두 곡선 $y=-x^3+4x^2$, $y=ax^2-4ax$의 교점의 x좌표는 $-x^3+4x^2=ax^2-4ax$에서

$x^3+(a-4)x^2-4ax=0$

$x(x+a)(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-a$ 또는 $x=4$

이때 $S_2-S_1=8$이므로

$$\int_{-a}^4 \{(-x^3+4x^2)-(ax^2-4ax)\}dx - \int_0^{-a} \{(ax^2-4ax)-(-x^3+4x^2)\}dx$$

$$= \int_{-a}^4 \{(-x^3+4x^2)-(ax^2-4ax)\}dx + \int_0^{-a} \{(-x^3+4x^2)-(ax^2-4ax)\}dx$$

$$= \int_0^4 \{(-x^3+4x^2)-(ax^2-4ax)\}dx$$

$$= \int_0^4 \{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_0^4$$

$$= \frac{64}{3}+\frac{32}{3}a = 8$$

에서 $64+32a=24$

$\therefore\ a=-\frac{5}{4}$

답 ②

175

조건 (나)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$= f'(x)+f'(x) = 2f'(x)$$

$$= 6x^2+kx+2$$

따라서 $f'(x)=3x^2+\frac{k}{2}x+1$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(3x^2+\frac{k}{2}x+1\right)dx$$

$$=x^3+\frac{k}{4}x^2+x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

조건 (가)에서 $f(0)=f(1)$이므로

$$C=1+\frac{k}{4}+1+C$$

$\therefore\ k=-8$

따라서 $f'(x)=3x^2-4x+1$이므로

$f'(k)=f'(-8)=192+32+1=225=15^2$

$\therefore\ n=15$

답 15

176

$$f(x)=2x^3+4x-\int_0^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서

$$\int_0^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_0^x f'(t)dt$$

$$=\Big[f(t)\Big]_0^x$$

$$=f(x)-f(0)$$

이고, ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로

$f(x)=2x^3+4x-f(x)$에서

$f(x)=x^3+2x$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^2=8$$

다른풀이

$$f(x)=2x^3+4x-\int_0^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2+4-f'(x)$에서

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$f(x)=x^3+2x+C$ (단, C는 적분상수)

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=x^3+2x$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^2=8$$

답 ②

177

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를

각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=\frac{1}{3}t^3+3t^2+5t+C_1\ (\text{단, } C_1\text{은 적분상수})$$

$$x_{\mathrm{Q}}(t)=-t^3+t^2+7t+C_2\ (\text{단, } C_2\text{는 적분상수})$$

이때 $x_{\mathrm{P}}(0)=x_{\mathrm{Q}}(0)=0$이므로

$C_1=C_2=0$에서

$$x_{\mathrm{P}}(t)=\frac{1}{3}t^3+3t^2+5t,\ x_{\mathrm{Q}}(t)=-t^3+t^2+7t$$

이때 시각 t에서의 점 M의 위치를 $x_{\mathrm{M}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{M}}(t)=\frac{1}{2}\{x_{\mathrm{P}}(t)+x_{\mathrm{Q}}(t)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}t^3+3t^2+5t\right)+\left(-t^3+t^2+7t\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+6t$$

$\therefore\ x_{\mathrm{M}}(3)=27$

답 27

178

$$xf(x)=2x^3-x^2+6a+\int_a^x f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-2x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-2x$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=6x-2$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$

$$=3x^2-2x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore\ f(x)=3x^2-2x$ ……㉡

한편 ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$af(a)=2a^3-a^2+6a$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$a>0$이므로 $f(a)=2a^2-a+6$ ……㉢

㉡에서 $f(a)=3a^2-2a$이므로 ㉢과 비교하면

$3a^2-2a=2a^2-a+6,\ a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ f(a)=f(3)=27-6=21$

답 ⑤

179

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.

$$\int_1^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+2\int_1^2 f(x)dx$$

$$=a\int_0^1 x^2dx+2a\int_1^2 (2-x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2a\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}a+a=\frac{4}{3}a=12$$

이므로 $a=9$, $f(x)=\begin{cases}9x^2 & (0\le x<1)\\ 9(2-x) & (1\le x<2)\end{cases}$이다.

$\therefore\ f(5)=f(3)=f(1)=9$

답 9

180

조건 (가), (나)에서 $f(0)=f(a)=0$이고

$f'(a)=0$이므로

함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-a)^2$이라 할 수 있다.

$f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$에서

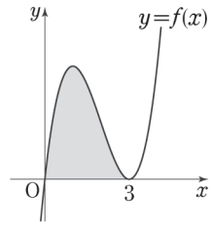
$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

$\quad=(x-a)(3x-a)$

$x=a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$일 때, $f'(x)=0$을 만족시킨다.

조건 (나)에서 $f'(1)=0$이므로 $1=\frac{a}{3}$에서 $a=3$

$f(x)=x(x-3)^2$



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 (x^3-6x^2+9x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

답 ④

181

$$\int_{-2}^1 (2x^5-4|x|+3)dx-\int_{-2}^{-1}(2x^5+4x+3)dx$$

$$=\left\{\int_{-2}^0 (2x^5+4x+3)dx+\int_0^1(2x^5-4x+3)dx\right\}$$

$$-\int_{-2}^{-1}(2x^5+4x+3)dx$$

$$=\int_{-2}^0 (2x^5+4x+3)dx+\int_0^1(2x^5-4x+3)dx$$

$$+\int_{-1}^{-2}(2x^5+4x+3)dx$$

$$=\int_{-1}^0 (2x^5+4x+3)dx+\int_0^1(2x^5-4x+3)dx$$

$$=\int_{-1}^1 (2x^5+3)dx+\int_{-1}^0 4x\,dx-\int_0^1 4x\,dx$$

$$=2\int_0^1 3\,dx+\int_{-1}^0 4x\,dx-\int_0^1 4x\,dx$$

$$=2\left[3x\right]_0^1+\left[2x^2\right]_{-1}^0-\left[2x^2\right]_0^1$$

$=6-2-2=2$

답 ②

182

함수 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\begin{cases}x^2+C_1 & (x\ge 0)\\ \frac{k}{3}x^3-kx^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x=0$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 0-} F(x)=\lim_{x\to 0+} F(x)=F(0)$에서
$C_1=C_2$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases} x^2+C_1 & (x\geq 0) \\ \frac{k}{3}x^3-kx^2+C_1 & (x<0) \end{cases}$$

이때 $F(3)-F(-1)=13$에서
$(9+C_1)-\left(-\frac{4}{3}k+C_1\right)=13$

$\frac{4}{3}k=4 \qquad \therefore\ k=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x\geq 0) \\ 3x^2-6x & (x<0) \end{cases}$이므로
$f(2)-f(-2)=4-24=-20$

다른풀이

함수 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$\begin{aligned} F(3)-F(-1)&=\Big[F(x)\Big]_{-1}^{3} \\ &=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \\ &=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx \\ &=\int_{-1}^{0} (kx^2-2kx)\,dx+\int_{0}^{3} 2x\,dx \\ &=\left[\frac{k}{3}x^3-kx^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^2\right]_{0}^{3} \\ &=\frac{4}{3}k+9=13 \end{aligned}$$

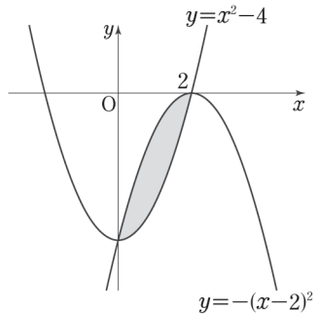
에서 $k=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x\geq 0) \\ 3x^2-6x & (x<0) \end{cases}$이므로
$f(2)-f(-2)=4-24=-20$

답 ⑤

183

$x^2-4=-(x-2)^2$에서
$2x(x-2)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는 참고

$$\int_0^2 \{-(x-2)^2-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ p+q=3+8=11$

답 11

참고

99쪽 단축Key 내용을 이용하면
구하는 넓이는 $\frac{|-2|(2-0)^3}{6}=\frac{8}{3}$이다.

184

조건 (가)에서

$$f(x)=\int (x^3-3x^2-4x)dx$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f'(x)=x^3-3x^2-4x=x(x+1)(x-4)$이므로
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$일 때 $f'(x)=0$이다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$C-\frac{3}{4}$	↗	C	↘	$C-32$	↗

이때 $C-\frac{3}{4}>C-32$이므로
함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $C-32$를 갖는다.
조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면
함수 $f(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 하므로
$C-32\geq 0$에서 $C\geq 32$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(0)=C$이므로 구하는 $f(0)$의 최솟값은 32이다.

답 32

185

시각 $t=0$일 때 동시에 점 $\mathrm{A}(1)$을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=2t-6$, $v_2(t)=-3t^2+5t$이므로

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=\int(2t-6)dt$$

$$=t^2-6t+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$$x_2(t)=\int(-3t^2+5t)dt$$

$$=-t^3+\frac{5}{2}t^2+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

이때 $x_1(0)=x_2(0)=1$이므로

$C_1=C_2=1$

$x_1(t)=t^2-6t+1$, $x_2(t)=-t^3+\frac{5}{2}t^2+1$

한편 두 속도가 같아지는 순간은

$2t-6=-3t^2+5t$에서

$3t^2-3t-6=0$

$3(t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t \geq 0)$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1(2)-x_2(2)|=|(-7)-3|=10$이다.

답 10

186

$$\int_1^x(t+1)f(t)dt=\{f(x)\}^2 \quad \cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+1)f(x)=2f(x)f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ $(\because\ f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수)

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\{f(1)\}^2$에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{3}{4}+C=0$, $C=-\frac{3}{4}$이고

$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$이다.

$\therefore\ f(5)=8$

답 ③

187

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\int_{-2}^{1}(x^2+ax+b)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-2}^{1}$$

$$=-\frac{3}{2}a+3b+3=0 \quad \cdots\cdots㉠$$

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}(x^2+ax+b)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{3}{2}a+3b+3=0 \quad \cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$이므로

$f(x)=x^2-1$

$\therefore\ f(4)=15$

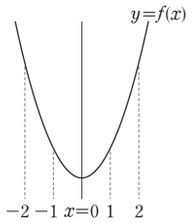
답 15

참고

$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx$에서

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$이므로

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx$이다.



따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=0$임을 직관적으로 파악할 수 있다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

188

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면

$f'(1)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3a(x-1)(x-2)$

$\quad=a(3x^2-9x+6)$

$f(x)=a\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+6x\right)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{5}{2}a+C=1$ ……㉠

$f(2)=2a+C=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ C=6$이다.

$\therefore\ f(x)=-2x^3+9x^2-12x+6$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^{2t}f(x)dx=\lim_{t\to0}\frac{F(2t)-F(0)}{t}$$

$$=2\lim_{t\to0}\frac{F(2t)-F(0)}{2t}$$

$$=2F'(0)=2f(0)$$

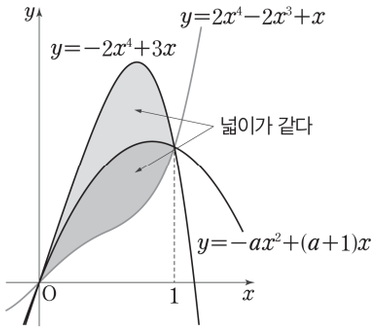
$$=2\times6=12$$

답 ②

189

두 곡선 $y=-2x^4+3x$, $y=2x^4-2x^3+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

두 곡선 $y=-ax^2+(a+1)x$, $y=2x^4-2x^3+x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



따라서

$$\int_0^1\{(-2x^4+3x)-(2x^4-2x^3+x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-ax^2+ax+x)-(2x^4-2x^3+x)\}dx$$

이므로

$$\int_0^1(-4x^4+2x^3+2x)dx$$

$$=\int_0^1(-4x^4+4x^3-2ax^2+2ax)dx$$

에서

$$\int_0^1(2x^3-2ax^2+2ax-2x)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}ax^3+ax^2-x^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

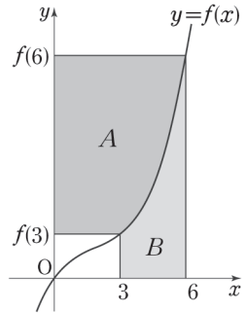
답 ③

190

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로

함수 $f(x)$는 일대일대응이며 역함수가 존재하고,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$\int_{f(3)}^{f(6)}f^{-1}(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(3)$, $y=f(6)$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 그림에서 영역 A의 넓이와 같고

$\int_3^6f(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 그림에서 영역 B의 넓이와 같다.

따라서 $\int_3^6f(x)dx+\int_{f(3)}^{f(6)}f^{-1}(x)dx$의 값은 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 $f(6)$인 직사각형의 넓이에서 가로의 길이가 3이고 세로의 길이가 $f(3)$인 직사각형의 넓이를 뺀 값과 같으므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\int_3^6 f(x)dx+\int_{f(3)}^{f(6)} f^{-1}(x)dx=6f(6)-3f(3)$$
$$=6f(6)-6=54$$

에서 $6f(6)=60$

$\therefore\ f(6)=10$

답 10

191

$f(x)=\int_{-1}^{x} t(t-2)(t-a)dt$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-2)(x-a)$

이때 $f'(3)=18$이므로

$3(3-a)=18$에서

$a=-3$

$\therefore\ f(0)=\int_{-1}^{0} t(t-2)(t+3)dt$

$=\int_{-1}^{0}(t^3+t^2-6t)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{37}{12}$

답 ②

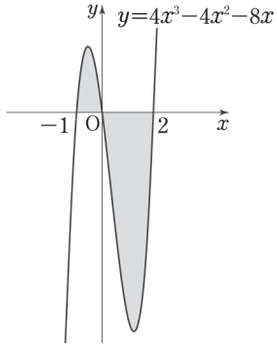
192

$4x^3-4x^2-8x=0$에서

$4x(x-2)(x+1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차함수 $y=4x^3-4x^2-8x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(4x^3-4x^2-8x)dx+\int_{0}^{2}-(4x^3-4x^2-8x)dx$

$=\left[x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{-1}^{0}-\left[x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{5}{3}-\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{37}{3}$

답 ⑤

193

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(ax+3)^2dx$

$=\int_{-1}^{1}(a^2x^2+6ax+9)dx$

$=2a^2\int_0^1 x^2dx+2\int_0^1 9dx$

$=2a^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\left[9x\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}a^2+18$

$\left\{\int_{-1}^{1} f(x)dx\right\}^2=\left\{\int_{-1}^{1}(ax+3)dx\right\}^2$

$=\left\{2\int_0^1 3\,dx\right\}^2$

$=\left\{2\left[3x\right]_0^1\right\}^2=36$

따라서 $\frac{2}{3}a^2+18=36$이므로 $a^2=27$

$\therefore\ a=3\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

답 ⑤

194

$|x+1|+|x-1|=\begin{cases}-2x & (x\le -1)\\ 2 & (-1<x\le 1)\\ 2x & (x>1)\end{cases}$이다.

$\therefore\ \int_{-2}^{2}(|x+1|+|x-1|)dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-2x)dx+\int_{-1}^{1}2dx+\int_{1}^{2}2xdx$

$=\left[-x^2\right]_{-2}^{-1}+2\left[2x\right]_0^1+\left[x^2\right]_1^2$

$=3+4+3=10$

답 10

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

195

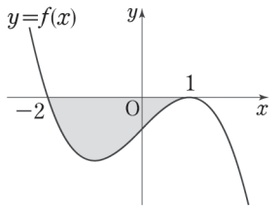
$f'(x)=-x^2+1$이므로

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로 $-\frac{1}{3}+1+C=0,\ C=-\frac{2}{3}$

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x-\frac{2}{3}$

$=-\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2)$



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{1}\{-f(x)\}dx=\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}\right)dx$

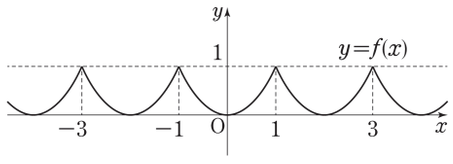
$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{4}$

$\therefore\ p+q=4+9=13$

답 13

196

두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$이므로

$g(k+6)-g(k)=\int_{1}^{k+6}f(t)\,dt-\int_{1}^{k}f(t)\,dt$

$=\int_{1}^{k+6}f(t)\,dt+\int_{k}^{1}f(t)\,dt$

$=\int_{k}^{k+6}f(t)\,dt=6\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

$=6\int_{0}^{1}t^2\,dt=6\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1}$

$=6\times\frac{1}{3}=2$

답 ③

197

조건 (가)에서

$f(-1)=f(0)=f(4)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-k=x(x+1)(x-4)$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2-4x+k$

$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}(x^3-3x^2-4x+k)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2+kx\right]_{0}^{2}$

$=4-8-8+2k=2k-12$

조건 (나)에서 $\int_{0}^{2}f(x)dx=4$이므로

$2k-12=4$

$\therefore\ k=8$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-4x+8$이므로

$f(1)=1-3-4+8=2$

답 ④

198

$g(x)=-\int_{-2}^{x}f(t)dt$에서

$g'(x)=-f(x)=\frac{1}{16}x^2(x-1)(x-2)$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$일 때 $g'(x)=0$이다.

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

$g(2)=-\int_{-2}^{2}f(t)dt$

$=-\int_{-2}^{2}\frac{1}{16}(-t^4+3t^3-2t^2)dt$

$=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}(t^4+2t^2)dt$

$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{2}=\frac{22}{15}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $\frac{22}{15}$를 갖는다.

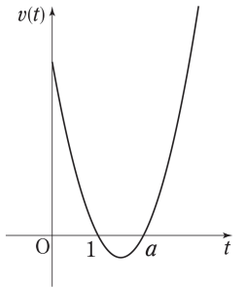
$\therefore\ p+q=15+22=37$

답 37

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

199

$v(t)=6t^2-6(a+1)t+6a=6(t-1)(t-a)$에서
$t=1$ 또는 $t=a$일 때 $v(t)=0$이다.



이때 $a>1$이므로
점 P는 $t=1$일 때 첫 번째로 운동 방향이 바뀌고,
$t=a$일 때 두 번째로 운동 방향이 바뀐다.
즉, 점 P가 출발한 후,
첫 번째로 운동 방향이 바뀌는 순간부터
두 번째로 운동 방향이 바뀌는 순간까지 움직인 거리는

$$\int_1^a |v(t)|\,dt=\int_1^a \{-v(t)\}dt$$
$$=\int_1^a \{-6t^2+6(a+1)t-6a\}dt$$
$$=\left[-2t^3+3(a+1)t^2-6at\right]_1^a$$
$$=\{-2a^3+3a^2(a+1)-6a^2\}-\{-2+3(a+1)-6a\}$$
$$=a^3-3a^2+3a-1$$

이 거리가 1이므로
$a^3-3a^2+3a-1=1,\ (a-2)(a^2-a+1)=0$
$\therefore\ a=2$

답 ①

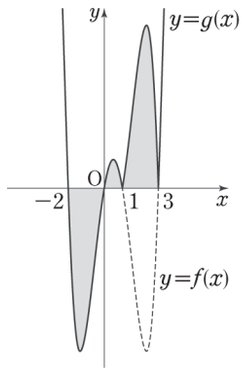
200

$f(x)=x(x+2)(x-1)(x-3)$에서
$f(1-x)=(1-x)(3-x)(-x)(-2-x)$
$=x(x+2)(x-1)(x-3)=f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

이때 $-2\le x\le 0$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로
둘러싸인 부분의 넓이와
$1\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인
부분의 넓이는 서로 같으므로

$$-\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_1^3 \{-f(x)\}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$



$$\int_{-2}^3 g(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 \{-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx\ (\because\ ㉠)$$
$$=\int_0^1 (x^4-2x^3-5x^2+6x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{31}{30}$$

$\therefore\ p+q=30+31=61$

답 61

201

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로
함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

$\int_{-4}^{-1} f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx=4$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^4 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx$$
$$=8-4=4$$

답 ②

202

$f(x)=x\int_2^x (3t^2-4t+1)dt$의

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_2^x(3t^2-4t+1)\,dt+x(3x^2-4x+1)$$

이므로

$$f'(2)=0+10=10$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$

$$=2f'(2)=20$$

답 ⑤

203

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2+ax+b)dx$$

$$=2\int_0^1(3x^2+b)dx=2\Big[x^3+bx\Big]_0^1$$

$$=2(1+b)=2+2b \qquad \cdots\cdots㉠$$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x^3+ax^2+bx)dx$$

$$=2\int_0^1ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}a \qquad \cdots\cdots㉡$$

㉠=㉡이므로

$$2+2b=\frac{2}{3}a$$

$$\therefore\ b=\frac{a}{3}-1$$

따라서 $f(x)=3x^2+ax+\frac{a}{3}-1$이므로

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{a}{3}+\frac{a}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

답 ②

204

$$x^2+2|x|-8=\begin{cases}x^2+2x-8\ (x\ge0)\\ x^2-2x-8\ (x<0)\end{cases}$$이므로

곡선 $y=x^2+2|x|-8$과 x축의 교점의 x좌표를 구간을 나누어 구해 보자.

(i) $x\ge0$일 때, $x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0$

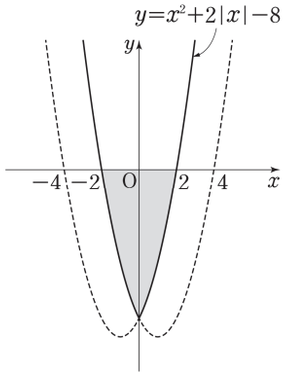
$\therefore\ x=2\ (\because\ x\ge0)$

(ii) $x<0$일 때, $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2\ (\because\ x<0)$

(i), (ii)에 의하여 곡선 $y=x^2+2|x|-8$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 이 곡선은 y축에 대하여 대칭이므로

$$S=-2\int_0^2(x^2+2x-8)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-8x\right]_0^2$$

$$=-2\times\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=\frac{56}{3}$$

$$\therefore\ 3S=3\times\frac{56}{3}=56$$

답 56

205

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 8이므로

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$8+\int_0^2v(t)dt=8+\int_0^2(3t^2-4t+m)dt$$

$$=8+\Big[t^3-2t^2+mt\Big]_0^2$$

$$=8+(8-8+2m)=2m+8$$

이때 시각 $t=2$에서 점 P의 위치가 0이므로

$2m+8=0$

$\therefore\ m=-4$

즉, $v(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$이므로

구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\le0$,

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

구간 $[2, 3]$에서 $v(t) \geq 0$이다.

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 |v(t)|\,dt$$

$$= \int_1^2 (-3t^2+4t+4)dt + \int_2^3 (3t^2-4t-4)dt$$

$$= \Big[-t^3+2t^2+4t\Big]_1^2 + \Big[t^3-2t^2-4t\Big]_2^3$$

$$= (-8+8+8)-(-1+2+4)+(27-18-12)$$
$$-(8-8-8)$$

$$= 8$$

답 ④

206

조건 (가)의 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=4$에서 극한값이 존재하고

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(0)=2$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=4$$

한편 조건 (나)의 $f(x)=(x^2+1)\int g(x)\,dx$ ……㉠

에서 $g(x)$의 차수를 n (n은 자연수)이라 하면

$\int g(x)\,dx$의 차수는 $n+1$이므로

$(x^2+1)\int g(x)\,dx$의 차수는 $n+3$이다.

이때 함수 $f(x)$의 차수가 4이므로 ㉠의 양변의 차수를 비교하면

$4=n+3$ $\therefore\ n=1$

즉, 함수 $g(x)$는 일차함수이므로

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓을 수 있다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x\int g(x)\,dx+(x^2+1)g(x)$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0+g(0)$ $\therefore\ b=4$ ($\because\ f'(0)=4$)

$$f(x)=(x^2+1)\int (ax+4)\,dx$$

$$=(x^2+1)\left(\frac{1}{2}ax^2+4x+C\right)$$ (단, C는 적분상수)

이고 $f(0)=2$이므로 $C=2$

또한 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$\dfrac{1}{2}a=1$ $\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(x)=(x^2+1)(x^2+4x+2)$, $g(x)=2x+4$

$\therefore\ f(-1)+g(1)=-2+6=4$

답 ④

207

$\int_0^1 g(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면 ……㉠

조건 (가)에서 $f(x)=6x-2k$

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$g(x)=\int f(x)dx=\int(6x-2k)dx$$

$$=3x^2-2kx+C$$ (단, C는 적분상수)

$g(0)=C$, $g(1)=3-2k+C$이고

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1(3t^2-2kt+C)dt$$

$$=\Big[t^3-kt^2+Ct\Big]_0^1$$

$$=1-k+C$$ ……㉡

이므로 조건 (나)에 대입하면

$C+(1-k+C)=3-2k+C$

$\therefore\ C=2-k$

이를 ㉡에 대입하면

$$\int_0^1 g(t)dt=1-k+(2-k)=3-2k$$ ……㉢

㉠=㉢이므로

$k=3-2k$

$\therefore\ k=1,\ C=1$

따라서 $g(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2(3x^2-2x+1)dx$$

$$=\Big[x^3-x^2+x\Big]_0^2$$

$$=8-4+2=6$$

답 ③

208

조건 (가), (나)에 의하여

$x<3$일 때 $f'(x)\leq 0$, $x>3$일 때 $f'(x)\geq 0$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \int_0^4 |f'(x)|dx = \int_0^3 |f'(x)|dx + \int_3^4 |f'(x)|dx$$
$$= -\int_0^3 f'(x)dx + \int_3^4 f'(x)dx$$
$$= -\Big[f(x)\Big]_0^3 + \Big[f(x)\Big]_3^4$$
$$= -\{f(3)-f(0)\} + f(4) - f(3)$$
$$= f(0) + f(4) - 2f(3)$$
$$= 11 + 11 - 2\times(-16)$$
$$= 22 + 32 = 54$$

답 54

참고

문제에서 주어진 조건에 의하여
$f'(3)=0$, $f(3)=-16$, $f(0)=f(4)=11$이므로
조건을 만족시키는 사차함수 $f(x)$ 중
최고차항의 계수가 1인 사차함수는
$f(x)=x^4-4x^3+11$이다.

209

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t+1)f(t)dt = 8$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\int_{-1}^{x}(t+1)f(t)dt = 0$에서

$\int_{-1}^{1}(t+1)f(t)dt = 0$이다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립하므로

$f(x)$는 짝수차항 또는 상수항의 합으로 이루어진 식이고,

$xf(x)$는 홀수차항의 합으로 이루어진 식이다.

$$\int_{-1}^{1}(t+1)f(t)dt = \int_{-1}^{1}tf(t)dt + \int_{-1}^{1}f(t)dt$$
$$= 0 + 2\int_0^1 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^1 f(t)dt = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한

$$\int_{-1}^{x}(t+1)f(t)dt$$
$$= \int_{-1}^{1}(t+1)f(t)dt + \int_1^x (t+1)f(t)dt$$
$$= \int_1^x (t+1)f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 함수 $(x+1)f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t+1)f(t)dt$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (t+1)f(t)dt \ (\because ㉡)$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F'(1)$$
$$= 2f(1) = 8$$
$$\therefore f(1) = 4$$

이때 $f(x)=ax^2+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(1)=a+b=4$이고

㉠에서

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (at^2+b)dt = \Big[\frac{a}{3}t^3+bt\Big]_0^1$$
$$= \frac{a}{3}+b = 0$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-2$, $f(x)=6x^2-2$

$\therefore f(2)=22$

답 ②

210

$f(0)=f(3)=0$이므로

$f(x)=ax(x-3)$ (단, $a>0$)이라 놓을 수 있다.

이때 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$f(0)=g(0)$, $f(k)=g(k)$에서

$h(0)=h(k)=0$이므로

$h(x)=ax(x-k)$이다.

$$S_1 = -\int_0^3 ax(x-3)dx$$
$$= -\Big[\frac{a}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2\Big]_0^3 = \frac{9}{2}a$$

$$S_2 = -\int_0^k ax(x-k)dx - S_1$$
$$= -\Big[\frac{a}{3}x^3 - \frac{ak}{2}x^2\Big]_0^k - \frac{9}{2}a$$
$$= \frac{k^3}{6}a - \frac{9}{2}a$$ 참고

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $\frac{S_2}{S_1}=7$, 즉 $S_2=7S_1$이므로

$\frac{k^3}{6}a-\frac{9}{2}a=7\times\frac{9}{2}a$에서 $k^3=6^3$ ($\because$ $a\neq 0$)

$\therefore$ $k=6$

$S_2+S_3=\frac{1}{2}\times k\times f(k)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 18a=54a$

$\therefore$ $\frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{54a}{\frac{9}{2}a}=12$

답 12

참고

99쪽의 단축Key 의 내용을 이용하면

$S_1=\frac{a(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}a$,

$S_2=\frac{a(k-0)^3}{6}-\frac{9}{2}a=\frac{k^3}{6}a-\frac{9}{2}a$이다.

211

$\int_2^x\{f(t)-g(t)\}dt=\frac{3}{2}x^2+3x-12$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-g(x)=3x+3$ ……㉠

$\int_{-2}^x\{f(t)+g(t)\}dt=x^3-3x+2$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=3x^2-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}x(x+1)$,

$g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3=\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$이다.

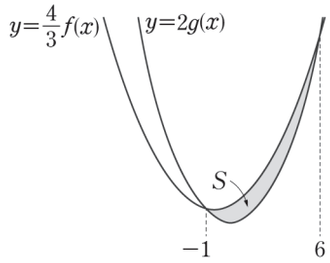
두 함수 $y=\frac{4}{3}f(x)$, $y=2g(x)$의 그래프의 교점의

x좌표는 방정식 $\frac{4}{3}f(x)=2g(x)$에서

$\frac{4}{3}f(x)-2g(x)=2x(x+1)-3(x+1)(x-2)$

$=-(x+1)(x-6)=0$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=6$이다.



따라서 구하는 넓이는 참고

$S=\int_{-1}^6(-x^2+5x+6)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x\right]_{-1}^6$

$=\frac{343}{6}$

$\therefore$ $6S=6\times\frac{343}{6}=343$

답 343

참고

99쪽 단축Key 내용을 이용하면

구하는 넓이는 $S=\frac{|-1|\{6-(-1)\}^3}{6}=\frac{343}{6}$이다.

212

$\int_{-t}^t f(x)\,dx$

$=\int_{-t}^0(-3x-3)dx+\int_0^t(x^2-2x-3)dx$

$=\left[-\frac{3}{2}x^2-3x\right]_{-t}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_0^t$

$=-\left(-\frac{3}{2}t^2+3t\right)+\left(\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right)$

$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-6t$

$F(t)=\int_{-t}^t f(x)dx$

$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-6t$

라 하면

$F'(t)=t^2+t-6=(t+3)(t-2)$

$t=-3$ 또는 $t=2$일 때 $F'(t)=0$이므로 $t>0$에서

함수 $F(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$
$F(t)$	0	↘	$-\frac{22}{3}$	↗

함수 $F(t)$는 $t=2$일 때 최솟값 $-\frac{22}{3}$를 가지므로

$a=2,\ b=-\frac{22}{3}$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=\left(-\frac{22}{3}\right)\div 2=-\frac{11}{3}$

답 ②

213

$f(x)=x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

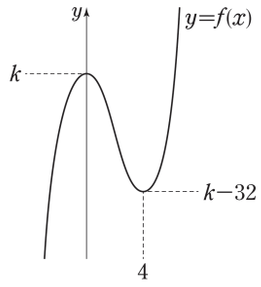
$x=0$ 또는 $x=4$일 때 $f'(x)=0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $a=0,\ b=4$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=k$,

극솟값은 $f(4)=k-32$이다.



$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^4(x^3-6x^2+k)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+kx\right]_0^4$$
$$=64-128+4k$$
$$=4k-64$$

이므로 $\int_a^b f(x)dx>0$에서

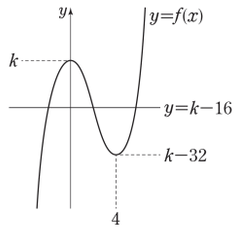
$4k-64>0$

$\therefore\ k>16$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 17이다.

답 17

참고



위의 그림에서 $k-16=0$, 즉 $k=16$일 때

x축은 직선 $y=k-16$이 되므로 $\int_a^b f(x)dx=0$이다.

$k-16>0$, 즉 $k>16$일 때

x축은 직선 $y=k-16$보다 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx>0$이다.

$k-16<0$, 즉 $k<16$일 때

x축은 직선 $y=k-16$보다 위에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx<0$이다.

214

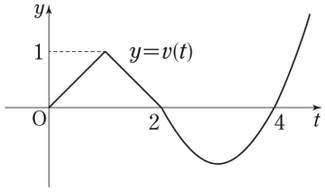
$t=2$에서 점 P의 속도는

$v(2)=-|2-1|+1=0$

이므로 $t\geq 2$일 때 $v(t)$는

$$v(t)=0+\int_2^t a(t)\,dt=\int_2^t(2t-6)\,dt$$
$$=\left[t^2-6t\right]_2^t=t^2-6t+8$$

$$\therefore\ v(t)=\begin{cases}-|t-1|+1 & (0\leq t\leq 2)\\ t^2-6t+8 & (t\geq 2)\end{cases}$$



$0\leq t\leq 2$일 때 $v(t)\geq 0$, $2\leq t\leq 4$일 때 $v(t)\leq 0$

이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^2|v(t)|\,dt+\int_2^4|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^4 v(t)\,dt$$
$$=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^4(t^2-6t+8)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times 1-\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_2^4$$
$$=1-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{7}{3}$$

답 ②

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

215

$\{f(x)\}^2+6\int_0^x f(t)dt=x^4+8x^3+18x^2$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2=0$이므로 $f(0)=0$이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)+6f(x)=4x^3+24x^2+36x$

$f(x)\{f'(x)+3\}=2x(x+3)^2$ ……㉡

이때 $f(x)$를 n차식이라고 하면,

$f'(x)+3$은 $(n-1)$차식이므로

㉡의 좌변은 $n+(n-1)=2n-1$, 즉 $(2n-1)$차식이다.

또한 우변은 3차식이므로

$2n-1=3$에서 $n=2$, 즉 $f(x)$는 이차식이다.

따라서 ㉡에서 $f(x)$는 $x(x+3)$ 또는 $(x+3)^2$을 인수로 가져야 한다.

이때 $f(0)=0$이므로

$f(x)=ax(x+3)$ (단, $a\neq0$) 꼴이다.

$f'(x)=2ax+3a$이므로 $f'(x)+3=2ax+3a+3$

이때 ㉡에서 $f'(x)+3$이 $x+3$을 인수로 가져야 하므로

인수정리에 의하여 $f'(-3)+3=0$에서

$-6a+3a+3=0$, $a=1$이다.

$\therefore\ f(x)=x(x+3)$

$\therefore\ f(1)=4$

답 ④

216

$f(2-x)=-f(2+x)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)=-f(2)$ $\quad\therefore\ f(2)=0$

즉, $f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(3)-f(1)=-6$이고,

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=-f(3)$이므로

$f(1)=3$, $f(3)=-3$

$f(1)=3$에서 $-(1+a+b)=3$

$\therefore\ a+b=-4$ ……㉡

$f(3)=-3$에서 $9+3a+b=-3$

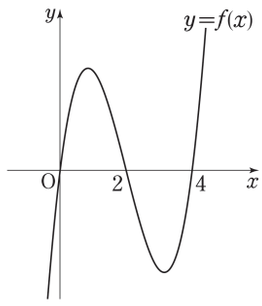
$\therefore\ 3a+b=-12$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=0$

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x^2-4x)=x(x-2)(x-4)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$\int_2^x f(t)\,dt$는 $x=4$에서 최솟값을 갖는다.



따라서 $\int_2^x f(t)\,dt$의 최솟값은

$\int_2^4 f(t)\,dt=\int_2^4(t^3-6t^2+8t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_2^4=-4$

답 ②

217

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=(x-1)^2+a=x^2-2x+a+1$ (단, a는 상수)

이라 하자.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$

$=F'(0)=f(0)=a+1=2$

이므로 $a=1$, $f(x)=x^2-2x+2$

$\therefore\ f(5)=17$

답 17

218

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이다.

이때 $f'(0)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6x)dx$

$=2x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(0)=C$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+f(0)$

(i) $x\le 0$일 때

$g(x)=f(x)-f(0)=2x^3-3x^2$

(ii) $x>0$일 때

$g(x)=f(x+1)-f(1)$

$=\{2(x+1)^3-3(x+1)^2+f(0)\}-\{2-3+f(0)\}$

$=2x^3+3x^2$

(i), (ii)에 의하여 $g(x)=\begin{cases}2x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ 2x^3+3x^2 & (x>0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1}|g(x)|dx$

$=\int_{-1}^{0}|g(x)|dx+\int_{0}^{1}|g(x)|dx$

$=\int_{-1}^{0}|2x^3-3x^2|dx+\int_{0}^{1}|2x^3+3x^2|dx$

$=\int_{-1}^{0}(-2x^3+3x^2)dx+\int_{0}^{1}(2x^3+3x^2)dx$

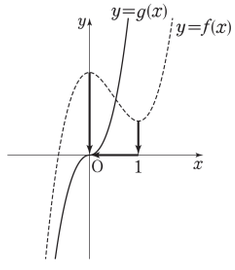
$=\left[-\frac{1}{2}x^4+x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^4+x^3\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)=3$

답 ②

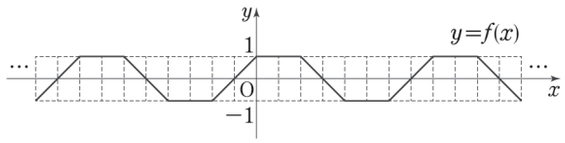
참고

$x\le 0$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는
곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼
평행이동시킨 후 $x\le 0$인 부분만 남긴 것이다.
또한 $x>0$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는
곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동시킨 후
$x>0$인 부분만 남긴 것이다.
이때 $f'(x)=6x(x-1)$에서 함수 $f(x)$는
$x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$에서
$x\le 0$인 부분에서 극대인 점 $(0,\ f(0))$과
$x>0$인 부분에서 극소인 점 $(1,\ f(1))$을 원점으로
각각 평행이동시켜 이어붙인 모양이다.



219

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(2-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는
직선 $x=1$에 대하여 대칭이고,
$f(x)=-f(-2-x)$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ f(-1))$,
즉 $(-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고,
주기는 8이다.



이때 모든 정수 n에 대하여

$\int_{n}^{n+8}f(x)dx=0$이므로

$\int_{-30}^{30}f(x)dx$

$=\int_{-30}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{6}f(x)dx+\int_{6}^{30}f(x)dx$

$=0+(-2)+0=-2$

답 ①

220

주어진 그림에서 $f'(-2)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=a(x+2)(x-2)=a(x^2-4)$ (단, a는 상수)

이때 $f'(0)=-4$이므로

$-4a=-4,\ a=1$

$\therefore\ f'(x)=x^2-4$

$f(x)=\int(x^2-4)dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C_1$

(단, C_1은 적분상수)

주어진 조건에서 $f(0)=0$이므로 $C_1=0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

$g(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\{xf(x)\}\right]dx$

$=xf(x)+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$=\frac{1}{3}x^4-4x^2+C_2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$g'(x)=\frac{4}{3}x^3-8x=\frac{4}{3}x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$

$x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{6}$ 일 때

$g'(x)=0$이다.

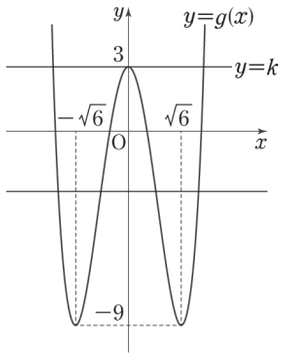
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	C_2-12	↗	C_2	↘	C_2-12	↗

함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 3을 가지므로

$g(0)=C_2=3$이고

$x=-\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$ 일 때 극솟값 $C_2-12=-9$를 갖는다.



방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이려면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3 이상이어야 하므로 $-9<k\le 3$이다.

이 중 정수 k는 $-8, -7, -6, \cdots, 1, 2, 3$이므로

구하는 모든 정수 k의 값의 합은 -30이다.

답 ③

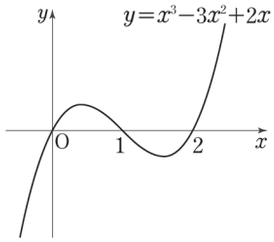
221

$x^3-3x^2+2x=0$에서

$x(x-1)(x-2)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이고

$1<x\le 2$일 때 $f(x)\le 0$이다.

$\therefore \int_0^2\{|f(x)|+f(x)\}dx$

$=\int_0^1\{f(x)+f(x)\}dx+\int_1^2\{-f(x)+f(x)\}dx$

$=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

답 ③

222

직선 $y=ax+b$가 점 $(3, f(3))$을 지나고

$f(x)=(x+1)(x-2)^2$에서 $f(3)=4$이므로

$3a+b=4$ ……㉠

또한 $S_1=S_2$이므로

$\int_0^3\{f(x)-(ax+b)\}dx=0$이다. TIP

$\int_0^3\{x^3-3x^2+4-(ax+b)\}dx$

$=\int_0^3(x^3-3x^2-ax-b+4)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{a}{2}x^2+(4-b)x\right]_0^3$

$=\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}a+3(4-b)=0$

에서 $6a+4b=7$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

답 ②

TIP

$\int_0^3\{f(x)-(ax+b)\}dx=0$은 다음과 같은 두 가지 방법으로 알 수 있다.

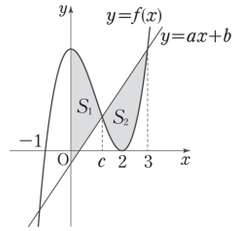
(1) 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax+b$의 한 교점의 x좌표를 c $(0<c<2)$라 하자.

이때 $S_1=S_2$이고

$S_1=\int_0^c\{f(x)-(ax+b)\}dx$,

$S_2=\int_c^3\{(ax+b)-f(x)\}dx$

이므로



<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$S_1 - S_2$

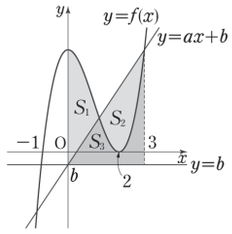
$= \int_0^c \{f(x) - (ax+b)\}dx - \int_c^3 \{(ax+b) - f(x)\}dx$

$= \int_0^c \{f(x) - (ax+b)\}dx + \int_c^3 \{f(x) - (ax+b)\}dx$

$= \int_0^3 \{f(x) - (ax+b)\}dx = 0$

이다.

(2) 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$, 직선 $y = ax + b$의 아랫부분과 두 직선 $x = 3$, $y = b$로 둘러싸인 부분을 S_3이라 하자.



이때 $S_1 + S_3 = S_2 + S_3$이고

$S_1 + S_3 = \int_0^3 \{f(x) - b\}dx$,

$S_2 + S_3 = \int_0^3 (ax + b - b)dx$

이므로

$\int_0^3 \{f(x) - b\}dx = \int_0^3 (ax + b - b)dx$에서

$\int_0^3 \{f(x) - b\}dx - \int_0^3 (ax + b - b)dx$

$= \int_0^3 \{f(x) - (ax+b)\}dx = 0$

이다.

223

$g(x) = \int xf'(x)dx$에서

함수 $f(x)$를 n차식이라 하면

함수 $f'(x)$는 $(n-1)$차식이므로

함수 $xf'(x)$는 n차식이고,

따라서 함수 $g(x)$는 $(n+1)$차식이다.

이때 $f(x)g(x) = 2x^3 + 2x^2 + 6x + 6$에서

$n + (n+1) = 3$이므로 $n = 1$이다.

$f(x) = ax + b$ (단, a, b는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$f'(1) = 2$이므로 $a = 2$

$g(x) = \int xf'(x)dx$

$= \int 2xdx$

$= x^2 + C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)g(x) = (2x+b)(x^2 + C)$

$= 2x^3 + bx^2 + 2Cx + bC$

에서 $b = 2$, $C = 3$이므로

$f(x) = 2x + 2$이다.

$\therefore\ f(1) = 4$

다른풀이

$g(x) = \int xf'(x)dx$에서 $g'(x) = xf'(x)$이므로

$f'(1) = 2$에서 $g'(1) = 2$이다. ……㉠

한편 $f(x)g(x) = 2x^3 + 2x^2 + 6x + 6$에서

$x = 1$을 대입하면 $f(1)g(1) = 16$ ……㉡

$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 6x^2 + 4x + 6$에서

$x = 1$을 대입하면 $f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 16$

㉠에 의하여 $f(1) + g(1) = 8$이므로 ……㉢

㉡, ㉢에서 $f(1) = g(1) = 4$이다.

답 4

224

$f(x) = \begin{cases} -2 & (x < 1) \\ -x + 3 & (x \geq 1) \end{cases}$이고

$g(x) = \int_{-1}^{x} (t-1)f(t)dt$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = (x-1)f(x)$이므로

$g'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & (x < 1) \\ -(x-1)(x-3) & (x > 1) \end{cases}$

$x = 1$ 또는 $x = 3$에서 $g'(x) = 0$이므로

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	3	…
$g'(x)$	+	0	+	0	−
$g(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x = 3$에서 극대이면서 최대이다.

한편 $g'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (x < 1) \\ -x^2 + 4x - 3 & (x > 1) \end{cases}$에서

$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + C_1 & (x < 1) \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이고, ㉠의 양변에 $x = -1$을 대입하면

$g(-1) = 0$이므로

$-1 - 2 + C_1 = 0$에서 $C_1 = 3$

함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1+} g(x) = g(1)$에서

$4 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + C_2$에서 $C_2 = \frac{16}{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$g(x)=\begin{cases} -x^2+2x+3 & (x<1) \\ -\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+\frac{16}{3} & (x\geq 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(3)=\frac{16}{3}$이다.

다른풀이

$f(x)=\begin{cases} -2 & (x<1) \\ -x+3 & (x\geq 1) \end{cases}$이고

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$ ……㉠

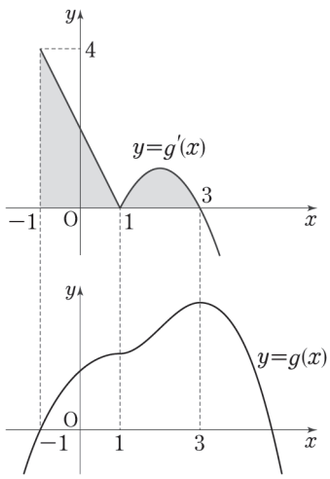
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-1)f(x)$

$=\begin{cases} -2(x-1) & (x<1) \\ -(x-1)(x-3) & (x>1) \end{cases}$

이고, ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $g(-1)=0$이므로

두 함수 $y=g'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은

$g(3)=\int_{-1}^{3}(t-1)f(t)dt=\int_{-1}^{3}g'(t)dt$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 4+\frac{|-1|(3-1)^3}{6}=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

이다.

답 ③

225

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

서로 접해야 하므로

곡선 $y=x^3-2x^2-3x$의 기울기가 1인 접선이

직선 $y=x+k$이면 된다.

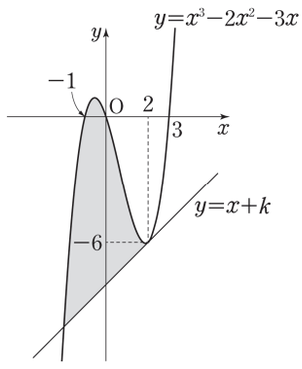
$f(x)=x^3-2x^2-3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x-3$이므로

$3x^2-4x-3=1$에서 $3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$



이때 $k<0$이므로 $f(2)=8-8-6=-6$에서

$-6=2+k$

$\therefore\ k=-8$

$x^3-2x^2-3x=x-8$에서

$(x+2)(x-2)^2=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2-3x$와 직선 $y=x-8$로

둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{2}\{(x^3-2x^2-3x)-(x-8)\}dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx$

$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$

$=2\times\left(-\frac{16}{3}+16\right)=\frac{64}{3}$

답 ⑤

226

조건 (가)에서 $f(x)=f(x-1)+2$이므로

$\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{2}^{4}\{f(x-1)+2\}dx$

$=\int_{1}^{3}\{f(x)+2\}dx$

$=\int_{1}^{3}\{f(x-1)+2+2\}dx$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$= \int_0^2 \{f(x)+4\}dx$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_0^2 4\,dx$$

$$= 1 + \int_1^2 \{f(x-1)+2\}dx + 8$$

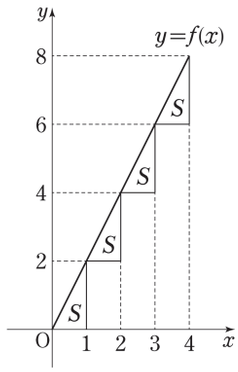
$$= \int_0^1 \{f(x)+2\}dx + 9$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2\,dx + 9$$

$$= 1+2+9 = 12$$

다른풀이

$S = \int_0^1 f(x)\,dx$로 놓으면 $S=1$이고, $0 \le x \le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$\therefore \int_2^4 f(x)\,dx = 2S + 1\times 4 + 1\times 6 = 12$

답 ③

227

조건 (가)에서 $(x-1)f(x) = -5x+5+2\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x) = -5+2f(x)$

$f(x) = (x-1)f'(x)+5$ ……㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(a는 상수, $a \neq 0$)이라 하면 함수 $(x-1)f'(x)+5$의 최고차항은

$x \times anx^{n-1} = anx^n$

이때 ㉠의 양변의 최고차항의 계수가 서로 같아야 하므로

$a = an$

$\therefore\ n=1\ (\because\ a \neq 0)$

즉, $f(x)$는 일차함수이어야 하므로

$f(x) = ax+b$ (b는 상수)라 하자.

$f'(x) = a$이므로 ㉠에 대입하면

$ax+b = (x-1)\times a + 5$, $ax+b = ax+5-a$

$\therefore\ b = 5-a$ ……㉡

한편 조건 (나)에 $f(x) = ax+b$를 대입하면

$$\int_{-1}^1 x f(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2+bx)dx$$

$$= 2\int_0^1 ax^2 dx = 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}a = 2$$

$\therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 $f(x) = 3x+2$이므로 $f(3) = 11$

답 11

228

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시키므로

$f(x) = x^4 + ax^2 + b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f'(x) = 4x^3 + 2ax$

또한 다항함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(-x) = -g(x)$를 만족시키므로

$g(x)$는 홀수차항의 합으로 이루어진 다항식이고, $g'(x)$는 짝수차항 또는 상수항의 합으로 이루어진 다항식이다.

또한 $x=0$을 대입하면 $g(0) = -g(0)$이므로

$g(0) = 0$이다.

따라서 $xf'(x)$와 $-2g'(x)$는 짝수차항 또는 상수항의 합, $xg'(x)$와 $-2f'(x)$는 홀수차항의 합으로 이루어진 다항식이다.

$$\int_{-1}^1 (x-2)\{f'(x)+g'(x)\}dx$$

$$= 2\int_0^1 \{xf'(x)-2g'(x)\}dx$$

$$= 2\int_0^1 (4x^4+2ax^2)dx - 4\int_0^1 g'(x)dx$$

$$= 2\left[\frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}ax^3\right]_0^1 - 4\Big[g(x)\Big]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}a\right) - 4\{g(1)-g(0)\}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$= \frac{8}{5} + \frac{4}{3}a - 4\{-g(-1) - 0\}$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{4}{3}a - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}a + \frac{18}{5} = -\frac{2}{5}$$

$\therefore\ a = -3$

이때 $f(-1) = -1$이므로 $f(x) = x^4 - 3x^2 + b$에서

$f(-1) = 1 - 3 + b = -1,\ b = 1$이고

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$이다.

$\therefore\ f(2) = 5$

답 ⑤

229

$v(0) = 3a > 0$이고, 점 P가 출발한 후에는 운동 방향을 바꾸지 않으므로 $t > 0$에서 $v(t) \geq 0$이다.

$$v(t) = 3t^2 - 4at + 3a = 3\left(t - \frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{4}{3}a^2 + 3a$$

이므로 함수 $v(t)$는 $t = \frac{2}{3}a$에서 최솟값 $-\frac{4}{3}a^2 + 3a$를 가진다.

즉, $-\frac{4}{3}a^2 + 3a \geq 0$이어야 하므로

$$\frac{4}{3}a^2 - 3a \leq 0,\ a(4a - 9) \leq 0$$

$$\therefore\ 0 < a \leq \frac{9}{4}\ (\because\ a > 0)$$

한편 점 P가 시각 $t = 0$에서 $t = a$까지 움직인 거리는

$$\int_0^a |v(t)|\,dt = \int_0^a v(t)\,dt\ (\because\ v(t) \geq 0)$$

$$= \int_0^a (3t^2 - 4at + 3a)\,dt$$

$$= \left[t^3 - 2at^2 + 3at\right]_0^a$$

$$= -a^3 + 3a^2$$

$s(a) = -a^3 + 3a^2$으로 놓으면

$s'(a) = -3a^2 + 6a = -3a(a - 2)$

$s'(a) = 0$에서 $a = 2\ \left(\because 0 < a \leq \frac{9}{4}\right)$

$0 < a \leq \frac{9}{4}$에서 함수 $s(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{9}{4}$
$s'(a)$		+	0	−	
$s(a)$		↗	$s(2)$	↘	$s\left(\frac{9}{4}\right)$

$0 < a \leq \frac{9}{4}$에서 함수 $s(a)$는 $a = 2$에서 극대이며

최대이므로 구하는 최댓값은

$s(2) = -8 + 12 = 4$

답 ④

230

두 조건 (나), (다)에 의하여

두 함수 $3x^2$과 $2x + 1$의 합이 $3x^2 + 2x + 1$이고,

곱이 $3x^2(2x + 1)$이다.

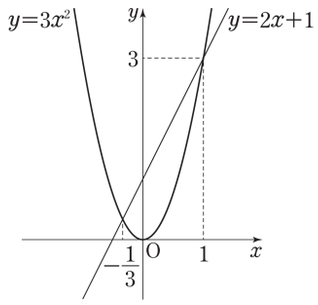
두 함수 $y = 3x^2$, $y = 2x + 1$의 그래프의 교점의 x좌표는

$3x^2 = 2x + 1,\ 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$(3x + 1)(x - 1) = 0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 1$일 때 $3x^2 \geq 2x + 1$이고,

$-\frac{1}{3} < x < 1$일 때 $3x^2 < 2x + 1$이므로

조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \left(x \leq -\frac{1}{3}\right) \\ 3x^2 & \left(-\frac{1}{3} < x < 1\right) \\ 2x + 1 & (x \geq 1) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \left(x \leq -\frac{1}{3}\right) \\ 2x + 1 & \left(-\frac{1}{3} < x < 1\right) \\ 3x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore \int_{-1}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

$= \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} 3x^2 dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{0} (2x+1)dx + \int_{0}^{1} 3x^2 dx$

$= \left[x^3\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}} + \left[x^2+x\right]_{-\frac{1}{3}}^{0} + \left[x^3\right]_{0}^{1}$

$= \frac{26}{27} + \frac{2}{9} + 1$

$= \frac{59}{27}$

$\therefore\ p+q = 27+59 = 86$

답 86

231

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

즉, 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - 3 = 1 \times (x-2)$

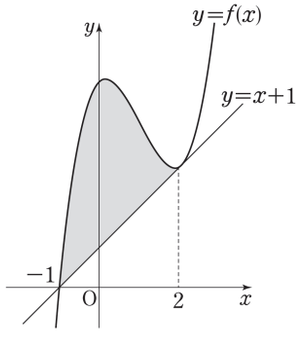
$\therefore\ y = x+1$

이때 곡선 $y = f(x)$와 접선 $y = x+1$의 교점의 x좌표는

$x^3 - 3x^2 + x + 5 = x + 1$에서

$x^3 - 3x^2 + 4 = 0,\ (x+1)(x-2)^2 = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2} \{(x^3 - 3x^2 + x + 5) - (x+1)\}dx$

$= \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$

답 ④

232

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{x}{3}f'(x) + 2x$

$\therefore\ 2f(x) = xf'(x) + 6x$ ……㉠

이때 다항함수 $f(x)$의 최고차항을

ax^n $(a \neq 0,\ n$은 자연수)이라 하면

$f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

$n = 1$일 때

㉠의 좌변의 최고차항은 $2ax$,

㉠의 우변의 최고차항은 $(a+6)x$이므로

$2a = a+6$에서 $a = 6$

즉, $f(x) = 6x + k$ (k는 상수)로 놓으면

$f'(x) = 6$이고, ㉠에서

$2(6x+k) = 6x + 6x$ $\therefore\ k = 0$

그런데 $f(x) = 6x$이지만

$\int_{0}^{3} 6x\,dx = \left[3x^2\right]_{0}^{3} = 27$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$n \geq 2$일 때

㉠의 좌변의 최고차항은 $2ax^n$,

㉠의 우변의 최고차항은 anx^n이므로

$2a = an$에서 $n = 2$ ($\because\ a \neq 0$)

즉, 함수 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($b,\ c$는 상수)로 놓으면

$f'(x) = 2ax + b$이고, ㉠에서

$2(ax^2 + bx + c) = x(2ax + b) + 6x$

$2ax^2 + 2bx + 2c = 2ax^2 + (b+6)x$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2b = b+6,\ 2c = 0$ $\therefore\ b = 6,\ c = 0$

$f(x) = ax^2 + 6x$이므로 조건 (나)에 의하여

$\int_{0}^{3} (ax^2 + 6x)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + 3x^2\right]_{0}^{3}$

$= 9a + 27 = 0$

에서 $a = -3$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 6x$이므로

$f(1) = -3 + 6 = 3$

답 ③

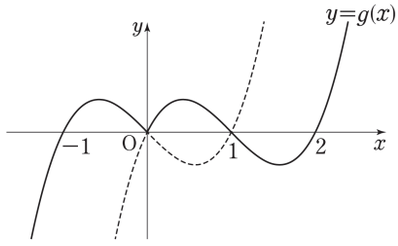
이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

233

$f(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)$에서

$f(x-1)=x(x-1)(x-2)$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



즉, $-1\le x\le 1$에서 $g(x)\ge 0$,

$1\le x\le 2$에서 $g(x)\le 0$이므로

$$\int_{-1}^{2}|g(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}|g(x)|dx+\int_{0}^{1}|g(x)|dx+\int_{1}^{2}|g(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x-1)dx+\int_{1}^{2}\{-f(x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}x(x-1)(x-2)dx+\int_{1}^{2}\{-x(x-1)(x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$$

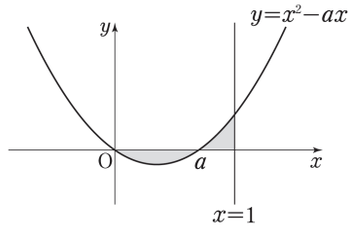
$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ p+q=4+3=7$

답 7

234

주어진 곡선 $y=x^2-ax$ $(0<a<1)$와 직선 $x=1$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



구하는 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\int_{0}^{1}|x^2-ax|dx$$

$$=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)dx+\int_{a}^{1}(x^2-ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{a}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{a}^{1}$$

$$=\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

$S'(a)=a^2-\frac{1}{2}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because\ 0<a<1)$일 때 $S'(a)=0$이다.

$0<a<1$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이면서 최소이다.

답 ③

235

$f(x)$는 삼차함수이고,

조건 (나)에서 $f(1)=f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)(ax+b)$ $(a,\ b$는 상수, $a\neq 0)$

라 하자.

조건 (가)에서 $f(0)=3$이므로

$f(0)=3b=3$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-3)(ax+1)$

$=ax^3+(1-4a)x^2+(3a-4)x+3$ ……㉠

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

한편 조건 (다)에서 모든 실수 t에 대하여

$\int_0^t f(x)dx = \int_2^t f(x)dx$이므로

$\int_0^t f(x)dx - \int_2^t f(x)dx = 0$

$\int_0^t f(x)dx + \int_t^2 f(x)dx = 0$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx = 0$

㉠에 의하여

$\int_0^2 f(x)dx$

$= \int_0^2 \{ax^3 + (1-4a)x^2 + (3a-4)x + 3\}dx$

$= \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{1-4a}{3}x^3 + \frac{3a-4}{2}x^2 + 3x\right]_0^2$

$= 4a + \frac{8}{3}(1-4a) + 2(3a-4) + 6 = 0$

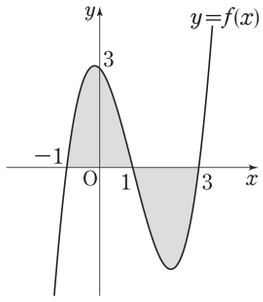
$12a + 8(1-4a) + 6(3a-4) + 18 = 0$

$-2a + 2 = 0$

$\therefore a = 1$

즉, $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

이므로 곡선 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^3 |f(x)|dx$

$= \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$

$+ \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx$

$= 2\int_0^1 (-3x^2 + 3)dx + \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx$

$= 2\left[-x^3 + 3x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3$

$= 2\times(-1+3) + \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right)$

$- \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right)$

$= 4 + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 8$

답 8

236

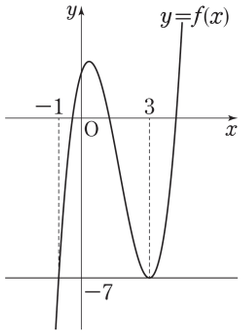
조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -7을 갖고,

조건 (다)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식

$f(x) = f(-1)$은 서로 다른 두 실근을 가지므로

다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(i) $f(-1) = f(3)$인 경우



함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = f(-1)$이

$x = -1$에서 만나고 $x = 3$에서 접하는 경우이므로

$f(x) - f(-1) = (x+1)(x-3)^2$

이고 조건 (나)에서 $f(-1) = f(3) = -7$이므로

$f(x) = (x+1)(x-3)^2 - 7$

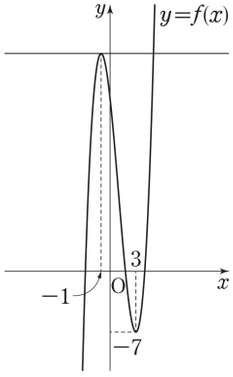
그런데

$f'(x) = (x-3)^2 + 2(x+1)(x-3)$

$= (x-3)(3x-1)$

에서 $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대인 경우



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이고

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-3)$

이때 $f'\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f'(x)=3(x+1)(x-3)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x+1)(x-3)dx$$

$$=\int (3x^2-6x-9)dx$$

$$=x^3-3x^2-9x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

조건 (나)에서 $f(3)=-7$이므로

$27-27-27+C=-7$

$\therefore\ C=20$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$이므로

$f(0)=20$

답 20

237

$f(1)=0$일 때 $f'(1)\neq 0$이면

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

즉, 조건 (가)에 의하여 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이고

$f(a)=0$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (단, $a\neq 1$)

로 놓을 수 있다.

한편 조건 (나)의 함수 $g(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_a^x (x^2-t^2)|f(t)|dt$$

$$=x^2\int_a^x |f(t)|dt-\int_a^x t^2|f(t)|dt$$

$$g'(x)=2x\int_a^x |f(t)|dt+x^2|f(x)|-x^2|f(x)|$$

$$=2x\int_a^x |f(t)|dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $h(x)=\int_a^x |f(t)|dt$라 하면

$h(a)=0$이고 $h'(x)=|f(x)|\geq 0$이므로

함수 $h(x)$의 부호는 $x=a$의 좌우에서만 바뀐다.

또한 일차함수 $2x$의 부호는 $x=0$의 좌우에서만 바뀐다.

따라서 조건 (나)에 의하여 ㉠에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌는 지점이 없으려면 $a=0$이어야 한다.

따라서 $f(x)=x(x-1)^2$이므로

$f(3)=12$

답 ②

238

$$\int_0^a |v(t)|dt=A,\ \int_a^b |v(t)|dt=B,\ \int_b^c |v(t)|dt=C$$

라 하자.

ㄱ. $$\int_0^c v(t)dt=\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt+\int_b^c v(t)dt$$

$$=A-B+C$$

이므로 $\int_0^c v(t)dt<0$에서 $A+C<B$이다.

$$\therefore\ \int_0^c |v(t)|dt=A+B+C$$

$$<2B=2\int_a^b |v(t)|dt \text{ (참)}$$

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 위치는

$x(t)=\int_0^t v(s)ds$이므로 $x'(t)=v(t)$이고

$0\leq t\leq c$에서 함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c
$v(t)$	0	+	0	−	0	+	$v(c)>0$
$x(t)$	0	↗	A	↘	$A-B$	↗	$A-B+C<0$

따라서 $a<t<b$일 때 점 P는 원점을 한 번 지나고

$t>b$에서 $x(t)<0$이므로

출발한 후 원점을 1번 지난다. (거짓)

ㄷ. 함수 $x(t)$는 $t=a$일 때 극댓값 A를 갖고,

$t=b$일 때 극솟값 $A-B$를 갖는다.

따라서 $|A|>|A-B|$, 즉 $2A>B$이면

점 P와 원점 사이의 거리의 최댓값은 $t=a$일 때이므로

$\int_0^a v(t)dt$이고

$|A|<|A-B|$, 즉 $2A<B$이면

점 P와 원점 사이의 거리의 최댓값은 $t=b$일 때이므로

$-\int_0^b v(t)dt$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

239

모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)\}^2-(x+x^2)f(x)+x^3=0$

즉, $\{f(x)-x\}\{f(x)-x^2\}=0$이므로

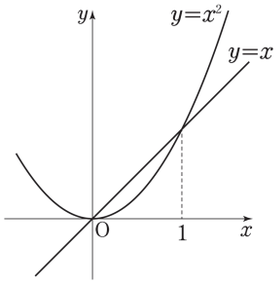
$f(x)=x$ 또는 $f(x)=x^2$이다.

이때 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$의 교점은 $(0, 0)$, $(1, 1)$

이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

각각의 구간 $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty)$에서

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=x^2$이 될 수 있다.



$f(x)=x$이면 $f'(x)=1$, $f(x)=x^2$이면 $f'(x)=2x$

이므로 $f'(-1)$의 값은 1 또는 -2이고

$f'(2)$의 값은 1 또는 4이다.

그런데 $f'(-1)f'(2)>1$이므로

$f'(-1)=1$이고 $f'(2)=4$이다.

즉, 구간 $(-\infty, 0]$에서 $f(x)=x$이고

구간 $[1, \infty)$에서 $f(x)=x^2$이다.

또한 $\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$,

$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$이므로

$\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2}$로부터 구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x^2$이다.

따라서 $f(x)=\begin{cases}x & (x<0)\\ x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 x\,dx+\int_0^2 x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}=\frac{13}{6}$$

$\therefore\ p+q=6+13=19$

답 19

240

$g(x)=\int_3^x f(t)dt$ ……㉠

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $g(3)=0$

두 조건 (나), (다)에 의하여 $g(-1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

이고, 조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최솟값,

즉 극솟값을 가지므로

$g'(2)=0$ ……㉡

또한 $g(3)=0$, $g(-1)=0$이므로 조건 (다)에 의하여

$g'(3)=0$ 또는 $g'(-1)=0$

(i) $g'(3)=0$일 때

$g(x)=(x+1)(x-3)^3=x^4-8x^3+18x^2-27$

$g'(x)=4x^3-24x^2+36x$

그런데 $g'(2)=32-96+72=8\neq 0$이므로 ㉡을

만족시키지 않는다.

(ii) $g'(-1)=0$일 때

$g(x)=(x-3)(x+1)^3=x^4-6x^2-8x-3$

$g'(x)=4x^3-12x-8$

$g'(2)=32-24-8=0$이므로 ㉡을 만족시킨다.

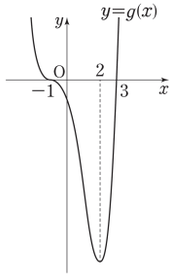
(i), (ii)에서 $g(x)=(x-3)(x+1)^3$이므로

$g(-2)=-5\times(-1)=5$

답 ③

참고

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>