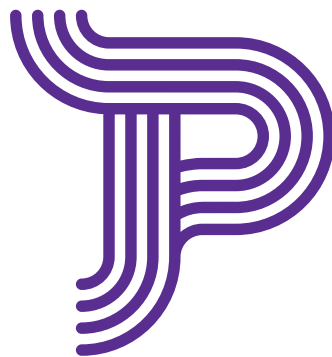




풍산자

유형기본서

수학Ⅰ

정답과 풀이

01 답 (1) $-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}, 1$ 개

(2) $3, -3, 3i, -3i, 2$ 개

(1) -27 의 세제곱근을 x 라고 하면 $x^3 = -27$

즉, $x^3 + 27 = 0$ 이므로

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27 의 세제곱근은 $-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$

이고 이 중에서 실수인 것은 -3 뿐이므로 1개이다.

(2) 81 의 네제곱근을 x 라고 하면 $x^4 = 81$

즉, $x^4 - 81 = 0$ 이므로

$(x^2-9)(x^2+9)=0$

$x^2 = 9$ 또는 $x^2 = -9$

$\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$

따라서 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이고 이 중에서 실수인 것은 $3, -3$ 으로 2개이다.

02 답 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 6

03 답 (1) 1 (2) $\frac{9}{4}$

04 답 (1) 8 (2) $\frac{5^5}{3^9}$ (3) 1 (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5) $3^{3\sqrt{3}}$ (6) $\frac{27}{2}$

(2) $(3^{25-1})^{-3} \div 3^{5-2} = 3^{-65} \div 3^{3-2}$

$= 3^{-6-3-3-(-2)}$

$= 3^{-9} 5^5 = \frac{5^5}{3^9}$

(4) $3^{\frac{7}{2}} \div (27^2)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{2}} \div \{(3^3)^2\}^{\frac{2}{3}}$

$= 3^{\frac{7}{2}} \div (3^6)^{\frac{2}{3}}$

$= 3^{\frac{7}{2}} \div 3^4 = 3^{\frac{7}{2}-4}$

$= 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(5) $9^{\sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{27}} \div 3^{\sqrt{12}} = (3^2)^{\sqrt{3}} \times 3^{3\sqrt{3}} \div 3^{2\sqrt{3}}$

$= 3^{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = 3^{3\sqrt{3}}$

(6) $(2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = (2^{-\frac{1}{3}})^{\sqrt{3}} \times (3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$

$= 2^{-\frac{1}{3} \times \sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= 2^{-1} \times 3^3 = \frac{27}{2}$

01-1 답 ③

해결전략 | a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 a 가 양수, 음수일 때, n 이 짝수, 홀수일 때로 나누어 생각한다.

① $2^4 = 16$ 이므로 2는 16의 네제곱근이다.

② 27의 세제곱근은 방정식 $x^3 = 27$ 의 근이므로

$x^3 - 27 = 0$, 즉 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$ 에서

$3, \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

③ 4는 짝수이므로 5의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5}$ 의 2개이다.

④ n 이 홀수이므로 3의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

⑤ n 이 짝수이고 $-4 < 0$ 이므로 -4 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

01-2 답 ⑤

해결전략 | a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 a 가 양수, 음수일 때, n 이 짝수, 홀수일 때로 나누어 생각한다.

① 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ 이다.

② $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ 이므로 $\sqrt{(-4)^2}$ 의 제곱근은 ± 2 이다.

③ -20 의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4 = -20$ 의 실근이므로 존재하지 않는다.

④ -64 의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3 = -64$ 의 실근이다.

$x^3 + 64 = 0$ 에서 $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

따라서 -64 의 세제곱근 중 실수인 것은 -4 이다.

⑤ 7의 세제곱근은 방정식 $x^3 = 7$ 의 근이므로 3개이다.

01-3 답 6

해결전략 | 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n = a$ 의 근 중에서 실수인 것과 같다.

STEP1 거듭제곱근의 정의를 이용하여 a, b 의 값 구하기

$\sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$ 의 네제곱근을 x 라고 하면

$x^4 = 16$ 이므로

$x^4 - 16 = 0, (x^2-4)(x^2+4)=0$

$\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

이 중에서 음의 실수는 -2 이므로 $a = -2$

세제곱근 -27 은

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \quad \therefore b = -3$$

STEP 2 ab 의 값 구하기

따라서 $a = -2$, $b = -3$ 이므로

$$ab = (-2) \times (-3) = 6$$

🔗 풀법의 비법

실수 a 와 자연수 n 에 대하여

(1) a 의 n 제곱근 $\Rightarrow x^n = a$ 를 만족시키는 x

(2) n 제곱근 $a \Rightarrow \sqrt[n]{a}$

01-4 답 8

해결전략 | 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n = a$ 의 근 중에서 실수인 것과 같다.

STEP 1 거듭제곱근의 정의를 이용하여 a, b, c 의 값 구하기

125의 세제곱근을 x 라고 하면 $x^3 = 125$ 이므로

$$x^3 - 125 = 0, (x-5)(x^2+5x+25) = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ 또는 } x = \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

이 중에서 실수는 5이므로 $a = 5$

81의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4 = 81$ 의 실근이므로 $x = \pm 3$ 으로 그 개수는 2이다. $\therefore b = 2$

-12의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3 = -12$ 의 실근이므로 $x = -\sqrt[3]{12}$ 로 그 개수는 1이다. $\therefore c = 1$

STEP 2 $a+b+c$ 의 값 구하기

따라서 $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$ 이므로

$$a+b+c = 5+2+1=8$$

01-5 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | a 가 실수일 때, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (n \text{이 홀수}) \\ |a| & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$ 임을 이

용한다.

ㄱ. n 이 홀수일 때, $x^n = -8$ 을 만족시키는 실수는

$$x = \sqrt[n]{-8} = \sqrt[n]{8} \times \sqrt[n]{-1} = -\sqrt[n]{8}$$

로 1개뿐이다. (참)

ㄴ. n 이 짝수일 때, $x^n = 6$ 을 만족시키는 실수는

$$x = \pm \sqrt[n]{6} \text{으로 2개이다. (거짓)}$$

ㄷ. n 이 홀수일 때

$$\sqrt[n]{-13} = \sqrt[n]{13 \times (-1)} = \sqrt[n]{13} \times \sqrt[n]{-1} = -\sqrt[n]{13} \text{ (참)}$$

ㄹ. n 이 짝수일 때

$$\sqrt[n]{(-5)^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

01-6 답 31

해결전략 | 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 모든 n 의 값을 구한다.

STEP 1 $-n^2+9n-18$ 의 값을 양수, 0, 음수일 때로 나누어 n 의 값 구하기

자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때 $-n^2+9n-18$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18 < 0$ 일 때

$$n^2-9n+18 > 0, (n-3)(n-6) > 0$$

$$n < 3 \text{ 또는 } n > 6 \text{이고 } 2 \leq n \leq 11 \text{이므로}$$

$$2 \leq n < 3 \text{ 또는 } 6 < n \leq 11$$

이때 n 은 홀수이어야 하므로 가능한 n 의 값은

$$7, 9, 11$$

(ii) $-n^2+9n-18 = 0$ 일 때

0의 n 제곱근은 항상 0이므로 만족시키는 음의 실수는 존재하지 않는다.

(iii) $-n^2+9n-18 > 0$ 일 때

$$n^2-9n+18 < 0, (n-3)(n-6) < 0$$

$$3 < n < 6 \text{이고 } 2 \leq n \leq 11 \text{이므로}$$

$$3 < n < 6$$

이때 n 은 짝수이어야 하므로

$$n = 4$$

STEP 2 n 의 값의 합 구하기

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 $4+7+9+11=31$

필수유형 02

13쪽

02-1 답 (1) 5 (2) 3 (3) 2 (4) $\sqrt[6]{5^5}$

해결전략 | 근호 안의 수를 소인수분해한 다음 거듭제곱근의 성질을 이용해서 식을 간단히 한다.

$$(1) \sqrt[3]{(-5)^2 \times 3^5} = \sqrt[3]{5^2 \times 3^5} = \sqrt[3]{5^2 \times 5 \times 3^5} = \sqrt[3]{5^3 \times 3^5} = 5$$

$$(2) \sqrt[3]{\sqrt{9} \times \sqrt{81}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times \sqrt{3^4}} = \sqrt[3]{3^2 \times 3^4} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

$$(3) \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$(4) \sqrt{125} \times \frac{1}{\sqrt[6]{625}} = \sqrt{5^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{5^4}} = \sqrt[6]{5^9} \times \sqrt[6]{\frac{1}{5^4}} = \sqrt[6]{5^9 \times \frac{1}{5^4}} = \sqrt[6]{5^5}$$

02-2 ㉔ (1) 3 (2) 25 (3) 3 (4) 8

해결전략 | 근호 안의 수를 소인수분해한 다음 거듭제곱근의 성질을 이용해서 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\sqrt[8]{81})^2 = (\sqrt[8]{3^4})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 \\
 (2) \quad & \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^2 \times 5^4} \\
 & = \sqrt[3]{5^6 \times 5^4} \\
 & = \sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25 \\
 (3) \quad & \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \\
 (4) \quad & \sqrt[3]{\sqrt{64}} \times \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[6]{64} \times \sqrt[4]{256} \\
 & = \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[4]{2^8} \\
 & = 2 \times 2^2 = 8
 \end{aligned}$$

02-3 ㉔ $2\sqrt[3]{2}$

해결전략 | 근호 안의 분수를 약분한 다음 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 \sqrt[6]{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} &= \sqrt[6]{\frac{(2^3)^{10} + (2^2)^{10}}{(2^3)^4 + (2^2)^{11}}} = \sqrt[6]{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{22}}} \\
 &= \sqrt[6]{\frac{2^{20}(2^{10} + 1)}{2^{12}(2^{10} + 1)}} \\
 &= \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}
 \end{aligned}$$

02-4 ㉔ 4

해결전략 | $a > 0$ 이고 m 이 2 이상의 정수일 때 $\sqrt[m]{a}$ 와 같이 근호 앞의 수와 안의 수가 같은 것끼리 동류항처럼 생각하여 계산한다.

STEP1 주어진 등식의 좌변을 간단히 하기

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} - \sqrt[3]{3} \\
 &= 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} \\
 &= 4\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

STEP2 a 의 값 구하기

따라서 $4\sqrt[3]{3} = a \times \sqrt[3]{3}$ 이므로

$$a = 4$$

02-5 ㉔ 3

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 등식이 성립하도록 하는 n 의 값을 구한다.

STEP1 주어진 등식의 좌변을 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리하기

$$\begin{aligned}
 \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3^5}}{n\sqrt{2}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3^9}}} &= \frac{\sqrt[4]{3^5}}{\sqrt[4]{n\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt[6]{\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{4\sqrt{3^9}}} \\
 &= \frac{\sqrt[8]{3^5}}{\sqrt[4n]{2}} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[24]{3^9}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt[8]{3^5}}{\sqrt[4n]{2}} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[8]{3^3}} = \sqrt[8]{\frac{3^5}{3^3}} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4n]{2}} \\
 &= \sqrt[8]{3^2} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4n]{2}} = \sqrt[8]{9} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4n]{2}}
 \end{aligned}$$

STEP2 정리한 식이 우변과 같게 하는 n 의 값 구하기

$$\text{즉, } \sqrt[8]{9} \times \frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4n]{2}} = \sqrt[8]{9} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4n]{2}} = 1$$

따라서 $4n = 12$ 이므로 $n = 3$

02-6 ㉔ 36

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{a}$ 를 간단

히 한 다음 a 가 될 수 있는 수의 조건을 찾는다.

STEP1 주어진 거듭제곱근의 곱을 하나의 거듭제곱근으로 나타내기

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \times \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times a}$$

STEP2 $\sqrt[4]{n}$ 이 자연수가 되려면 n 이 어떤 자연수의 네제곱이

여야 함을 이해하여 a 의 값 구하기

$\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times a}$ 가 자연수가 되려면 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times a$ 가 자연수의 네제곱이어야 한다.

따라서 a 의 최솟값은 $2^2 \times 3^2 = 36$

▶참고 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times a$ 가 자연수의 네제곱이어야 하고 a 도 자연수이므로

$a = 2^2 \times 3^2 \times k^4$ (k 는 자연수) 꼴이다.

필수유형 03

15쪽

03-1 ㉔ (1) $\sqrt[8]{a}$ (2) $\sqrt[5]{a}$ (3) $\sqrt[12]{a^7}$

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} \\
 &= \frac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a^3}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[8]{a}} = \frac{\sqrt[8]{a^2}}{\sqrt[8]{a}} \\
 &= \sqrt[8]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[8]{a} \\
 (2) \quad & \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}} \div \sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} \div \frac{\sqrt[20]{a}}{\sqrt[12]{a^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[20]{a}} \\
&= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[20]{a}} = \frac{\sqrt[20]{a^5}}{\sqrt[20]{a}} \\
&= \sqrt[20]{\frac{a^5}{a}} = \sqrt[20]{a^4} = \sqrt[5]{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{a}} \div \sqrt[5]{\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{a}} \div \frac{\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^5}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[4]{a}} \div \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a^5}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[12]{\frac{a}{a^5}} \\
&= \frac{\sqrt[12]{a^{14}}}{\sqrt[12]{a^3}} \times \sqrt[12]{\frac{a}{a^5}} = \sqrt[12]{\frac{a^{14} \times a}{a^3 \times a^5}} \\
&= \sqrt[12]{\frac{a^{15}}{a^8}} = \sqrt[12]{a^7}
\end{aligned}$$

03-2 답 1

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한다.

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}} = \frac{\sqrt[24]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[24]{a}} = 1$$

03-3 답 $\sqrt[4]{\frac{a^5}{b}}$

해결전략 | 근호 앞의 수 4, 6, 3을 이들의 최소공배수인 12로 통일한다.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{81a^3b} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt[3]{27b^2} \\
&= \sqrt[4]{81} \sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{b^2} \\
&= \sqrt[4]{3^4} \sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt[3]{3^3} \sqrt[3]{b^2} \\
&= 3 \sqrt[12]{a^9b^3} \times \sqrt[12]{a^6b^2} \div 3 \sqrt[12]{b^8} \quad \leftarrow \text{근호 앞의 수 4, 6, 3을 12로 통일} \\
&= \sqrt[12]{\frac{a^9b^3 \times a^6b^2}{b^8}} \\
&= \sqrt[12]{\frac{a^{15}}{b^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^5}{b}}
\end{aligned}$$

03-4 답 $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{a}}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b^2}}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{b}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[3]{b^2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{b^3} \times \sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{b} \times \sqrt[6]{b^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

03-5 답 24

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한 다음 k 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}}} \\
&= \frac{\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[8]{a}}} \\
&= \frac{\sqrt[24]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[24]{a}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} = \frac{\sqrt[24]{a^4}}{\sqrt[24]{a^3}} = \sqrt[24]{a} \\
&\therefore k=24
\end{aligned}$$

03-6 답 31

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한 다음 $m+n$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{a}}$ 를 간단히 하기

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{a}} &= \frac{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[24]{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt[8]{a} \times \sqrt[24]{a}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[12]{a^3}}{\sqrt{a} \times \sqrt[8]{a}} \\
&= \frac{\sqrt[24]{a^{16}} \times \sqrt[24]{a^6}}{\sqrt[24]{a^{12}} \times \sqrt[24]{a^3}} \\
&= \frac{\sqrt[24]{a^{16} \times a^6}}{\sqrt[24]{a^{12} \times a^3}} \\
&= \sqrt[24]{\frac{a^{22}}{a^{15}}} = \sqrt[24]{a^7}
\end{aligned}$$

STEP2 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=24$, $n=7$ 이므로

$$m+n=24+7=31$$

필수유형 04

17쪽

04-1 답 4

해결전략 | $a \neq 0$ 일 때 $a^0=1$ 이다.

$$3^0 \times 8^{\frac{2}{3}} = 3^0 \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 1 \times 2^2 = 4$$

04-2 ㉮ (1) 100 (2) 16 (3) 1 (4) 5

해결전략 | 밑을 소인수분해한 다음 지수법칙을 적용한다.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 25^{\frac{1}{2}} \times 32^{\frac{2}{5}} \div 125^{-\frac{1}{3}} \\
 &= (5^2)^{\frac{1}{2}} \times (2^5)^{\frac{2}{5}} \div (5^3)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 5 \times 2^2 \div 5^{-1} = 2^2 \times 5 \div 5^{-1} \\
 &= 2^2 \times 5^{1-(-1)} = 100 \\
 (2) \quad & 2^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{2}{3}} \times (4^{\frac{9}{4}} 9^2)^{\frac{1}{3}} \div (2^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}})^6 \\
 &= 2^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{2}{3}} \times (2^{\frac{9}{2}} 3^4)^{\frac{1}{3}} \div (2^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}})^6 \\
 &= 2^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{4}{3}} \div 2^{-3} 3^2 \\
 &= 2^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - (-3)} \times 3^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2} \\
 &= 2^4 \times 3^0 = 16 \\
 (3) \quad & 7^{\sqrt{18}} \div 7^{\sqrt{50}} \times 49^{\sqrt{2}} \\
 &= 7^{3\sqrt{2}} \div 7^{5\sqrt{2}} \times 7^{2\sqrt{2}} \\
 &= 7^{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} \\
 &= 7^0 = 1 \\
 (4) \quad & (5^3)^{\sqrt{2}-1} \times (5^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}-5} \div 25^{1-\sqrt{2}} \\
 &= 5^{3\sqrt{2}-3} \times 5^{6-5\sqrt{2}} \div 5^{2-2\sqrt{2}} \\
 &= 5^{3\sqrt{2}-3+6-5\sqrt{2}-(2-2\sqrt{2})} \\
 &= 5^1 = 5
 \end{aligned}$$

04-3 ㉮ 3

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 지수를 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \left(\frac{3}{7} \right)^{-\frac{5}{2}} \right\}^{\frac{1}{5}} \times \left\{ \left(\frac{27}{7} \right)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{3}{7} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{7}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{7}{3} \times \frac{27}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 9^{\frac{1}{2}} = 3
 \end{aligned}$$

04-4 ㉮ 1

해결전략 | 지수법칙을 적용할 수 있도록 밑을 a 로 만든 후 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 (a^3)^{-1} \div \left(\frac{1}{a^2} \times \sqrt[3]{a^4} \right)^{\frac{9}{2}} &= a^{-3} \div (a^{-2} \times a^{\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}} \\
 &= a^{-3} \div (a^{-2+\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}} \\
 &= a^{-3} \div (a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{9}{2}} \\
 &= a^{-3} \div a^{-3} \\
 &= a^{-3-(-3)} = a^0 = 1
 \end{aligned}$$

04-5 ㉮ ab^5

해결전략 | $27^{2x+y} = 3^{6x+3y}$ 이므로 3^{3x} 과 3^{3y} 을 a , b 로 나타낸 후 구한다.

STEP 1 3^{3x} , 3^{3y} 을 a , b 를 이용하여 나타내기

$$3^{3x} = 3^{x-2y} \times (3^{x+y})^2 = ab^2$$

$$3^{3y} = \frac{3^{x+y}}{3^{x-2y}} = \frac{b}{a}$$

STEP 2 27^{2x+y} 을 a , b 로 나타내기

$$\begin{aligned}
 \therefore 27^{2x+y} &= (3^3)^{2x+y} \\
 &= (3^{3x})^2 \times 3^{3y} \\
 &= (ab^2)^2 \times \frac{b}{a} = ab^5
 \end{aligned}$$

04-6 ㉮ 3

해결전략 | a 는 $\sqrt{3}$ 의 5제곱근 중 실수이므로 $a^5 = \sqrt{3}$ 이다.

STEP 1 거듭제곱근의 정의 이용하기

$\sqrt{3}$ 의 5제곱근 중 실수인 것이 a 이므로

$$a^5 = \sqrt{3}$$

STEP 2 지수법칙을 이용하여 주어진 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}
 \therefore (a^{-\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}} \times (a^{-3})^{-\frac{5}{2}} \times a^3 \\
 &= a^{-\frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{2}} \times a^{-3 \times (-\frac{5}{2})} \times a^3 \\
 &= a^{-\frac{1}{2} + \frac{15}{2} + 3} \\
 &= a^{10}
 \end{aligned}$$

STEP 3 $a^5 = \sqrt{3}$ 을 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore a^{10} = (a^5)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

필수유형 05

19쪽

05-1 ㉮ $B < C < A$

해결전략 | 세 수를 같은 거듭제곱근으로 통일한 다음 근호 안의 수의 대소를 비교한다.

STEP 1 거듭제곱근 정리하기

주어진 거듭제곱근을 정리하면

$$A = \sqrt[5]{3\sqrt{2^4}} = \sqrt[15]{2^4}$$

$$B = \sqrt[3]{5\sqrt{3^2}} = \sqrt[15]{3^2}$$

$$C = \sqrt[5]{\sqrt{5}} = \sqrt[10]{5}$$

STEP 2 거듭제곱근 통일하기

15와 10의 최소공배수가 30이므로 30제곱근으로 만들면

$$A = \sqrt[15]{2^4} = \sqrt[30]{2^8}$$

$$B = \sqrt[15]{3^2} = \sqrt[30]{3^4}$$

$$C = \sqrt[10]{5} = \sqrt[30]{5^3}$$

STEP3 세 수 A, B, C 의 대소 관계 구하기

$2^8=256, 3^4=81, 5^3=125$ 이므로 근호 안의 수끼리 비교하면
 $3^4 < 5^3 < 2^8$
 $\therefore B < C < A$

05-2 ㉡ $A < C < B$

해결전략 | 세 수를 같은 거듭제곱근으로 통일한 다음 근호 안의 수의 대소를 비교한다.

STEP1 거듭제곱근 정리하기

주어진 거듭제곱근을 정리하면

$$B = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[6]{5^4}$$

$$C = \sqrt[3]{2^4 \times 5^2} = \sqrt[6]{2^4 \times 5^2}$$

STEP2 거듭제곱근 통일하기

세 수 A, B, C 를 2와 6의 최소공배수인 6제곱근으로 만들면

$$A = \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^3}$$

$$B = \sqrt[6]{5^4}$$

$$C = \sqrt[6]{2^4 \times 5^2} = \sqrt[6]{2^4 \times 5^2}$$

STEP3 세 수 A, B, C 의 대소 관계 구하기

$5^3=125, 5^4=625, 2^4 \times 5^2=400$ 이므로 근호 안의 수끼리 비교하면
 $5^3 < 2^4 \times 5^2 < 5^4$
 $\therefore A < C < B$

05-3 ㉡ ④

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한 다음 대소를 비교한다.

STEP1 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 하기

$$A = \{(\sqrt{5})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{5})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$B = \sqrt{\sqrt{(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\sqrt{5^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}}} = \sqrt{\sqrt{5^2}} = \sqrt{5}$$

$$C = \{\sqrt{(\sqrt{5})^{\sqrt{2}}}\}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{\sqrt{5}})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = (\sqrt[4]{5})^2 = \sqrt{5}$$

STEP2 세 수 A, B, C 의 대소 관계 구하기

$\therefore B = C < A$

05-4 ㉡ ③

해결전략 | 세 수를 같은 거듭제곱근으로 통일한 다음 근호 안의 수의 대소를 비교한다.

STEP1 거듭제곱근 통일하기

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$\sqrt{2^{\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(2^{\sqrt{2}})^2} = \sqrt[4]{2^{2\sqrt{2}}}$$

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^{\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(2^{\sqrt{2}})^2} = \sqrt[4]{2^{2\sqrt{2}}}$$

STEP2 세 수의 대소 관계 구하기

근호 안의 수끼리 비교하면

$$2^{2\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} < 2^3$$

$$\therefore \sqrt{2^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$$

05-5 ㉡ $\sqrt{B} < \sqrt{A} < \sqrt{C}$

해결전략 | $x < y < z$ 이고 $x > 0, y > 0, z > 0$ 이면

$$\sqrt{x} < \sqrt{y} < \sqrt{z}$$
이다.

STEP1 거듭제곱근 통일하기

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$A = \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$B = \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121}$$

$$C = \sqrt[6]{130}$$

STEP2 세 수 $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C}$ 의 대소 관계 구하기

따라서 $B < A < C$ 이고 $A > 0, B > 0, C > 0$ 이므로
 $\sqrt{B} < \sqrt{A} < \sqrt{C}$

05-6 ㉡ $C < A < B$

해결전략 | 세 수를 같은 거듭제곱근으로 통일한 다음 근호 안의 수의 대소를 비교한다.

STEP1 거듭제곱근 통일하기

세 수 A, B, C 를 $n(n-1)$ 제곱근으로 만들면

$$A = \sqrt[n-1]{a^n} = \sqrt[n(n-1)]{(a^n)^n} = \sqrt[n(n-1)]{a^{n^2}}$$

$$B = \sqrt[n-1]{a^{n+1}} = \sqrt[n(n-1)]{(a^{n+1})^n} = \sqrt[n(n-1)]{a^{n^2+n}}$$

$$C = \sqrt[n]{a^{n+1}} = \sqrt[n(n-1)]{(a^{n+1})^{n-1}} = \sqrt[n(n-1)]{a^{n^2-1}}$$

STEP2 세 수 A, B, C 의 대소 관계 구하기

이때 n 이 3 이상의 자연수이므로

$$n^2 + n > n^2 > n^2 - 1 \quad \rightarrow n-1 \geq 2 \text{이므로 } n \geq 3$$

따라서 $a > 1$ 이므로

$$C < A < B$$

필수유형 06

21쪽

06-1 ㉡ 11

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수인 지수로 변환한다.

STEP1 $\sqrt[4]{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}}$ 간단히 하기

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}\sqrt{a}} &= \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[4]{\sqrt{a}} \\ &= \sqrt[4]{a} \times \sqrt[12]{a} \times \sqrt[24]{a}\end{aligned}$$

STEP2 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a} \times \sqrt[12]{a} \times \sqrt[24]{a} &= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{12}} \times a^{\frac{1}{24}} \\ &= a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{9}{24}} = a^{\frac{3}{8}}\end{aligned}$$

STEP3 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=8$, $n=3$ 이므로

$$m+n=11$$

06-2 17

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수

인 지수로 변환한다.

STEP1 $\sqrt{a^3\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[6]{a\sqrt{a^3}}$ 간단히 하기

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[6]{a\sqrt{a^3}} &= \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{\sqrt{a^3}} \\ &= \sqrt{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[12]{a^3}\end{aligned}$$

STEP2 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}\sqrt{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[12]{a^3} &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{4}} \\ &= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{27}{24}} = a^{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

STEP3 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=8$, $n=9$ 이므로

$$m+n=17$$

06-3 47

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수

인 지수로 변환한다.

STEP1 $\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{2}\sqrt[5]{2^4}} \div \sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$ 간단히 하기

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{2}\sqrt[5]{2^4}} \div \sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}} &= (\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^4}}) \div (\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}) \\ &= (\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[12]{2} \times \sqrt[60]{2^4}) \div (\sqrt[5]{2} \times \sqrt[20]{2})\end{aligned}$$

STEP2 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[12]{2} \times \sqrt[60]{2^4}) \div (\sqrt[5]{2} \times \sqrt[20]{2}) &= (2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{15}}) \div (2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{20}}) \\ &= 2^{(\frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{20})} = 2^{\frac{34}{60}} = 2^{\frac{17}{30}}\end{aligned}$$

STEP3 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=30$, $n=17$ 이므로

$$m+n=47$$

06-4 3 ^{$\frac{3}{2}$}

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수

인 지수로 변환한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3^2\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^5}} &= \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^5}}} \\ &= \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[12]{3} \times \sqrt[24]{\sqrt[3]{3^5}}\end{aligned}$$

STEP2 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[12]{3} \times \sqrt[24]{\sqrt[3]{3^5}} &= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{12}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{5}{8}} \\ &= 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8}} \\ &= 3^{\frac{36}{24}} = 3^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

06-5 3

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수

인 지수로 변환한다.

STEP1 P , Q 를 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}P &= \sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{a}\sqrt[6]{a}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{9}{12}} = a^{\frac{3}{4}} \\ Q &= a^5\sqrt[4]{a\sqrt[6]{a^k}} = a^5 \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[5]{\sqrt[6]{a^k}} \\ &= a \times a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{k}{10}} = a^{1 + \frac{1}{5} + \frac{k}{10}} = a^{\frac{12+k}{10}}\end{aligned}$$

STEP2 $P=\sqrt[4]{Q}$ 를 만족시키는 k 의 값 구하기

$$P=\sqrt[4]{Q} \text{에서 } P=Q^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{즉, } a^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{12+k}{10}})^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{12+k}{20}, \frac{15}{20} = \frac{12+k}{20}$$

$$\therefore k=3$$

06-6 2

해결전략 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 정리한 다음 분수

인 지수로 변환한다.

STEP1 주어진 식의 좌변과 우변을 각각 분수인 지수로 나타내기

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^k}} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} \times \sqrt[3]{\sqrt[6]{a^k}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[24]{a^k} \\ &= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{k}{24}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{k}{24}} = a^{\frac{14+k}{24}} \\ \sqrt[5]{a^3\sqrt[4]{a}} &= \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[5]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[15]{a} \\ &= a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{1}{15}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{1}{15}} = a^{\frac{10}{15}} = a^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

STEP2 지수끼리 비교하여 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a^{\frac{14+k}{24}} = a^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$\frac{14+k}{24} = \frac{2}{3}, \quad \frac{14+k}{24} = \frac{16}{24}$$

$$\therefore k=2$$

필수유형 07

23쪽

07-1 답 (1) $a-b$ (2) a^2+b^2 (3) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

해결전략 | 곱셈 공식 또는 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} (1) & (a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= \{(a^{\frac{1}{8}})^2-(b^{\frac{1}{8}})^2\}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= \{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a-b \end{aligned}$$

$$(2) (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})=(a^{\frac{2}{3}})^3+(b^{\frac{2}{3}})^3=a^2+b^2$$

$$\begin{aligned} (3) & (a-b) \div (a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}) \\ &= \{(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3\} \div (a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}) \\ &= (a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}) \div (a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}) \\ &= a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

☞ 곱셈의 비법

곱셈 공식을 이용한 식의 계산

$a>0, b>0$ 이고 x, y 가 실수일 때

$$(1) (a^x+b^y)(a^x-b^y)=a^{2x}-b^{2y}$$

$$(2) (a^x+b^y)^2=a^{2x}+2a^xb^y+b^{2y}$$

$$(a^x-b^y)^2=a^{2x}-2a^xb^y+b^{2y}$$

$$(3) (a^x+b^y)^3=a^{3x}+3a^{2x}b^y+3a^xb^{2y}+b^{3y}$$

$$(a^x-b^y)^3=a^{3x}-3a^{2x}b^y+3a^xb^{2y}-b^{3y}$$

$$(4) (a^x+b^y)(a^{2x}-a^xb^y+b^{2y})=a^{3x}+b^{3y}$$

$$(a^x-b^y)(a^{2x}+a^xb^y+b^{2y})=a^{3x}-b^{3y}$$

07-2 답 $2(a^2+3)$

해결전략 | 곱셈 공식

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} & (a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (a^{\frac{2}{3}})^3+3 \times (a^{\frac{2}{3}})^2 \times a^{-\frac{1}{3}}+3 \times a^{\frac{2}{3}} \times (a^{-\frac{1}{3}})^2+(a^{-\frac{1}{3}})^3 \\ & \quad + (a^{\frac{2}{3}})^3-3 \times (a^{\frac{2}{3}})^2 \times a^{-\frac{1}{3}}+3 \times a^{\frac{2}{3}} \times (a^{-\frac{1}{3}})^2-(a^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= a^2+3a+3+a^{-1}+a^2-3a+3-a^{-1} \\ &= 2(a^2+3) \end{aligned}$$

07-3 답 ②

해결전략 | 인수분해 공식 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} & (2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2 \\ &= \{(2^{x+y}+2^{x-y})+(2^{x+y}-2^{x-y})\} \\ & \quad \times \{(2^{x+y}+2^{x-y})-(2^{x+y}-2^{x-y})\} \\ &= 2^{x+y+1} \times 2^{x-y+1}=2^{2x+2} \end{aligned}$$

☞ 다른 풀이

$2^{x+y}=A, 2^{x-y}=B$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (A+B)^2-(A-B)^2=4AB \\ &= 4 \times 2^{x+y} \times 2^{x-y} \\ &= 2^{2x+2} \end{aligned}$$

07-4 답 $\frac{80}{9}$

해결전략 | 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

STEP1 거듭제곱근을 분수인 자수로 나타내기

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[4]{3}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right) \\ &= (3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3+3^{-1}) \end{aligned}$$

STEP2 곱셈 공식 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 을 이용하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} & (3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3+3^{-1}) \\ &= (3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3+3^{-1}) \\ &= (3-3^{-1})(3+3^{-1}) \\ &= 3^2-3^{-2}=3^2-\frac{1}{3^2}=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9} \end{aligned}$$

07-5 답 -2

해결전략 | 두 항씩 통분하여 곱셈 공식을 적용하며 식을 간단히 한다.

STEP1 곱셈 공식 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 을 이용하여 앞의 두 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}} &= \frac{1+x^{\frac{1}{4}}+1-x^{\frac{1}{4}}}{(1-x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{4}})} \\ &= \frac{2}{1^2-(x^{\frac{1}{4}})^2} \\ &= \frac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

STEP2 곱셈 공식을 연속적으로 적용하여 주어진 식 간단히 하기

⑦에 의하여

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+x} \\ &= \frac{2(1+x^{\frac{1}{2}})+2(1-x^{\frac{1}{2}})}{(1-x^{\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})} + \frac{4}{1+x} \\ &= \frac{4}{1^2-(x^{\frac{1}{2}})^2} + \frac{4}{1+x} \\ &= \frac{4}{1-x} + \frac{4}{1+x} \\ &= \frac{4(1+x)+4(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{8}{1-x^2}\end{aligned}$$

STEP3 $x^2=5$ 를 대입하여 주어진 식의 값 구하기

이때 $x^2=5$ 이므로

$$\frac{8}{1-x^2} = \frac{8}{1-5} = -2$$

07-6 ㉡ 15

해결전략 $| x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하여 식을 적절히 변형한다.

STEP1 곱셈 공식 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ 을 이용하여 x^3 을 구하고 x 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}x^3 &= (2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (2^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times (2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= 2+2^{-1}+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{5}{2}+3x\end{aligned}$$

STEP2 STEP1에서 구한 식 변형하기

$$\text{즉, } x^3-3x=\frac{5}{2} \text{에서}$$

$$2x^3-6x=5$$

$$\therefore 2x^3-6x+10=5+10=15$$

필수유형 08

25쪽

08-1 ㉡ (1) 62 (2) 488

해결전략 | 곱셈 공식을 변형하고 $a^x \times a^{-x}=1$ 을 이용하여 구한다.

STEP1 $a+a^{-1}$ 의 값 구하기

$$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}a+a^{-1} &= (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2 \\ &= (\sqrt{10})^2-2=8\end{aligned}$$

(1) **STEP2** a^2+a^{-2} 의 값 구하기

$$\begin{aligned}a^2+a^{-2} &= (a+a^{-1})^2-2 \\ &= 8^2-2=62\end{aligned}$$

(2) **STEP3** a^3+a^{-3} 의 값 구하기

$$\begin{aligned}a^3+a^{-3} &= (a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1}) \\ &= 8^3-3 \times 8=488\end{aligned}$$

◆ 다른 풀이

$$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{10} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a+a^{-1}+2=10 \quad \therefore a+a^{-1}=8$$

(1) $a+a^{-1}=8$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2+a^{-2}+2=64 \quad \therefore a^2+a^{-2}=62$$

(2) $a+a^{-1}=8$ 의 양변을 세제곱하면

$$a^3+a^{-3}+3 \times a \times a^{-1} \times (a+a^{-1})=512$$

$$a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})=512$$

$$a^3+a^{-3}+3 \times 8=512$$

$$\therefore a^3+a^{-3}=488$$

08-2 ㉡ 110

해결전략 $| x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}} &= (x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3 \\ &= (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3 \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}} \times (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 5^3-3 \times 1 \times 5 \quad \leftarrow x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5 \\ &= 110\end{aligned}$$

◆ 다른 풀이

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5 \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3+3 \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}} \times (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=125$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3 \times 1 \times 5=125 \quad \therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=110$$

08-3 ㉡ 5

해결전략 | 곱셈 공식을 변형하여 $x+x^{-1}$, x^2+x^{-2} 의 값을 구한다.

STEP1 $x+x^{-1}$ 의 값 구하기

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{7} \text{이므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = (\sqrt{7})^2 - 2 = 5$$

$$\text{즉, } x+x^{-1}=5$$

STEP2 x^2+x^{-2} 의 값 구하기

$$\text{또, } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23$$

$$\text{즉, } x^2+x^{-2}=23$$

STEP3 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{x^2+x^{-2}+7}{x+x^{-1}+1} = \frac{23+7}{5+1} = 5$$

●→ 다른 풀이

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 \text{에서}$$

$$7 = x + \frac{1}{x} + 2$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{에서}$$

$$25 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 23 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{x^2+x^{-2}+7}{x+x^{-1}+1} = \frac{23+7}{5+1} = 5$$

08-4 ㉢ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

해결전략 | 곱셈 공식을 이용하여 $x+x^{-1}$, $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값을 구한다.

STEP1 $x+x^{-1}$ 의 값 구하기

$$(x+x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 14 + 2 = 16$$

$$\text{이때 } x+x^{-1} > 0 \text{이므로} \rightarrow x^2+x^{-2}=14$$

$$x+x^{-1}=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP2 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값 구하기

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\text{이때 } x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로}$$

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP3 식의 값 구하기

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x+x^{-1}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

08-5 ㉣ 6

해결전략 | $3^{2x}-3^{x+1}=-1$ 의 양변을 3^x 으로 나눈 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

STEP1 $3^{2x}+3^{-2x}$, $3^{4x}+3^{-4x}$ 의 값 구하기

$$3^{2x}-3^{x+1}=-1 \text{의 양변을 } 3^x \text{으로 나누면}$$

$$3^x-3=-\frac{1}{3^x}$$

$$3^x+3^{-x}=3$$

$$3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2$$

$$=3^2-2=7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3^{4x}+3^{-4x}=(3^{2x}+3^{-2x})^2-2$$

$$=7^2-2=47 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP2 식의 값 구하기

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{3^{4x}+3^{-4x}+1}{3^{2x}+3^{-2x}+1} = \frac{47+1}{7+1} = 6$$

08-6 ㉤ 11

해결전략 | 먼저 $a^x-a^{-x}=t$ ($t>0$)로 치환하여 t 의 값을 구한다.

STEP1 a^x-a^{-x} 의 값 구하기

$$a^{3x}-a^{-3x}=(a^x-a^{-x})^3+3(a^x-a^{-x})=36$$

$$\text{이때 } a^x-a^{-x}=t \text{ ($t>0$)로 놓으면}$$

$$t^3+3t=36, t^3+3t-36=0$$

$$(t-3)(t^2+3t+12)=0$$

$$\text{이때 } t^2+3t+12=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0 \text{이므로}$$

$$t=3, \text{ 즉 } a^x-a^{-x}=3$$

STEP2 $a^{2x}+a^{-2x}$ 의 값 구하기

$$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=(a^x-a^{-x})^2+2$$

$$=3^2+2=11$$

필수유형 09

27쪽

09-1 ㉥ (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{62}{15}$

해결전략 | 주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 분모와 분자에 a^x 을 곱하여 식에 대입한다.

(1) STEP1 분모와 분자에 a^x 곱하기

$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}} \text{의 분모와 분자에 } a^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})} = \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$

STEP2 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}$$

(2) STEP1 분모와 분자에 a^x 곱하기

$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분모와 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} + 1}$$

STEP2 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} + 1} \\ &= \frac{(a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1}}{a^{2x} + 1} \\ &= \frac{5^2 - \frac{1}{5}}{5 + 1} = \frac{62}{15} \end{aligned}$$

09-2 ㉮ $\frac{43}{6}$

해결전략 | $2^{8x} = 36$ 에서 2^{4x} 의 값을 구한 다음 식을 변형하여 값을 구한다.

STEP1 2^{4x} 의 값 구하기

$$2^{8x} = 36 \text{에서 } (2^{4x})^2 = 36$$

이때 $2^{4x} > 0$ 이므로

$$2^{4x} = 6$$

STEP2 분모와 분자에 2^{2x} 을 곱하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2^{6x} - 2^{-6x}}{2^{2x} - 2^{-2x}} &= \frac{2^{2x}(2^{6x} - 2^{-6x})}{2^{2x}(2^{2x} - 2^{-2x})} \\ &= \frac{2^{8x} - 2^{-4x}}{2^{4x} - 1} = \frac{(2^{4x})^2 - (2^{4x})^{-1}}{2^{4x} - 1} \\ &= \frac{6^2 - \frac{1}{6}}{6 - 1} = \frac{43}{6} \end{aligned}$$

09-3 ㉮ $\frac{20}{63}$

해결전략 | 주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 구하는 식의 분모와 분자에 3^x 을 곱한다.

STEP1 주어진 식과 구하는 식을 3^{nx} 꼴로 나타내기

$$9^x = 3^{2x} = 4 \text{이고}$$

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{27^x - 27^{-x}} = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^{3x} - 3^{-3x}}$$

STEP2 구하는 식의 분모와 분자에 3^x 을 곱하여 값 구하기

$$\begin{aligned} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^{3x} - 3^{-3x}} &= \frac{3^x(3^x + 3^{-x})}{3^x(3^{3x} - 3^{-3x})} \\ &= \frac{3^{2x} + 1}{3^{4x} - 3^{-2x}} = \frac{3^{2x} + 1}{(3^{2x})^2 - (3^{2x})^{-1}} \\ &= \frac{4 + 1}{4^2 - \frac{1}{4}} = \frac{20}{63} \end{aligned}$$

09-4 ㉮ 16

해결전략 | 주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 구하는 식의 분모와 분자에 3^a 을 곱한다.

STEP1 3^{2a} 의 값 구하기

$$9^a = 3^{2a} = 8$$

STEP2 구하는 식의 분모와 분자에 3^a 을 곱하여 값 구하기

$$\frac{3^a - 3^{-a}}{3^a + 3^{-a}} = \frac{3^a(3^a - 3^{-a})}{3^a(3^a + 3^{-a})} = \frac{3^{2a} - 1}{3^{2a} + 1} = \frac{8 - 1}{8 + 1} = \frac{7}{9}$$

STEP3 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=9, q=7$ 이므로

$$p+q=16$$

09-5 ㉮ 16

해결전략 | 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 a^x 을 곱하여 a^{2x} 을 값을 구한다.

STEP1 $a^{4x} = (a^{2x})^2$ 이므로 주어진 식의 좌변의 분모와 분자에 a^x 을 곱하기

$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1}$$

STEP2 주어진 식을 변형하여 a^{2x} 의 값 구하기

$$\text{즉, } \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{5}{3} \text{에서 } 3(a^{2x} + 1) = 5(a^{2x} - 1) \text{이므로}$$

$$2a^{2x} = 8, a^{2x} = 4$$

STEP3 a^{4x} 의 값 구하기

$$\therefore a^{4x} = (a^{2x})^2 = 4^2 = 16$$

09-6 ㉮ $\frac{13}{6}$

해결전략 | 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 5^x 을 곱하여 25^x 의 값을 구한다.

STEP1 주어진 식의 좌변의 분모와 분자에 a^x 을 곱하기

$\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}}$ 의 분모, 분자에 5^x 을 곱하면

$$\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = \frac{5^x(5^x + 5^{-x})}{5^x(5^x - 5^{-x})} = \frac{25^x + 1}{25^x - 1}$$

STEP2 주어진 식을 변형하여 25^x 의 값 구하기

$$\text{즉, } \frac{25^x+1}{25^x-1}=5 \text{이므로}$$

$$25^x+1=5(25^x-1), 4 \times 25^x=6$$

$$\therefore 25^x=\frac{3}{2}$$

STEP3 25^x+25^{-x} 의 값 구하기

$$\therefore 25^x+25^{-x}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$$

필수유형 10

29쪽

10-1 답 (1) 4 (2) 2

해결전략 | 값을 구해야 하는 식을 주어진 조건을 사용할 수 있도록 변형하거나 주어진 조건을 이용하여 구하는 식이 나오도록 만든다.

(1) STEP1 구하는 식을 주어진 식을 이용하여 나타내기

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{x}{3}}=(3^{-2})^{-\frac{x}{3}}=(3^x)^{\frac{2}{3}}$$

STEP2 주어진 식의 값 대입하기

$$(3^x)^{\frac{2}{3}} \text{에 } 3^x=8 \text{을 대입하면}$$

$$(3^x)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$$

(2) STEP1 주어진 식을 변형하여 나타내기

$$45^x=81 \text{에서}$$

$$45=81^{\frac{1}{x}}=(3^4)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{4}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5^y=27 \text{에서}$$

$$5=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 구하는 식의 값이 나오도록 변형한 식 이용하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{45}{5}=3^{\frac{4}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}}$$

$$9=3^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}, 3^2=3^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}$$

$$\therefore \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=2$$

10-2 답 -3

해결전략 | 주어진 식을 지수법칙을 이용하여 구하는 식이 나오도록 변형한다.

STEP1 주어진 식을 변형하여 나타내기

$$7^x=9 \text{에서}$$

$$7=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$189^y=81 \text{에서}$$

$$189=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 구하는 식의 값이 나오도록 변형한 식 이용하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{7}{189}=3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}}$$

$$\frac{1}{27}=3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}}, 3^{-3}=3^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-3$$

10-3 답 $\frac{b^3}{a^2}$

해결전략 | 구하는 식을 주어진 식을 이용하여 나타낸다.

STEP1 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3y}$ 을 주어진 식 $5^x, 5^y$ 을 이용하여 나타내기

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3y}=(5^{-1})^{2x-3y}=(5^x)^{-2} \times (5^y)^3$$

STEP2 주어진 식의 값 대입하기

$$5^x=a, 5^y=b \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3y}=(5^x)^{-2} \times (5^y)^3=a^{-2} \times b^3=\frac{b^3}{a^2}$$

10-4 답 8

해결전략 | 주어진 식을 지수법칙을 이용하여 구하는 식이 나오도록 변형한다.

STEP1 주어진 식을 변형하여 나타내기

$$24^a=32 \text{에서}$$

$$24=32^{\frac{1}{a}}=(2^5)^{\frac{1}{a}}=2^{\frac{5}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3^b=2 \text{에서}$$

$$3=2^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 구하는 식의 값이 나오도록 변형한 식 이용하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{24}{3}=2^{\frac{5}{a}} \div 2^{\frac{1}{b}}$$

$$\therefore 2^{\frac{5}{a}-\frac{1}{b}}=8$$

10-5 답 15

해결전략 | 2^{ab+a+b} 을 $2^a, 6^b$ 을 이용하여 나타내고, $2^a=3, 6^b=5$ 를 대입한다.

$$\begin{aligned} 2^{ab+a+b} &= (2^a)^b \times 2^a \times 2^b \\ &= 3^b \times 3 \times 2^b \quad (\because 2^a=3) \\ &= (3 \times 2)^b \times 3 \\ &= 6^b \times 3 \end{aligned}$$

$$=5 \times 3 \quad (\because 6^b=5)$$

$$=15$$

●→ 다른 풀이

$$6^b = (2 \times 3)^b = (2 \times 2^a)^b = 2^{ab+b}$$

$$2^{ab+a+b} = 2^{ab+b} \times 2^a$$

$$= 6^b \times 2^a$$

$$= 5 \times 3 = 15$$

10-6 80

해결전략 구하는 식을 주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

STEP1 구하는 식을 주어진 식을 이용하여 나타내기

$$3 = \frac{60}{20} = \frac{60}{60^b} = 60^{1-b}$$

STEP2 주어진 식의 값 대입하기

$$\therefore 3^{\frac{a+b}{1-b}} = (60^{1-b})^{\frac{a+b}{1-b}}$$

$$= 60^{a+b}$$

$$= 60^a \times 60^b$$

$$= 4 \times 20 = 80$$

필수유형 11

31 쪽

11-1 11 (1) 2 (2) 0

해결전략 주어진 조건식을 밑을 통일하여 식을 변형한다.

(1) **STEP1** 16과 2를 a^r 꼴로 나타내기

$$16^x = a^x \text{에서 } (16^x)^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore a^{\frac{1}{x}} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^y = a^y \text{에서 } (2^y)^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore a^{\frac{1}{y}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 a 의 값 구하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$a^{\frac{1}{x}} \div a^{\frac{1}{y}} = \frac{16}{2}, \quad a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = 8$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3 \text{이므로 } a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

(2) **STEP1** 2, 10, 5를 k^r 꼴로 나타내기

$$2^x = 10^y = 5^z = k \text{로 놓으면 } k > 0 \text{이고,}$$

$$xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1 \text{이다.}$$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$10^y = k \text{에서 } 10 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$5^z = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값 구하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \times \textcircled{3}$ 을 하면

$$2 \div 10 \times 5 = k^{\frac{1}{x}} \div k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}$$

$$1 = k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \text{에서 } k > 0 \text{이고, } k \neq 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

11-2 5

해결전략 주어진 조건식을 밑이 같게 되도록 식을 변형한다.

STEP1 5, 25를 k^r 꼴로 나타내기

$$5^x = k^x \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$25^y = k^y \text{에서 } 25 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 a 의 값 구하기

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$5 \times 25 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}}, \quad 5^3 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \text{이므로 } k^3 = 5^3$$

$$\therefore k = 5$$

11-3 3/4

해결전략 주어진 조건식을 3을 밑으로 하는 식으로 변형한다.

STEP1 a 와 b 를 3^r 꼴로 나타내기

$$a^x = 81 = 3^4 \text{에서 } a = 3^{\frac{4}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b^y = 81 = 3^4 \text{에서 } b = 3^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값 구하기

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$ab = 3^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y}} = 3^{4(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$$

$$\text{이때 } ab = 27 = 3^3 \text{이므로 } 3^3 = 3^{4(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$$

$$4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$$

11-4 42

해결전략 주어진 조건식을 밑이 같게 되도록 식을 변형한다.

STEP1 2, 3, 7을 a^r 꼴로 나타내기

$$2^x = a \text{에서 } 2 = a^{\frac{1}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3^y = a \text{에서 } 3 = a^{\frac{1}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$7^z = a \text{에서 } 7 = a^{\frac{1}{z}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

STEP 2 지수법칙을 이용하여 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값 구하기

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \times \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$2 \times 3 \times 7 = a^{\frac{1}{x}} \times a^{\frac{1}{y}} \times a^{\frac{1}{z}}, 42 = a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \text{이므로 } a^2 = 42$$

$$\therefore a = \sqrt{42} \quad (\because a > 0)$$

11-5 ㉡ 49

해결전략 | 주어진 조건식을 밑이 같게 되도록 식을 변형한다.

STEP 1 $a, b, 7$ 를 k^r 꼴로 나타내기

$a^x = b^y = 7^z = k \quad (k > 0)$ 로 놓으면 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$ 이다.

$$a^x = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^y = k \text{에서 } b = k^{\frac{1}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$7^z = k \text{에서 } 7 = k^{\frac{1}{z}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

STEP 2 지수법칙을 이용하여 ab 의 값 구하기

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = (k^{\frac{1}{z}})^2$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 대입하면

$$ab = 7^2 = 49$$

11-6 ㉡ 12

해결전략 | 주어진 조건식을 지수를 같게 하여 변형한다.

STEP 1 $abc = 49$ 를 이용할 수 있도록 a^x, b^{2y}, c^{3z} 의 지수를 $6xyz$ 로 변형하기

$$a^x = b^{2y} = c^{3z} = 7 \text{에서 지수를 } 6xyz \text{로 같게 하면}$$

$$a^{6xyz} = 7^{6yz} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^{6xyz} = 7^{3xz} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$c^{6xyz} = 7^{2xy} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

STEP 2 지수법칙을 이용하여 $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$ 의 값 구하기

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \times \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$a^{6xyz} \times b^{6xyz} \times c^{6xyz} = 7^{6yz} \times 7^{3xz} \times 7^{2xy}$$

$$(abc)^{6xyz} = 7^{6yz+3xz+2xy}$$

$$\text{이때 } abc = 49 = 7^2 \text{이므로}$$

$$(7^2)^{6xyz} = 7^{6yz+3xz+2xy}$$

$$7^{12xyz} = 7^{6yz+3xz+2xy}$$

지수끼리 비교하면

$$12xyz = 6yz + 3xz + 2xy$$

양변을 xyz 로 나누면

$$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 12$$

필수유형 12

33쪽

12-1 ㉡ 64

해결전략 | 주어진 관계식에 제시된 수를 대입한 후 지수법칙을 이용한다.

$$m_s = 2^{1000} m_p, d = 2^{406} \text{을 주어진 식에 대입하면}$$

$$r = d \times \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$= 2^{406} \times \left(\frac{m_p}{2^{1000} m_p} \right)^{\frac{2}{5}}$$

$$= 2^{406} \times (2^{-1000})^{\frac{2}{5}}$$

$$= 2^{406} \times 2^{-400}$$

$$= 2^6$$

즉, r 의 값은 64이다.

12-2 ㉡ 32배

해결전략 | 주어진 관계식에 제시된 수를 대입한 후 지수법칙을 이용하여 식을 정리하고 문제에서 묻는 값을 구한다.

STEP 1 주어진 관계식에 각 문자에 해당하는 값을 대입하여 k^4 의 값 구하기

t 시간이 지난 후의 세균의 개체 수 m 은

$$m = m_0 \times k^t$$

이때 4시간이 지난 후의 세균의 개체 수는 처음 수의 2배
이므로

$$2m_0 = m_0 \times k^4$$

$$\therefore k^4 = 2$$

STEP 2 구하는 값을 주어진 식에 대입하기

따라서 20시간이 지난 후의 개체 수는

$$m = m_0 \times k^{20} = m_0 \times (k^4)^5$$

$$= m_0 \times 2^5 = 32m_0$$

이므로 처음 수의 32배가 된다.

12-3 ㉔ 40

해결전략 | 주어진 상황을 a 에 대한 식으로 나타낸 다음 지수법칙을 이용한다.

STEP1 4일이 지난 후 인체에 남아 있는 진통제의 양을 a 에 대한 식으로 나타내기

10 mg의 진통제가 흡수되고 1일, 2일, 3일, 4일이 지난 후 인체에 남은 진통제의 양은 각각

$$10 \times \frac{a}{100}, 10 \times \left(\frac{a}{100}\right)^2, 10 \times \left(\frac{a}{100}\right)^3, 10 \times \left(\frac{a}{100}\right)^4$$

4일이 지난 후 인체에 남은 진통제의 양이 0.256 mg이므로

$$10 \times \left(\frac{a}{100}\right)^4 = 0.256$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$\frac{a^4}{10^7} = 0.256$$

$$a^4 = \frac{256}{1000} \times 10^7 = 4^4 \times 10^4 = 40^4$$

$$\therefore a = 40$$

12-4 ㉔ 0.35

해결전략 | $\frac{Q_A}{Q_B}$ 를 구하고 제시된 수를 대입한 다음 지수법칙을 이용한다.

STEP1 주어진 관계식에 각 문자에 해당하는 값 대입하기

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{0.01t^{1.25}w^{0.25}}{0.05t^{0.75}w^{0.30}} = \frac{t^{0.5}}{5w^{0.05}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이고, 수온이 20 °C이므로 $t=20$, A, B 조개의 개체중량이 8 g이므로 $w=8$ 을 ㉑에 대입하면

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{20^{0.5}}{5 \times 8^{0.05}} = \frac{(4 \times 5)^{0.5}}{5 \times 2^{0.15}} = \frac{2 \times 5^{0.5}}{2^{0.15} \times 5} = 2^{0.85} \times 5^{-0.5}$$

STEP2 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $a=0.85$, $b=-0.5$ 이므로

$$a+b=0.35$$

12-5 ㉔ 27

해결전략 | v_A, v_B 를 구한 다음 지수법칙을 이용한다.

STEP1 v_A, v_B 에 각 문자에 해당하는 값 대입하기

$$v_A = c \left(\frac{\pi a^2}{2\pi a} \right)^{\frac{2}{3}} \times \frac{2c}{10} \left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \left(\frac{4}{100} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{10}$$

$$v_B = c \left(\frac{\pi b^2}{2\pi b} \right)^{\frac{2}{3}} \times \frac{3c}{10} \left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \left(\frac{9}{100} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

STEP2 $\frac{v_A}{v_B}$ 의 값 구하기

$$\frac{v_A}{v_B} = 6 \text{이므로}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{2c}{10} \left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{3c}{10} \left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 6$$

STEP3 $\frac{a}{b}$ 의 값 구하기

이때 $\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 9$ 이므로

$$\frac{a}{b} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 27$$

실전 연습 문제

34~36쪽

01 ㉔	02 ㉔	03 -1	04 ㉔	05 ㉔
06 ㉔	07 $3\sqrt{3}$	08 ①	09 ②	10 ②
11 ㉔	12 3	13 12	14 ㉔	15 2
16 ①	17 9배			

01

해결전략 | 거듭제곱근의 정의를 이용하여 옳은 것을 찾는다.

① n 이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a^n} = a$ 이므로 $\sqrt[n]{(-5)^n} = -5$

② -81의 네제곱근을 x 라고 하면

$$x^4 = -81, x^4 + 81 = 0$$

$$(x^2 - 9i)(x^2 + 9i) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 ㉑을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로

-81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

③ 8의 세제곱근을 x 라고 하면

$$x^3 = 8, x^3 - 8 = 0, (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

④ 제곱근 36은 $\sqrt{36}$ 이므로 $\sqrt{36} = 6$

⑤ 4의 n 제곱근 중 실수인 것은 $x^n = 4$ 를 만족시키는 실근 x 이다. 이때 n 이 홀수이므로 $x = \sqrt[n]{4}$ 의 1개이다.

02

해결전략 | a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 a 가 양수, 음수일 때, n 이 짝수, 홀수일 때로 나누어 생각한다.

STEP1 $a = -5$ 일 때, $R(-5, 6)$, $R(-5, 7)$ 의 값 구하기

-5의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

n 이 짝수이면 없다. $\Rightarrow R(-5, 6) = 0$

n 이 홀수이면 1개 $\Rightarrow R(-5, 7) = 1$

STEP2 $a=8$ 일 때, $R(8, 4)$, $R(8, 5)$ 의 값 구하기

8의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

n 이 짝수이면 2개 $\Rightarrow R(8, 4)=2$

n 이 홀수이면 1개 $\Rightarrow R(8, 5)=1$

STEP3 $R(-5, 6)+R(-5, 7)+R(8, 4)+R(8, 5)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore R(-5, 6)+R(-5, 7)+R(8, 4)+R(8, 5) \\ =0+1+2+1=4 \end{aligned}$$

03

해결전략 a 의 n 제곱근은 방정식 $x^n=a$ 의 해임을 이용한다.

STEP1 a 의 값 구하기

-216 의 세제곱근은 방정식 $x^3=-216$ 의 근이므로

$$x^3+216=0, (x+6)(x^2-6x+36)=0$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=3\pm3\sqrt{3}i$$

이 중에서 실수인 것은 -6 이므로

$$a=-6 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 b 의 값 구하기

또, 25 의 네제곱근은 방정식 $x^4=25$ 의 근이므로

$$x^4-25=0, (x^2-5)(x^2+5)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i$$

이 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt{5}$ 이므로

$$b=\pm\sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

STEP3 $a+b^2$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b^2=-6+5=-1 \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① a 의 값 구하기	40 %
② b 의 값 구하기	40 %
③ $a+b^2$ 의 값 구하기	20 %

04

해결전략 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 계산한다.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a} \times \frac{1}{4\sqrt[5]{a}} \div \sqrt[3]{a} \times \frac{1}{8\sqrt[5]{a}} \times \sqrt[5]{a} \times \frac{32}{\sqrt[3]{a}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \frac{1}{4\sqrt[5]{a}} \div \left(\sqrt[3]{a} \times \frac{1}{8\sqrt[5]{a}} \right) \times \sqrt[5]{a} \times \frac{32}{\sqrt[3]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[2]{2^{10}\sqrt{a}}} \div \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{2^{315}\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[5]{2^{510}\sqrt{a}}}{\sqrt[15]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{a}}{2^{10}\sqrt{a}} \times \frac{2^{15}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{2^{10}\sqrt{a}}{\sqrt[15]{a}} \\ &=2 \end{aligned}$$

05

해결전략 $\sqrt[3]{2m}$, $\sqrt{n^3}$ 을 분수인 지수로 나타내어

$\sqrt[3]{2m} \times \sqrt{n^3}$ 의 값이 자연수가 될 조건을 찾는다.

STEP1 m 이 될 수 있는 값 구하기

$\sqrt[3]{2m}=(2m)^{\frac{1}{3}}$ 이 자연수이므로 $m=2^2 \times k^3$ (k 는 자연수) 꼴이다. 135 이하의 자연수 중 m 이 될 수 있는 값은 $2^2 \times 1^3$, $2^2 \times 2^3$, $2^2 \times 3^3$ 뿐이다.

STEP2 n 이 될 수 있는 값 구하기

또, $\sqrt{n^3}=n^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수이므로 $n=l^2$ (l 은 자연수) 꼴이다. 9 이하의 자연수 중 n 이 될 수 있는 값은 1^2 , 2^2 , 3^2 뿐이다.

STEP3 $m+n$ 의 최댓값 구하기

따라서 $m+n$ 의 최댓값은

$$2^2 \times 3^3 + 3^2 = 117$$

06

해결전략 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 한다.

STEP1 거듭제곱근의 성질을 이용하여 간단히 하기

$$① \sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$$

$$② \sqrt[4]{3} \sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

$$③ \sqrt{\sqrt{36}}=\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$$

$$④ \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$$

$$⑤ (\sqrt[4]{49})^2=\sqrt[4]{49^2}=\sqrt[4]{(7^2)^2}=\sqrt[4]{7^4}=7$$

STEP2 대소 비교하기

따라서 $\sqrt{6}<3<4<5<7$ 이므로 값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

07

해결전략 $a-b>0$ 이면 $a>b$ 이고 $a-b<0$ 이면 $a<b$ 임을 이용하여 네 수 A, B, C, D 의 대소 관계를 구한다.

STEP1 두 수의 차를 이용하여 A, B, C, D 의 대소 관계 구하기

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A-B &= (3\sqrt{3}+\sqrt[3]{6})-(\sqrt{3}+3\sqrt[3]{6}) \\ &= 2(\sqrt{3}-\sqrt[3]{6})=2(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{36})<0 \end{aligned}$$

$$\therefore A<B$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad C-D &= (2\sqrt[3]{6}-3\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-3\sqrt[3]{6}) \\ &= 5(\sqrt[3]{6}-\sqrt{3})=5(\sqrt[6]{36}-\sqrt[6]{27})>0 \end{aligned}$$

$$\therefore C>D$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad A-C &= (3\sqrt{3}+\sqrt[3]{6})-(2\sqrt[3]{6}-3\sqrt{3}) \\ &= 6\sqrt{3}-\sqrt[3]{6} \\ &= 4\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-\sqrt[3]{6}) \end{aligned}$$

$$=4\sqrt{3}+(\sqrt{12}-\sqrt[3]{6})$$

$$=4\sqrt{3}+(\sqrt[6]{12^3}-\sqrt[6]{36})>0$$

$$\therefore A>C \quad \dots\dots ①$$

STEP2 가장 큰 수와 가장 작은 수 구하기

(i)~(iii)에서 $D<C<A<B$ 이므로 가장 큰 수는 B 이고 가장 작은 수 D 이다. $\dots\dots ②$

STEP3 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합 구하기

따라서 가장 큰 수 B 와 가장 작은 수 D 의 합은 $B+D=(\sqrt{3}+3\sqrt[3]{6})+(2\sqrt{3}-3\sqrt[3]{6})=3\sqrt{3} \quad \dots\dots ③$

채점 요소	배점
① A, B, C, D 의 대소 관계 구하기	60 %
② 가장 큰 수와 가장 작은 수 구하기	20 %
③ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합 구하기	20 %

☞ 풍뎡의 비법

두 수의 대소 관계 판정

[방법 1] 차의 부호를 조사

$$A-B>0\text{이면 }A>B$$

[방법 2] 제곱의 차의 부호를 조사

$$A>0, B>0\text{ 일 때,}$$

$$A^2-B^2>0\text{이면 }A>B$$

[방법 3] 비를 조사

$$A>0, B>0\text{ 일 때,}$$

$$\frac{A}{B}>1\text{이면 }A>B$$

08

해결전략 | 거듭제곱근을 분수 지수로 고쳐 계산한다.

STEP1 나누는 식과 나누어지는 식을 각각 분수 지수로 나타내기

$$\sqrt[4]{\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[3]{a}}} = (a^{\frac{1}{2}} \times a \times a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$$

$$= (a^{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$$

$$= (a^{\frac{7}{6}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{24}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a} \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{7}{24}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{8}}$$

STEP2 m 의 값 구하기

따라서 $\sqrt[4]{\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[3]{a}}} \div \frac{\sqrt[4]{\sqrt{a} \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}} = a^{\frac{7}{24}-\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$$m = \frac{1}{6}$$

09

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 식을 변형한다.

STEP1 $3^x, 5^x$ 를 각각 a, b 에 대한 식으로 나타내기

$$3^{x+1}-3^x=2 \times 3^x=a$$

$$\therefore 3^x=\frac{a}{2}$$

$$5^{x+1}+5^x=6 \times 5^x=b$$

$$\therefore 5^x=\frac{b}{6}$$

STEP2 45를 소인수분해하고 $3^x, 5^x$ 의 값 대입하기

$$\therefore 45^x=(3^2 \times 5)^x=3^{2x} \times 5^x$$

$$=(3^x)^2 \times 5^x$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{b}{6}=\frac{a^2 b}{24}$$

10

해결전략 | 부분분수를 이용하여 지수를 간단히 하여 구한다.

STEP1 부분분수 이용하기

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\text{이므로}$$

$$7^{\frac{1}{n(n+1)}}=7^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

STEP2 주어진 식을 간단히 하여 k 의 값 구하기

$$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_{2021}$$

$$=7^{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)}$$

$$=7^{1-\frac{1}{2022}}=7^{\frac{2021}{2022}}$$

$$\therefore k=\frac{2021}{2022}$$

11

해결전략 | 곱셈 공식과 지수법칙을 이용하여 27^x+27^{-y} 의 값을 구한다.

STEP1 $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$ 를 이용하여

27^x+27^{-y} 변형하기

$$27^x+27^{-y}=3^{3x}+3^{-3y}$$

$$=(3^x+3^{-y})^3-3 \times 3^x \times 3^{-y}(3^x+3^{-y})$$

$$=(3^x+3^{-y})^3-3 \times 3^{x-y}(3^x+3^{-y}) \quad \dots\dots ㉠$$

STEP2 ㉠에 $x-y=1, 3^x+3^{-y}=4$ 를 대입하여 값 구하기

㉠에 $x-y=1, 3^x+3^{-y}=4$ 를 대입하면

$$4^3-3 \times 3 \times 4=28$$

12

해결전략 | 곱셈 공식과 지수법칙을 이용하여 $(x+\sqrt{x^2-1})^4$ 의 값을 구한다.

STEP 1 곱셈 공식 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 을 이용하여 x^2-1 의 값 구하기

$$x=\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= \left(\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^2-1 \\ &= \frac{3^{\frac{1}{2}}+2 \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{2}}}{4}-1 \\ &= \frac{3^{\frac{1}{2}}+2+3^{-\frac{1}{2}}-4}{4} = \frac{3^{\frac{1}{2}}-2+3^{-\frac{1}{2}}}{4} \\ &= \left(\frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^2 \quad \leftarrow 3^{\frac{1}{4}} > 3^{-\frac{1}{4}} \text{이므로 } \frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2} > 0 \end{aligned}$$

STEP 2 $(x+\sqrt{x^2-1})^4$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \sqrt{x^2-1} = \frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (x+\sqrt{x^2-1})^4 &= \left(\frac{3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}}}{2} + \frac{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)^4 \\ &= (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3 \end{aligned}$$

13

해결전략 | 먼저 $2^{2x}-3 \times 2^x-1=0$ 의 양변에 2^{-x} 을 곱하여 2^x-2^{-x} 의 값을 구한다.

STEP 1 2^x-2^{-x} 의 값 구하기

$$2^{2x}-3 \times 2^x-1=0 \text{의 양변에 } 2^{-x} \text{을 곱하면}$$

$$2^x-3-2^{-x}=0$$

$$2^x-2^{-x}=3$$

STEP 2 $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}} &= \frac{(2^x-2^{-x})^3+3(2^x-2^{-x})}{2^x-2^{-x}} \\ &= \frac{3^3+3 \times 3}{3} = 12 \end{aligned}$$

14

해결전략 | $f(\alpha), f(\beta)$ 의 값을 이용하여 $2^{2\alpha}, 2^{2\beta}$ 의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 에 $x=\alpha+\beta$ 를 대입하여 $f(\alpha+\beta)$ 를 $2^\alpha, 2^\beta$ 를 포함한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \frac{2^{\alpha+\beta}-2^{-(\alpha+\beta)}}{2^{\alpha+\beta}+2^{-(\alpha+\beta)}} = \frac{2^{\alpha+\beta}(2^{\alpha+\beta}-2^{-(\alpha+\beta)})}{2^{\alpha+\beta}(2^{\alpha+\beta}+2^{-(\alpha+\beta)})} \\ &= \frac{2^{2\alpha+2\beta}-1}{2^{2\alpha+2\beta}+1} \\ &= \frac{2^{2\alpha} \times 2^{2\beta}-1}{2^{2\alpha} \times 2^{2\beta}+1} \end{aligned}$$

STEP 2 $f(\alpha)=\frac{2}{3}$ 에서 $2^{2\alpha}$ 의 값 구하기

$$f(\alpha) = \frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2^\alpha+2^{-\alpha}} = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$3(2^\alpha-2^{-\alpha})=2(2^\alpha+2^{-\alpha})$$

$$2^\alpha=5 \times 2^{-\alpha} \quad \therefore 2^{2\alpha}=5$$

STEP 3 $f(\beta)=\frac{4}{5}$ 에서 $2^{2\beta}$ 의 값 구하기

$$f(\beta) = \frac{2^\beta-2^{-\beta}}{2^\beta+2^{-\beta}} = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$5(2^\beta-2^{-\beta})=4(2^\beta+2^{-\beta})$$

$$2^\beta=9 \times 2^{-\beta} \quad \therefore 2^{2\beta}=9$$

STEP 4 $f(\alpha+\beta)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(\alpha+\beta) = \frac{2^{2\alpha} \times 2^{2\beta}-1}{2^{2\alpha} \times 2^{2\beta}+1} = \frac{5 \times 9-1}{5 \times 9+1} = \frac{22}{23}$$

15

해결전략 | 주어진 조건식을 10을 밑으로 하는 식으로 변형한다.

STEP 1 3.28, 0.0328을 10^k 꼴로 나타내기

$$3.28^x=10 \text{에서}$$

$$3.28=10^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0.0328^y=10 \text{에서}$$

$$0.0328=10^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 지수법칙을 이용하여 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 의 값 구하기

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{3.28}{0.0328} = \frac{10^{\frac{1}{x}}}{10^{\frac{1}{y}}}, \quad 10^2 = 10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

채점 요소	배점
① 3.28과 0.0328을 10^k 으로 나타내기	각 20 %
② $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 의 값 구하기	60 %

16

해결전략 | 주어진 조건식을 밑이 같게 되도록 식을 변형한다.

STEP 1 2, 5, 10을 k^r 꼴로 나타내기

$2^x = 5^y = 10^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$5^y = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$10^z = k \text{에서 } 10 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 $xy - yz - zx$ 의 값 구하기

$$2 \times 5 = 10, \text{ 즉 } \textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} = \textcircled{㉢} \text{이므로}$$

$$k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{z}}, \quad k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{z}}$$

그런데 $k > 0$ 이고 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

위의 식의 양변에 xyz 를 곱하면

$$yz + zx = xy$$

$$\therefore xy - yz - zx = 0$$

17

해결전략 주어진 관계식에 제시된 수를 대입한 후 지수법칙을 이용하여 식을 정리하고 문제에서 묻는 값을 구한다.

STEP1 주어진 관계식에 각 문자에 해당하는 값 대입하기

초기 혈중 농도 x_0 와 t 시간 후의 혈중 농도 x 사이의 관계식은

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{kt}$$

이때 초기 혈중 농도를 $3a$ 로 하면 10시간의 효력이 있고, 10시간 후에는 혈중 농도가 a 가 되므로

$$a = 3a \left(\frac{1}{2} \right)^{10k}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} \right)^{10k} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP2 구한 식을 이용하여 몇 배인지 구하기

그런데 이 약이 20시간의 효력이 있게 하기 위한 초기 혈중 농도를 a_1 이라고 하면

$$a = a_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{20k}$$

$$= a_1 \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{10k} \right\}^2$$

$$= a_1 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \quad (\because \textcircled{㉠})$$

$$= \frac{a_1}{9}$$

$$\therefore a_1 = 9a$$

따라서 약이 20시간의 효력이 있으려면 초기 혈중 농도는 a 의 9배가 되게 해야 한다.

상위권 도약 문제

37~38쪽

01 ④

02 $-5 < a \leq 0$

03 ①

04 ①

05 125

06 ⑤

07 ④

08 ④

01

해결전략 거듭제곱근의 정의를 이용하여 참, 거짓을 판단한다.

STEP1 a 가 양수, m, n 이 홀수임을 알고 p, q 를 a 의 거듭제곱근 형태로 나타내기

$$p \text{는 } a \text{의 } m \text{제곱근 중 실수인 것이므로 } p = \sqrt[m]{a}$$

$$q \text{는 } a \text{의 } n \text{제곱근 중 실수인 것이므로 } q = \sqrt[n]{a}$$

STEP2 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\neg, \cup, \cap$ 의 참, 거짓 판별하기

$$\neg. p \text{의 } n \text{제곱근 중 실수인 것은 } \sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$q \text{의 } m \text{제곱근 중 실수인 것은 } \sqrt[m]{q} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\therefore \sqrt[n]{p} = \sqrt[m]{q} \text{ (참)}$$

$$\cup. a^n \text{의 } m \text{제곱근 중 실수인 것은 } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$a^m \text{의 } n \text{제곱근 중 실수인 것은 } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$[\text{반례}] m=3, n=9, a=\frac{1}{2} \text{이면}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{3}} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt[3]{512}} \quad \begin{array}{l} \text{반례로 } 0 < a < 1 \text{인} \\ \text{것을 찾는다.} \end{array}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{9}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{이므로 } a^{\frac{n}{m}} < a^{\frac{m}{n}}, \text{ 즉 } \sqrt[m]{a^n} < \sqrt[n]{a^m} \text{ (거짓)}$$

$$\cap. pq \text{의 } m+n \text{제곱근 중 양수인 것은}$$

$$\sqrt[m+n]{pq} = (pq)^{\frac{1}{m+n}} = (a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m+n}}$$

$$= (a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}})^{\frac{1}{m+n}} = (a^{\frac{m+n}{mn}})^{\frac{1}{m+n}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$a \text{의 } mn \text{제곱근 중 실수인 것은}$$

$$\sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\therefore \sqrt[m+n]{pq} = \sqrt[mn]{a} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \cap$ 이다.

02

해결전략 $\sqrt[n]{A}$ 가 음수가 되려면 n 이 홀수이고 $A < 0$ 이어야 한다.

STEP1 $\sqrt[7]{ax^2+2ax-5}$ 가 음수가 되는 조건 알기

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[7]{ax^2+2ax-5}$ 가 음수가 되려면 7이 홀수이므로 (근호 안의 값) < 0 이어야 한다.

STEP 2 a 의 값을 나누어 가능한 범위 구하기

따라서 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 + 2ax - 5 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 성립해야 하므로 이차항의 계수 a 가 $a=0$ 일 때와 $a \neq 0$ 일 때로 나누어 생각한다.

(i) $a=0$ 일 때

$$0 \times x^2 + 2 \times 0 \times x - 5 < 0$$

$$\therefore -5 < 0 \Rightarrow \text{항상 성립}$$

(ii) $a \neq 0$ 일 때

부등식 $\textcircled{7}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면

이차방정식 $ax^2 + 2ax - 5 = 0$ 에서

(이차항의 계수) < 0 이어야 하므로

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또, (판별식 D) < 0 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - a \times (-5) < 0$$

$$a(a+5) < 0 \quad \therefore -5 < a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8}, \textcircled{9}$ 에서 $-5 < a < 0$

(i), (ii)에 의하여 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-5 < a \leq 0$$

03

해결전략 $\sqrt[n]{A}$ 가 자연수 또는 유리수일 때 A 가 될 수 있는 수의 조건을 이용한다.

STEP 1 $\sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}}$ 이 자연수일 때 a, b 의 값 구하기

(i) $\sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이므로

$$a-1=2m, a=2m+1 \quad (m \text{은 음이 아닌 정수})$$

$$\therefore a=1, 3, 5, \dots$$

$$b=2n \quad (n \text{은 자연수}), \text{ 즉 } b=2, 4, 6, \dots$$

STEP 2 $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수일 때 a, b 의 값 구하기

(ii) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로

$$a+1=3k, a=3k-1 \quad (k \text{는 자연수})$$

$$\therefore a=2, 5, 8, \dots$$

$$b=3l \quad (l \text{은 자연수}), \text{ 즉 } b=3, 6, 9, \dots$$

STEP 3 $a+b$ 의 최솟값 구하기

(i), (ii)에 의하여 a 의 최솟값은 5, b 의 최솟값은 6이므로

$a+b$ 의 최솟값은 $5+6=11$ 이다.

04

해결전략 두 수의 비를 이용하여 두 수의 대소 관계를 구한다.

STEP 1 $n-5, m-8$ 의 부호 알기

m, n 이 자연수이므로

$$1 < m^{n-5} \text{에서 } n-5 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 < n^{m-8} \text{에서 } m-8 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{또, } m^{n-5} < n^{m-8} \text{에서 } \frac{n^{m-8}}{m^{n-5}} > 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

STEP 2 $\frac{A}{B}, \frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ 로 A, B, C 의 대소 관계 파악하기

$$\frac{A}{B} = \frac{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}} = m^{\frac{2}{m-8}} > 1 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore A > B$$

$$\frac{A}{C} = \frac{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}} = n^{\frac{2}{n-5}} > 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore A > C$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{C} &= \frac{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}} \times n^{\frac{1}{n-5}}} \\ &= m^{-\frac{2}{m-8}} \times n^{\frac{2}{n-5}} \\ &= (m^{-(n-5)} \times n^{m-8})^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}} \\ &= \left(\frac{n^{m-8}}{m^{n-5}} \right)^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}} > 1 \quad (\because \textcircled{3}) \end{aligned}$$

$$\therefore B > C$$

$$\therefore A > B > C$$

05

해결전략 $4^{\frac{a+b}{ab}} = 4^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 이므로 주어진 두 식을 이용하여 $4^{\frac{1}{a}}$, $4^{\frac{1}{b}}$ 의 값을 구한다.

STEP 1 주어진 두 등식을 2를 밑으로 하는 등식으로 변형하여

$4^{\frac{1}{a}}, 4^{\frac{1}{b}}$ 의 값 구하기

$$5^{2a+b} = 2^5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5^{a-b} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$5^{2a+b} \times 5^{a-b} = 2^5 \times 2$$

$$5^{(2a+b)+(a-b)} = 2^6, 5^{3a} = 4^3$$

$$5^a = 4 \quad \therefore 4^{\frac{1}{a}} = 5$$

$$5^{a-b} = 2 \text{에서 } \frac{5^a}{5^b} = 2, \frac{4}{5^b} = 2 \text{이므로}$$

$$5^b = 2 \quad \therefore 2^{\frac{1}{b}} = 5$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 $4^{\frac{a+b}{ab}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore 4^{\frac{a+b}{ab}} &= 4^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 4^{\frac{1}{a}} \times 4^{\frac{1}{b}} \\ &= 5 \times (2^{\frac{1}{b}})^2 = 5 \times 5^2 = 125\end{aligned}$$

06

해결전략 | $3^a = x$, $3^b = y$, $3^c = z$ 로 놓고 $9^a + 9^b + 9^c$ 을 x , y , z 를 이용하여 나타낸다.

STEP1 $3^a = x$, $3^b = y$, $3^c = z$ 로 놓고 xyz , $x+y+z$, $xy+yz+zx$ 의 값 구하기

$3^a = x$, $3^b = y$, $3^c = z$ 로 놓으면

$$xyz = 3^a \times 3^b \times 3^c = 3^{a+b+c} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+y+z = 3^a + 3^b + 3^c = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3^{-a} + 3^{-b} + 3^{-c} = \frac{11}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{xy+yz+zx}{xyz} \\ &= 9(xy+yz+zx) \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ &= \frac{11}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore xy+yz+zx = \frac{11}{27} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

STEP2 곱셈 공식의 변형과 지수법칙을 이용하여

$9^a + 9^b + 9^c$ 의 값 구하기

$\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 에서

$$\begin{aligned}9^a + 9^b + 9^c &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{22}{27} = \frac{26}{27}\end{aligned}$$

07

해결전략 | 12, k , 6을 밑이 같은 지수의 식으로 바꾼 다음 주

어진 식 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{6}{c}$ 을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP1 12, k , 6을 p^r 꼴로 나타내기

$12^a = k^b = 6^c = p$ ($p > 0$)로 놓으면

$$12 = p^{\frac{1}{a}} \text{에서 } 12^3 = p^{\frac{3}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$k = p^{\frac{1}{b}} \text{에서 } k^2 = p^{\frac{2}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$6 = p^{\frac{1}{c}} \text{에서 } 6^6 = p^{\frac{6}{c}}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 k 의 값 구하기

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\begin{aligned}12^3 \times k^2 &= p^{\frac{3}{a}} \times p^{\frac{2}{b}} = p^{\frac{3}{a} + \frac{2}{b}} = p^{\frac{6}{c}} \quad \left(\because \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{6}{c} \right) \\ &= 6^6\end{aligned}$$

$$k^2 = \frac{6^6}{12^3} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^6 \times 3^3} = 3^3 = 27$$

$$\therefore k = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (\because k > 0)$$

08

해결전략 | 두 물체 A, B의 질량 m_A , m_B 사이의 관계와 단면적 S_A , S_B 사이의 관계식을 구하여 문제에 주어진 식에 대입하여 지수법칙을 이용한다.

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A , m_B 라 하고, 단면적을 각각 S_A , S_B 라고 하자.

$m_A : m_B = 1 : 2\sqrt{2}$, $S_A : S_B = 1 : 8$ 이므로

$$m_B = 2\sqrt{2}m_A, \quad S_B = 8S_A$$

STEP2 주어진 관계식에 STEP1에서 구한 식 대입하기

$$v_A^2 = \frac{2m_A g}{D\rho S_A}$$

$$v_B^2 = \frac{2m_B g}{D\rho S_B} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}m_A g}{D\rho \times 8S_A} = \frac{4\sqrt{2}m_A g}{8D\rho S_A}$$

STEP3 지수법칙을 이용하여 $\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3$ 의 값 구하기

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{\frac{2m_A g}{D\rho S_A}}{\frac{4\sqrt{2}m_A g}{8D\rho S_A}} = 2\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2}}, \quad \left[\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3 = 2^{\frac{9}{4}}$$

02 로그

개념확인

40~43쪽

01 답 (1) $4 = \log_3 81$ (2) $0 = \log_5 1$
 (3) $-\frac{1}{2} = \log_{16} \frac{1}{4}$ (4) $3 = \log_{\frac{1}{5}} 0.008$

02 답 (1) 8 (2) 2 (3) 7 (4) 25

(1) $\log_2 x = 3$ 에서 $x = 2^3 = 8$

(2) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$ 에서 $x = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

(3) $\log_x 49 = 2$ 에서 $49 = x^2 \quad \therefore x = 7$

(4) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$ 에서 $5 = x^{\frac{1}{2}} \quad \therefore x = 25$

03 답 (1) 3 (2) 2 (2) -2 (4) 2

(1) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \times 32) = \log_4 64$
 $= \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3$

(2) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = \log_2 2^2$
 $= 2 \log_2 2 = 2$

(3) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3 = -2$

(4) $\log_6 4 + 2 \log_6 3 = \log_6 4 + \log_6 3^2 = \log_6 (4 \times 3^2)$
 $= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$

04 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 3 (3) 1 (4) 54

(1) $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2}$

(2) $5^{\log_5 3} = 3$

(3) $\log_2 9 \times \log_3 \sqrt{2} = \log_2 3^2 \times \log_3 2^{\frac{1}{2}}$
 $= 2 \log_2 3 \times \frac{1}{2} \log_3 2 = 1$

(4) $7^{\log_7 2} \times 8^{\log_7 3} = 2^{\log_7 7} \times 3^{\log_7 8} = 2^{\log_7 7} \times 3^{\log_7 2^3}$
 $= 2 \times 27 = 54$

05 답 (1) 0.4829 (2) 0.4928 (3) 0.5051

(4) 0.5105 (5) 0.9938 (6) 3.5092

(5) $\log 3.14^2 = 2 \log 3.14 = 2 \times 0.4969 = 0.9938$

(6) $\log 3230 = \log (10^3 \times 3.23) = \log 10^3 + \log 3.23$
 $= 3 + 0.5092 = 3.5092$

06 답 (1) 73800 (2) 0.0104

(1) $\log x = 4 + 0.8681$

$= \log 10^4 + \log 7.38$

$= \log (10^4 \times 7.38)$

$= \log 73800$

$\therefore x = 73800$

(2) $\log 104 = \log (10^2 \times 1.04) = \log 10^2 + \log 1.04$
 $= 2 + 0.0170$

이므로 $\log 1.04 = 0.0170$

$\log x = -1.9830 = -1 - 0.9830$

$= (-1 - 1) + (1 - 0.9830)$

$= -2 + 0.0170$

$= \log 10^{-2} + \log 1.04$

$= \log (10^{-2} \times 1.04)$

$= \log 0.0104$

$\therefore x = 0.0104$

필수유형 01

45쪽

01-1 답 (1) 6 (2) 2 (3) 81 (4) 256

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 식을 세운다.

(1) $\log_{2\sqrt{2}} 512 = a$ 에서 $(2\sqrt{2})^a = 512$

$(2^{\frac{3}{2}})^a = 2^9, 2^{\frac{3}{2}a} = 2^9, \frac{3}{2}a = 9 \quad \therefore a = 6$

(2) $\log_{16} a = 0.25$ 에서

$a = 16^{0.25} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$

(3) STEP1 로그의 정의 이용하기

$\log_a 3\sqrt{3} = \frac{3}{8}$ 에서 $a^{\frac{3}{8}} = 3\sqrt{3}$

STEP2 좌변에 a 만 남도록 변형하기

$(a^{\frac{3}{8}})^{\frac{8}{3}} = (3\sqrt{3})^{\frac{8}{3}} \quad \therefore a = 3^4 = 81$

(4) STEP1 로그의 정의 이용하기

$\log_{\frac{1}{2}} (\log_{16} a) = -1$ 에서 $\log_{16} a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

STEP2 로그의 정의 이용하여 a 의 값 구하기

$\log_{16} a = 2$ 에서 $a = 16^2 = 256$

01-2 답 4

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.

$\log_{\sqrt{3}} a = 4$ 에서 $a = (\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$

$\log_2 \frac{1}{32} = b$ 에서 $2^b = \frac{1}{32} = 2^{-5} \quad \therefore b = -5$

$\therefore a + b = 9 + (-5) = 4$

01-3 답 243

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.

$\log_9 a = \frac{7}{2}$ 에서 $a = 9^{\frac{7}{2}} = (3^2)^{\frac{7}{2}} = 3^7$

$$\log_b 81 = \frac{1}{3} \text{에서 } b^{\frac{1}{3}} = 81$$

$$\therefore b = (81)^3 = (3^4)^3 = 3^{12}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3^{12}}{3^7} = 3^5 = 243$$

01-4 ㉮ 14

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 식의 값을 구한다.

$$\log_2 \frac{a}{4} = b \text{에서 } \frac{a}{4} = 2^b \quad \therefore a = 4 \times 2^b$$

$$\therefore \frac{2^b}{a} = \frac{2^b}{4 \times 2^b} = \frac{1}{4}$$

01-5 ㉮ 32

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.

STEP1 로그의 정의를 이용하여 a 의 값 구하기

$$\log_2(\log_a 2) = -1 \text{에서 } \log_a 2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \therefore a = 2^2 = 4$$

STEP2 로그의 정의를 이용하여 b 의 값 구하기

$$\log_2 \{ \log_3 (\log_2 b) \} = 0 \text{에서 } \log_3 (\log_2 b) = 1$$

$$\log_2 b = 3^1 = 3 \quad \therefore b = 2^3 = 8$$

$$\therefore ab = 4 \times 8 = 32$$

01-6 ㉮ 16

해결전략 | 두 직선이 평행할 조건을 식으로 나타낸다.

STEP1 두 직선이 평행할 조건을 이용하여 식 세우기

두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-\log_2 a} \neq \frac{4}{6}$$

STEP2 로그의 정의를 이용하여 a 의 값 구하기

$$\text{이때 } \log_2 a = 4 \text{이므로 } a = 2^4 = 16$$

㉮ 풍뎡의 비법

두 직선의 평행 조건

두 직선 $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ 이 평행

$$\iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

필수유형 02

47쪽

02-1 ㉮ 2

해결전략 | 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수일 x 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 인 범위 구하기

밑은 1이 아닌 양수이어야 하므로

$$x > 0, x \neq 1$$

..... ㉮

STEP2 (진수) >0 인 범위 구하기

진수는 양수이어야 하므로

$$-x^2 + 3x + 4 > 0$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0, (x+1)(x-4) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 4$$

..... ㉮

STEP3 공통 범위를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

㉮, ㉮을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 4$$

따라서 정수 x 의 개수는 2, 3의 2이다.

02-2 ㉮ 8

해결전략 | 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수일 x 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 인 범위 구하기

밑은 1이 아닌 양수이어야 하므로

$$a+3 > 0, a+3 \neq 1$$

$$\text{즉, } a > -3, a \neq -2$$

..... ㉮

STEP2 (진수) >0 인 범위 구하기

진수는 양수이어야 하므로

$$-a^2 + 3a + 28 > 0, a^2 - 3a - 28 < 0$$

$$(a+4)(a-7) < 0 \quad \therefore -4 < a < 7$$

..... ㉮

STEP3 공통 범위를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

㉮, ㉮을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-3 < a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < 7$$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 8이다.

02-3 ㉮ 4

해결전략 | 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수일 x 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 인 범위 구하기

밑은 1이 아닌 양수이어야 하므로

$$a-2 > 0, a-2 \neq 1, \text{ 즉 } a > 2, a \neq 3$$

..... ㉮

STEP2 (진수) >0 인 범위 구하기

진수는 양수이어야 하므로

$$x^2 - 4ax + 20a > 0$$

모든 실수 x 에 대하여 위 식이 성립하려면 이차방정식

$$x^2 - 4ax + 20a = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 할 때}$$

$$\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 20a = 4a(a-5) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

STEP3 a 의 값의 범위 구하기

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$2 < a < 3 \text{ 또는 } 3 < a < 5$$

따라서 정수 a 의 값은 4이다.

02-4 ㉡4

해결전략 | 두 식에 대하여 밑은 10이 아닌 양수, 진수는 양수 일 x 의 값의 범위를 각각 구한다.

STEP1 $\log_3(6-x)$ 가 정의되기 위한 조건 구하기

$\log_3(6-x)$ 가 정의되기 위한 조건은 진수가 양수이어야 하므로

$$6-x > 0$$

$$\therefore x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

STEP2 $\log_x(-2x+14)$ 가 정의되기 위한 조건 구하기

$\log_x(-2x+14)$ 가 정의되기 위한 조건은 밑이 1이 아닌 양수이고, 진수가 양수이어야 하므로

$$x > 0, x \neq 1 \text{이고 } -2x+14 > 0 \text{에서 } x < 7$$

$$\therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

STEP3 공통 범위를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 6$$

따라서 정수 x 의 개수는 2, 3, 4, 5의 4이다.

02-5 ㉡4

해결전략 | 진수인 이차식이 모든 실수 x 에 대하여 양수일 a 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 $\log_{10}(ax^2-ax+1)$ 이 정의되기 위한 조건 이용하기
모든 실수 x 에 대하여 $\log_{10}(ax^2-ax+1)$ 의 값이 정의 되기 위해서는 진수가 양수이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2-ax+1 > 0$ 이어야 한다.

STEP2 $a=0$ 일 때와 $a \neq 0$ 일 때로 나누어 a 의 값의 범위 구하기

(i) $a=0$ 일 때

$1 > 0$ 이므로 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

$a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2-ax+1=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 4a = a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

(i), (ii)에 의하여 $0 \leq a < 4$

STEP3 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=0, n=4$ 이므로 $m+n=4$

02-6 ㉡5

해결전략 | 밑은 10이 아닌 양수이고, 진수인 이차식이 모든 실수 x 에 대하여 양수일 a 의 값의 공통 범위를 구한다.

STEP1 (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 인 범위 구하기

밑은 1이 아닌 양수이어야 하므로

$$(a-2)^2 > 0, (a-2)^2 \neq 1$$

$$\text{즉, } a \neq 1, a \neq 2, a \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

STEP2 (진수) >0 인 범위 확인하기

진수는 양수이어야 하므로

모든 실수 x 에 대하여 $ax^2+ax+2 > 0$ 이어야 한다.

STEP3 $a=0$ 일 때와 $a \neq 0$ 일 때로 나누어 a 의 값의 범위 구하기

(i) $a=0$ 일 때

$2 > 0$ 이므로 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

$a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2+ax+2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 8a = a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

(i), (ii)에 의하여 $0 \leq a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$

STEP4 공통 범위를 구하여 정수 a 의 개수 구하기

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 3 \text{ 또는 } 3 < a < 8$$

따라서 정수 a 의 개수는 0, 4, 5, 6, 7의 5이다.

필수유형 03

49쪽

03-1 ㉡ (1) 0 (2) $3\log_3 5$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} (1) & 4\log_5 \sqrt[4]{3} - \frac{1}{2}\log_5 75 + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{3} \\ &= \log_5 (\sqrt[4]{3})^4 - \log_5 \sqrt{75} + \log_5 \sqrt{\frac{25}{3}} \\ &= \log_5 3 - \log_5 5\sqrt{3} + \log_5 \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ &= \log_5 \left(3 \times \frac{1}{5\sqrt{3}} \times \frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \log_5 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \log_3(6-\sqrt{11}) + \log_3(6+\sqrt{11}) - \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{25} \\
= \log_3(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11}) - \log_3 \sqrt{\frac{1}{25}} \\
= \log_3 25 - \log_3 \frac{1}{5} \\
= \log_3 5^2 - \log_3 5^{-1} \\
= 2\log_3 5 + \log_3 5 = 3\log_3 5
\end{aligned}$$

03-2 ㉔ -2

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
\log_3\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1-\frac{1}{3}\right) + \log_3\left(1-\frac{1}{4}\right) \\
+ \cdots + \log_3\left(1-\frac{1}{9}\right) \\
= \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{8}{9} \\
= \log_3\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9}\right) \\
= \log_3 \frac{1}{9} \\
= \log_3 3^{-2} \\
= -2
\end{aligned}$$

03-3 ㉔ 45

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \log_2 4 + \frac{2}{3} \log_2 8 + \frac{3}{4} \log_2 16 + \cdots + \frac{9}{10} \log_2 1024 \\
= \frac{1}{2} \log_2 2^2 + \frac{2}{3} \log_2 2^3 + \frac{3}{4} \log_2 2^4 + \cdots + \frac{9}{10} \log_2 2^{10} \\
= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{3}{4} \times 4 + \cdots + \frac{9}{10} \times 10 \\
= 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 \\
= 45
\end{aligned}$$

03-4 ㉔ 23

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 각각의 식을 간단히 하여 a, b 의 값을 구한다.

STEP1 a 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\log_4(2 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4) &= \log_4 2^{1+2+3+4} \\
&= \log_4 2^{10} = \log_4 4^5 = 5
\end{aligned}$$

$$\therefore a=5$$

STEP2 b 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\log_2 2^2 + \log_3 3^2 + \cdots + \log_{10} 10^2 \\
= \underbrace{2+2+\cdots+2}_{9\text{개}} = 2 \times 9 = 18
\end{aligned}$$

$$\therefore b=18$$

STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $a=5, b=18$ 이므로 $a+b=23$

03-5 ㉔ 512

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

STEP1 주어진 식 정리하기

$$\begin{aligned}
\log_2 A &= a \text{라고 하면 } A=2^a \text{이므로} \\
\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \cdots + \log_2 A \\
= \log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + \cdots + \log_2 2^a \\
= \log_2 (1 \times 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^a) \\
= \log_2 2^{0+1+2+3+\cdots+a} \\
= 0+1+2+3+\cdots+a=45
\end{aligned}$$

STEP2 A 의 값 구하기

1부터 9까지의 자연수의 합이 45이므로 $a=9$

$$\therefore A=2^a=2^9=512$$

03-6 ㉔ 56

해결전략 | 로그의 정의와 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

STEP1 주어진 두 식을 x, y 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}
\log_2(x+2y) &= 3 \text{에서} \\
x+2y &= 2^3=8 \quad \cdots \cdots \text{㉔}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_2 x + \log_2 y &= 1 \text{에서} \\
\log_2 xy &= 1 \text{이므로 } xy=2 \quad \cdots \cdots \text{㉔}
\end{aligned}$$

STEP2 x^2+4y^2 의 값 구하기

㉔, ㉔에 의하여

$$x^2+4y^2=(x+2y)^2-4xy=8^2-4 \times 2=56$$

필수유형 04

51쪽

04-1 ㉔ 4

해결전략 | $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 을 통분하여 주어진 식의 값을 대입한다.

$$ab=\log_3 5, b-a=\log_2 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{b-a}{ab} = \frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{\frac{1}{\log_5 2}}{\frac{1}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} \\
&= \log_2 3
\end{aligned}$$

04-2 ㉔ (1) -1 (2) 0

해결전략 | 로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 식의 값을 구한다.

$$(1) \log_2 (\log_3 2 \times \log_4 3)$$

$$= \log_2 \left(\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3}{2 \log_{10} 2} \right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$(2) (\log_{12} 7)(\log_5 \sqrt{6} + \log_5 \sqrt{24}) - \frac{1}{\log_7 5}$$

$$= \log_{12} 7 \times \log_5 \sqrt{144} - \log_5 7$$

$$= \log_{12} 7 \times \log_5 12 - \log_5 7$$

$$= \log_{12} 7 \times \frac{1}{\log_{12} 5} - \log_5 7$$

$$= \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 5} - \log_5 7$$

$$= \log_5 7 - \log_5 7 = 0$$

04-3 ㉮ 6

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 a 의 값을 구하여 대입한다.

STEP 1 a 의 값 구하기

$$a = \log_2 40 - \frac{1}{\log_5 2}$$

$$= \log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 8 = 3$$

STEP 2 식의 값 구하기

따라서 $a=3$ 을 대입하여 정리하면

$$(\log_2 a + \log_4 a^2) \times \log_a 8$$

$$= (\log_2 3 + \log_4 3^2) \times \log_3 8$$

$$= \left(\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 4} \right) \times \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3}$$

$$= \left(\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + \frac{2 \log_{10} 3}{2 \log_{10} 2} \right) \times \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3}$$

$$= \frac{2 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = 6$$

04-4 ㉮ 4log₃ 2

해결전략 | 로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여

$a+b$ 의 값을 구한다.

STEP 1 a 의 값 구하기

$$\frac{\log_5 2}{a} = \log_5 3 \text{에서 } a = \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = \log_3 2$$

STEP 2 b 의 값 구하기

$$\frac{\log_5 8}{b} = \log_5 3 \text{에서 } b = \frac{\log_5 8}{\log_5 3} = \log_3 8$$

STEP 3 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $a = \log_3 2$, $b = \log_3 8$ 이므로

$$a+b = \log_3 2 + \log_3 8$$

$$= \log_3 (2 \times 8)$$

$$= \log_3 2^4 = 4 \log_3 2$$

04-5 ㉮ 5

해결전략 | 로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 abc 의 값을 구한다.

STEP 1 a, b, c 의 값 구하기

$$\frac{\log_2 5}{a} = 2 \text{에서 } a = \frac{1}{2} \log_2 5$$

$$\frac{\log_5 7}{b} = 2 \text{에서 } b = \frac{1}{2} \log_5 7$$

$$\frac{\log_7 16}{c} = 2 \text{에서 } c = \frac{1}{2} \log_7 16$$

STEP 2 abc 의 값 구하기

$$abc = \frac{1}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2} \log_5 7 \times \frac{1}{2} \log_7 16$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \log_2 5 \times \log_5 7 \times \log_7 16$$

$$= \frac{1}{8} \log_2 16 = \frac{1}{8} \log_2 2^4 = \frac{1}{2}$$

STEP 3 $(5^{ab})^{2c}$ 의 값 구하기

$$\therefore (5^{ab})^{2c} = (5^2)^{abc} = 25^{abc} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

04-6 ㉮ $\frac{1}{9}$

해결전략 | 로그의 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

STEP 1 주어진 식의 좌변 간단히 하기

$$\log_a (\log_2 3) + \log_a (\log_3 4) + \dots + \log_a (\log_7 8)$$

$$= \log_a (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \dots \times \log_7 8)$$

$$= \log_a \left(\frac{\log_2 3}{\log_2 2} \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \dots \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \right)$$

$$= \log_a \left(\frac{\log_2 8}{\log_2 2} \right)$$

$$= \log_a 3 = -\frac{1}{2}$$

STEP 2 a 의 값 구하기

로그의 정의에 의하여 $a^{-\frac{1}{2}} = 3$

$$\therefore a = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

필수유형 05

53쪽

05-1 ㉮ (1) $\frac{1}{4}$ (2) 8 (3) $\frac{1}{5}$

해결전략 | 로그의 여러 가지 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 (1) & \left(\log_2 5 + \log_4 \frac{1}{5}\right) \left(\log_5 2 + \log_{25} \frac{1}{2}\right) \\
 &= (\log_2 5 + \log_{2^2} 5^{-1}) (\log_5 2 + \log_{5^2} 2^{-1}) \\
 &= \left(\log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 5\right) \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2\right) \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \log_2 9 \times \log_5 4 \times (\log_3 5 + \log_9 25) \\
 &= \log_2 3^2 \times \log_5 2^2 \times (\log_3 5 + \log_{3^2} 5^2) \\
 &= 2 \log_2 3 \times 2 \log_5 2 \times 2 \log_3 5 \\
 &= 2^3 \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & 2^{3 \log_2 5 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 4 - 4 \log_5 10} \text{의 지수를 간단히 하면} \\
 & 3 \log_2 5 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 4 - 4 \log_5 10 \\
 &= 3 \log_2 5 - 2 \log_{2^{-1}} 2^2 - 4 \log_5 10 \\
 &= 3 \log_2 5 + 4 \log_2 2 - 4 (\log_2 2 + \log_2 5) \\
 &= 3 \log_2 5 + 4 - 4 - 4 \log_2 5 \\
 &= -\log_2 5 \\
 \therefore & 2^{3 \log_2 5 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 4 - 4 \log_5 10} = 2^{-\log_2 5} = 2^{\log_2 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

05-2 ㉮ 3√10

해결전략 | 로그의 여러 가지 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 a 의 값을 구한 다음 대입한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{\log_3 25} + \log_{25} 10 - \frac{\log_{\sqrt{7}} 3}{\log_{\sqrt{7}} 5} \\
 &= 4 \log_{25} 3 + \log_{25} 10 - \log_5 3 \\
 &= 2 \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 10 - \log_5 3 \\
 &= \log_5 3 + \log_5 \sqrt{10} \\
 &= \log_5 3\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

STEP2 5^a 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
 & \text{따라서 } a = \log_5 3\sqrt{10} \text{이므로} \\
 & 5^a = 5^{\log_5 3\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

05-3 ㉮ 16

해결전략 | $\log_a b \times \log_b a = 1$ 임을 이용하여 ab 의 값을 구한다.

STEP1 $\log_a b$, $\log_b a$ 의 값을 a , b 로 나타내기

$$\begin{aligned}
 & \frac{\log_a b}{2a} = \frac{3}{4} \text{에서 } \log_a b = \frac{3}{2}a \\
 & \frac{18 \log_b a}{b} = \frac{3}{4} \text{에서 } \log_b a = \frac{b}{24}
 \end{aligned}$$

STEP2 ab 의 값 구하기

$$\log_a b \times \log_b a = \log_a b \times \frac{1}{\log_a b} = 1 \text{이므로}$$

$$\log_a b \times \log_b a = \frac{3}{2}a \times \frac{b}{24} = 1, \frac{ab}{16} = 1$$

$$\therefore ab = 16$$

05-4 ㉮ 25

해결전략 | 밑의 변환 공식을 이용하여 a , b 를 밑이 2인 로그로 나타낸 후 대입한다.

STEP1 a , b 의 값 구하기

$$8^a = 9 \text{에서 } a = \log_8 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 8} = \frac{2 \log_2 3}{3}$$

$$b = \log_{27} 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 27} = \frac{3 \log_2 5}{3 \log_2 3} = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

STEP2 ab 의 값 구하기

$$ab = \frac{2 \log_2 3}{3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2 \log_2 5}{3} = \frac{2}{3} \log_2 5$$

STEP3 8^{ab} 의 값 구하기

$$\therefore 8^{ab} = 8^{\frac{2}{3} \log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25$$

05-5 ㉮ $b < c < a$

해결전략 | 로그의 여러 가지 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 간단히 한 다음 대입한다.

STEP1 밑을 2로 하여 a , b , c 간단히 하기

$$a = \log_{\frac{1}{4}} 5 = \log_{2^{-2}} 5 = -\frac{1}{2} \log_2 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b = 2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5} = \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{2^{-1}} 5 = -\log_2 5$$

또, $2^{ac} = 5$ 에서 $ac = \log_2 5$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2} \log_2 5\right) \times c = \log_2 5 \quad \therefore c = -2$$

STEP2 a , b , c 의 크기 비교하기

한편, $\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$, 즉 $2 < \log_2 5 < 3$ 이므로

$$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{2} \log_2 5 < -1, -3 < -\log_2 5 < -2$$

$$\text{즉, } -\log_2 5 < -2 < -\frac{1}{2} \log_2 5 \text{이므로}$$

$$b < c < a$$

05-6 ㉮ 99

해결전략 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 $f(n)$ 을 간단히 한 다음 식의 값을 구한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

$$f(n) = \frac{1}{\log_{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3} 3^2} = \log_3 \frac{n+3}{n+2}$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}
&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(3^{100}-3) \\
&= \log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{6}{5} + \cdots + \log_3 \frac{3^{100}}{3^{100}-1} \\
&= \log_3 \left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \cdots \times \frac{3^{100}}{3^{100}-1} \right) \\
&= \log_3 \frac{3^{100}}{3} = \log_3 3^{99} = 99
\end{aligned}$$

필수유형 06

55쪽

06-1 답 $2a-b-1$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 $\log_5 \frac{4}{15}$ 를 $\log_5 2, \log_5 3$ 으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\log_5 \frac{4}{15} &= \log_5 4 - \log_5 15 \\
&= \log_5 2^2 - (\log_5 3 + \log_5 5) \\
&= 2\log_5 2 - \log_5 3 - 1 \quad \leftarrow \log_5 2 = a, \log_5 3 = b \\
&= 2a - b - 1
\end{aligned}$$

06-2 답 $\frac{5a-b}{3}$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 $\log_{10} 45$ 를 $\log_{10} 3, \log_{10} 5$ 로 나타낸다.

STEP1 a, b 를 $\log_{10} 3, \log_{10} 5$ 의 합 또는 차로 나타내기
 $a = \log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5$

$$b = \log_{10} \frac{25}{3} = \log_{10} 25 - \log_{10} 3 = 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3$$

STEP2 $\log_{10} 3, \log_{10} 5$ 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내기

$$a + b = 3\log_{10} 5 \text{ 이므로 } \log_{10} 5 = \frac{a+b}{3}$$

$$2a - b = 3\log_{10} 3 \text{ 이므로 } \log_{10} 3 = \frac{2a-b}{3}$$

STEP3 $\log_{10} 45$ 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}
\therefore \log_{10} 45 &= \log_{10} (3^2 \times 5) = 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 \\
&= \frac{4a-2b}{3} + \frac{a+b}{3} = \frac{5a-b}{3}
\end{aligned}$$

06-3 답 $\frac{3a+2b}{3}$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 $\log_3 20$ 를 $\log_3 2, \log_3 5$ 로 나타낸다.

STEP1 $\log_3 2, \log_3 5$ 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내기

$$3^a = 5 \text{ 에서 } a = \log_3 5$$

$$3^b = 8 \text{ 에서 } b = \log_3 8 = \log_3 2^3 = 3\log_3 2$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{b}{3}$$

STEP2 $\log_3 20$ 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}
\therefore \log_3 20 &= \log_3 (2^2 \times 5) = 2\log_3 2 + \log_3 5 \\
&= \frac{2b}{3} + a = \frac{3a+2b}{3}
\end{aligned}$$

06-4 답 $\frac{2}{a-1}$

해결전략 | $\log_2 3$ 을 a 로 나타낸 후 $\log_6 4$ 를 a 로 나타낸다.

STEP1 $\log_2 3$ 을 a 를 사용한 식으로 나타내기

$$\log_2 12 = \log_2 (2^2 \times 3) = \log_2 2^2 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3 = a$$

$$\log_2 3 = a - 2$$

STEP2 $\log_6 4$ 를 a 를 사용한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}
\therefore \log_6 4 &= \frac{\log_2 4}{\log_2 6} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 (2 \times 3)} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2 + \log_2 3} \\
&= \frac{2}{1 + (a-2)} = \frac{2}{a-1}
\end{aligned}$$

06-5 답 $1-m$

해결전략 | $3\sqrt{2}-3 = \frac{(3\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+3)}{3\sqrt{2}+3}$ 임을 이용하여

$\log_9 (3\sqrt{2}-3)$ 을 m 를 사용한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\log_9 (3\sqrt{2}-3) &= \log_9 \frac{(3\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+3)}{3\sqrt{2}+3} \\
&= \log_9 \frac{(3\sqrt{2})^2 - 3^2}{3\sqrt{2}+3} \\
&= \log_9 \frac{9}{3\sqrt{2}+3} \\
&= \log_9 9 - \log_9 (3\sqrt{2}+3) \\
&= 1 - m \quad \leftarrow \log_9 (3\sqrt{2}+3) = m
\end{aligned}$$

06-6 답 $\frac{a+2b}{2a+b}$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 $f(\log_3 6)$ 의 값을

$\log_{10} 2, \log_{10} 3$ 으로 나타낸다.

STEP1 $f(\log_3 6)$ 의 값 구하기

$$f(\log_3 6) = \frac{\log_3 6 + 1}{2\log_3 6 - 1} \text{ 에서}$$

$$\log_3 6 + 1 = \log_3 6 + \log_3 3 = \log_3 18$$

$$2\log_3 6 - 1 = \log_3 6^2 - \log_3 3 = \log_3 12$$

$$\text{이므로 } f(\log_3 6) = \frac{\log_3 18}{\log_3 12} \quad \leftarrow \log_3 \frac{6^2}{3} = \log_3 12$$

STEP2 $f(\log_3 6)$ 의 값을 a, b 로 나타내기

$$\begin{aligned}\therefore f(\log_3 6) &= \frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \frac{\frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 3}}{\frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 3}} = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 12} \\ &= \frac{\log_{10} (2 \times 3^2)}{\log_{10} (2^2 \times 3)} = \frac{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3} \\ &= \frac{a+2b}{2a+b}\end{aligned}$$

●→ 다른 풀이

STEP1 $\log_3 6$ 을 a, b 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned}\log_3 6 &= \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} (2 \times 3)}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 3} = \frac{a+b}{b}\end{aligned}$$

STEP2 $f(\log_3 6)$ 의 값을 a, b 로 나타내기

$$\begin{aligned}\therefore f(\log_3 6) &= f\left(\frac{a+b}{b}\right) = \frac{\frac{a+b}{b} + 1}{2 \times \frac{a+b}{b} - 1} \\ &= \frac{\frac{a+2b}{b}}{\frac{2a+b}{b}} = \frac{a+2b}{2a+b}\end{aligned}$$

필수유형 07

57쪽

07-1 ㉔ $\frac{2}{3}$

해결전략 | 주어진 조건에서 $\log_a b$ 의 값을 구하여 대입한다.

STEP1 $\log_a b$ 의 값 구하기

$a^3 = b^4$ 에서 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^3 = \log_a b^4$$

$$3 = 4\log_a b$$

$$\therefore \log_a b = \frac{3}{4}$$

STEP2 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{8}{9}\log_a b = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

07-2 ㉔ $\frac{3}{2}$

해결전략 | 주어진 조건에서 a, c 사이의 관계식을 구하여 대입한다.

STEP1 a, c 사이의 관계 알기

$$\log_a b : \log_c b = 2 : 1 \text{ 이므로 } \log_a b = 2\log_c b$$

밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{\log_b a} = \frac{2}{\log_b c}, 2\log_b a = \log_b c$$

$$\therefore c = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 대입하여 식의 값 구하기

㉔을 $\log_a c - \log_c a$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\log_a c - \log_c a &= \log_a a^2 - \log_{a^2} a \\ &= 2\log_a a - \frac{1}{2}\log_a a \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

07-3 ㉔ 0

해결전략 | x, y, z 를 밑이 3인 로그로 나타내어 대입한다.

STEP1 x, y, z 를 로그를 이용하여 나타내기

$3^x = 2^y = 6^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$3^x = k, 2^y = k, 6^z = k$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = \log_3 k, y = \log_2 k, z = \log_6 k \quad \begin{matrix} \swarrow a^x = k \\ \Leftrightarrow x = \log_a k \end{matrix}$$

STEP2 x, y, z 를 대입하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{\log_3 k} + \frac{1}{\log_2 k} - \frac{1}{\log_6 k} \\ &= \log_k 3 + \log_k 2 - \log_k 6 \\ &= \log_k \frac{3 \times 2}{6} = \log_k 1 = 0\end{aligned}$$

●→ 다른 풀이

STEP1 3, 2, 6을 k' 꼴로 나타내기

$3^x = 2^y = 6^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$3^x = k \text{에서 } 3 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^y = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$6^z = k \text{에서 } 6 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

STEP2 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \div \textcircled{3} \text{을 하면 } 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

07-4 ㉔ 28

해결전략 | a, b, c 를 한 문자에 대하여 나타낸 후 대입한다.

STEP1 a, b, c 를 k 에 대하여 나타내기

$\log_{27} a = \log_{\sqrt{3}} b = \log_{81} c = k$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$a = 27^k = 3^{3k}$$

$$b = (\sqrt{3})^k = \sqrt{3^k} = 3^{\frac{1}{2}k}$$

$$c = 81^k = 3^{4k}$$

STEP2 a, b, c 를 대입하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} &= \log_{\sqrt{b}} ac \\ &= 2\log_b ac = 2\log_{3^{\frac{1}{2}k}} (3^{3k} \times 3^{4k}) \\ &= 2\log_{3^{\frac{1}{2}k}} 3^{7k} \\ &= 2 \times \frac{2}{k} \times 7k \\ &= 28\end{aligned}$$

07-5 ㉮ 75

해결전략 | a, b, c 를 로그로 나타내어 대입한다.

STEP1 조건 (가)에서 a, b, c 를 로그를 이용하여 나타내기

조건 (가)에서 $3^a = 5^b = k^c = d$ ($d > 1$)로 놓으면

$$a = \log_3 d, b = \log_5 d, c = \log_k d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 조건 (나)를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식 구하기

조건 (나)에서

$$\log c = \log(2ab) - \log(2a+b) = \log \frac{2ab}{2a+b}$$

$$\text{이므로 } c = \frac{2ab}{2a+b}$$

$$\therefore c(2a+b) = 2ab \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 k^2 의 값 구하기

㉮을 ㉮에 대입하면

$$\begin{aligned}\log_k d(2\log_3 d + \log_5 d) &= 2\log_3 d \times \log_5 d \\ \frac{1}{\log_d k} \left(\frac{2}{\log_d 3} + \frac{1}{\log_d 5} \right) &= \frac{2}{\log_d 3} \times \frac{1}{\log_d 5} \\ \frac{1}{\log_d k} \times \frac{2}{\log_d 3} + \frac{1}{\log_d k} \times \frac{1}{\log_d 5} &= \frac{2}{\log_d 3} \times \frac{1}{\log_d 5} \\ &= \frac{2}{\log_d 3} \times \frac{1}{\log_d 5}\end{aligned}$$

양변에 $\log_d k \times \log_d 3 \times \log_d 5$ 를 곱하면

$$2\log_d 5 + \log_d 3 = 2\log_d k \text{ 이므로}$$

$$\log_d (5^2 \times 3) = \log_d k^2$$

$$\therefore k^2 = 75$$

● → 다른 풀이

STEP1 조건 (나)를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식 구하기

조건 (나)에서

$$\log c = \log(2ab) - \log(2a+b) = \log \frac{2ab}{2a+b}$$

이므로

$$c = \frac{2ab}{2a+b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{2a+b}{2ab}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \text{ 이므로}$$

$$1 = \frac{c}{b} + \frac{c}{2a}$$

STEP2 STEP1과 조건 (가)를 이용하여 k^2 의 값 구하기

$$\text{조건 (가)에 의하여 } 3 = k^{\frac{c}{a}}, 5 = k^{\frac{c}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$k^{\frac{c}{b} + \frac{c}{2a}} = k^{\frac{c}{b}} \times k^{\frac{c}{2a}} = k^{\frac{c}{b}} \times (k^{\frac{c}{a}})^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{c}{b}} \times \sqrt{k^{\frac{c}{a}}}$$

$$\text{이므로 } k^1 = 5\sqrt{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore k^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

07-6 ㉮ $\frac{34}{25}$

해결전략 | 구하는 식을 밑의 변환 공식을 이용하여 밑이 a, b, c 인 로그로 나타낸 후 주어진 식의 값을 대입한다.

STEP1 $\log_a b = \alpha, \log_b c = \beta, \log_c a = \gamma$ 로 놓고 $\alpha\beta\gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ 의 값 구하기

$\log_a b = \alpha, \log_b c = \beta, \log_c a = \gamma$ 라고 하면

$$\alpha\beta\gamma = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$$

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \alpha + \beta + \gamma = \frac{7}{2}$$

$$\log_{b^2} a + \log_{c^2} b + \log_{a^2} c$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{이므로 } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 7$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\therefore \log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c$$

$$= \frac{1}{\log_a ab} + \frac{1}{\log_b bc} + \frac{1}{\log_c ca}$$

$$= \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma}$$

$$= \frac{(1+\alpha)(1+\beta) + (1+\beta)(1+\gamma) + (1+\gamma)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

$$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3}{1 + (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{7+7+3}{1+\frac{7}{2}+7+1} = \frac{34}{25}$$

필수유형 08

59쪽

08-1 ㉮ -1

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한 다음 식에 대입한다.

STEP1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 18, \alpha\beta = 6$$

STEP 2 식에 대입하기

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 (\alpha + \beta) - 2\log_2 \alpha\beta &= \log_2 18 - 2\log_2 6 \\ &= \log_2 18 - \log_2 6^2 \\ &= \log_2 \frac{18}{36} = \log_2 \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

08-2 ㉠ $-\frac{1}{2}$

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한 다음 변형한 식에 대입한다.

STEP 1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

STEP 2 식에 대입하기

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha - \frac{3}{\beta} \right) + \log_{\alpha+\beta} \left(\beta - \frac{3}{\alpha} \right) \\ &= \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha - \frac{3}{\beta} \right) \left(\beta - \frac{3}{\alpha} \right) \\ &= \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha\beta - 3 - 3 + \frac{9}{\alpha\beta} \right) \\ &= \log_4 \left(2 - 3 - 3 + \frac{9}{2} \right) \\ &= \log_4 \frac{1}{2} = \log_{2^2} 2^{-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

08-3 ㉠ 1000

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 에 대한 식을 구한다.

STEP 1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_a 10 + \log_b 10 = 3, \log_a 10 \times \log_b 10 = 1$$

STEP 2 $\log_{10} a + \log_{10} b$ 의 값 구하기

$\log_a 10 \times \log_b 10 = 1$ 에서 밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{\log_{10} a} \times \frac{1}{\log_{10} b} = 1, \log_{10} a \times \log_{10} b = 1$$

$\log_a 10 + \log_b 10 = 3$ 에서 밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{\log_{10} a} + \frac{1}{\log_{10} b} = 3, \frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{\log_{10} a \times \log_{10} b} = 3$$

이때 $\log_{10} a \times \log_{10} b = 1$ 이므로

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 3$$

STEP 3 ab 의 값 구하기

$$\log_{10} ab = 3$$

$$\therefore ab = 10^3 = 1000$$

08-4 ㉠ 2

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한 다음 a 의 값을 구한다.

STEP 1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 5$$

STEP 2 a 의 값 구하기

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 20 = 5 \text{에서}$$

$$a = \alpha - \beta = \sqrt{5} \quad (\because \alpha > \beta)$$

STEP 3 식에 대입하기

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \alpha + \log_a \beta &= \log_a \alpha\beta = \log_{\sqrt{5}} 5 \\ &= \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5 = 2 \end{aligned}$$

08-5 ㉠ -5

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 사이의 관계를 파악하고 대입하여 값을 구한다.

STEP 1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_b 9 = -p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_3 a \times \log_b 9 = 4$$

$$\begin{aligned} \log_3 a \times \log_b 9 &= \frac{\log_{10} a}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} b} \\ &= \frac{\log_{10} a}{\log_{10} 3} \times \frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} b} \\ &= \frac{2\log_{10} a}{\log_{10} b} = 2\log_b a = 4 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \log_b a = 2 \quad \therefore a = b^2$$

STEP 2 대입하여 a, b 의 값 구하기

$a = b^2$ 을 $a + b = 90$ 에 대입하면

$$b^2 + b - 90 = 0, (b + 10)(b - 9) = 0$$

a, b 는 진수와 밑의 조건에 의하여 양수이므로

$$a = 81, b = 9$$

STEP 3 p 의 값 구하기

$$\textcircled{1} \text{에서 } \log_3 81 + \log_9 9 = -p$$

$$4 + 1 = -p$$

$$\therefore p = -5$$

08-6 ㉠ 24

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계를 파악하고 대입하여 값을 구한다.

STEP 1 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q$$

STEP 2 p, q 에 대한 식 구하기

$$\log_2(\alpha + \beta) = \log_2 \alpha + \log_2 \beta - 1 \text{에서}$$

$$\log_2(\alpha + \beta) = \log_2 \frac{\alpha\beta}{2} \text{이므로}$$

→ 진수의 조건에 의하여
 $\alpha + \beta > 0, \alpha > 0, \beta > 0$
 $\therefore p > 0, q > 0$

$$\alpha + \beta = \frac{\alpha\beta}{2}$$

$$\text{이때 } \alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \text{이므로}$$

$$p = \frac{q}{2} \quad \therefore q = 2p$$

STEP 3 이차방정식의 판별식을 이용하여 $p+q$ 의 최솟값 구하기

한편, 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-p)^2 - 4q = p^2 - 8p = p(p - 8) \geq 0$$

$$\therefore p \leq 0 \text{ 또는 } p \geq 8$$

그런데 진수는 양수이어야 하므로 $p \geq 8$

따라서 $p + q = 3p \geq 24$ 이므로 최솟값은 24이다.

🔗 풀법의 비법

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라고 할 때

- ① $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ② $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
- ③ $D < 0$ 이면 허근을 갖는다.

필수유형 09

61 쪽

09-1 $\frac{21}{4}$

해결전략 $\log_2 5$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한 다음 대입한다.

STEP 1 x, y 의 값 구하기

$$2^2 < 5 < 2^3 \text{이므로 } \log_2 2^2 < \log_2 5 < \log_2 2^3$$

$$\therefore 2 < \log_2 5 < 3$$

$\log_2 5$ 의 정수 부분은 2이므로 $x = 2$

소수 부분은 $\log_2 5 - 2 = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 \frac{5}{4}$ 이므로

$$y = \log_2 \frac{5}{4}$$

STEP 2 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore 2^x + 2^y = 2^2 + 2^{\log_2 \frac{5}{4}} = 4 + \frac{5}{4} = \frac{21}{4}$$

09-2 $\frac{3}{2}$

해결전략 $\log_3 54$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한 다음 대입한다.

STEP 1 x 의 값 구하기

$$3^3 < 54 < 3^4 \text{이므로 } \log_3 27 < \log_3 54 < \log_3 81$$

$$\therefore 3 < \log_3 54 < 4$$

즉, $\log_3 54$ 의 정수 부분은 3이므로 소수 부분은

$$\log_3 54 - 3 = \log_3 54 - \log_3 27 = \log_3 \frac{54}{27} = \log_3 2$$

$$\therefore x = \log_3 2$$

STEP 2 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore 3^x - 3^{-x} = 3^{\log_3 2} - 3^{-\log_3 2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

09-3 $\frac{21}{2}$

해결전략 $\log_3 18$ 과 $\log_3 9$ 의 정수 부분과 소수 부분을 각각 구한 다음 대입한다.

STEP 1 a 의 값 구하기

$$3^2 < 18 < 3^3 \text{이므로 } \log_3 9 < \log_3 18 < \log_3 27$$

$$\therefore 2 < \log_3 18 < 3$$

즉, $\log_3 18$ 의 정수 부분은 2이므로 $a = 2$

STEP 2 b 의 값 구하기

$$\log_3 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3 \text{이고 } 2 < 3 < 2^2 \text{이므로}$$

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$$

$$\therefore 1 < \log_2 3 < 2$$

즉, $\log_2 3$ 의 정수 부분은 1이고

소수 부분은 $\log_2 3 - 1$ 이므로 $b = \log_2 3 - 1$

STEP 3 $3^a + 2^b$ 의 값 구하기

$$\therefore 3^a + 2^b = 3^2 + 2^{\log_2 3 - 1}$$

$$= 9 + 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = 9 + \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$$

09-4 $\frac{7}{2}$

해결전략 $\log_6 15$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한 다음 대입한다.

STEP 1 n, α 의 값 구하기

$$6 < 15 < 6^2 \text{이므로 } \log_6 6 < \log_6 15 < \log_6 36$$

$$\therefore 1 < \log_6 15 < 2$$

$\log_6 15$ 의 정수 부분은 1이므로 $n = 1$

$$\text{소수 부분은 } \log_6 15 - 1 = \log_6 15 - \log_6 6 = \log_6 \frac{15}{6}$$

이므로

$$a = \log_6 \frac{15}{6}$$

STEP 2 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore 6^n - 6^a = 6^1 - 6^{\log_6 \frac{15}{6}} = 6 - \frac{15}{6} = \frac{7}{2}$$

09-5 ㉘ 8

해결전략 | a, b 의 값을 구하여 주어진 지수식에 대입한 후 100의 배수가 될 조건을 생각한다.

STEP 1 a, b 를 로그를 이용하여 나타내기

$$2^6 < 65 < 2^7 \text{이므로 } 6 < \log_2 65 < 7$$

즉, $\log_2 65$ 의 정수 부분은 6이므로

$$a = \log_2 65 - 6 = \log_2 65 - \log_2 64 = \log_2 \frac{65}{64}$$

$$5^2 < 72 < 5^3 \text{이므로 } 2 < \log_5 72 < 3$$

즉, $\log_5 72$ 의 정수 부분은 2이므로

$$b = \log_5 72 - 2 = \log_5 72 - \log_5 25 = \log_5 \frac{72}{25}$$

STEP 2 a, b 의 값을 $2^{p+a} \times 5^{q+b}$ 에 대입하여 정리하기

$$\begin{aligned} \therefore 2^{p+a} \times 5^{q+b} &= 2^p \times 2^a \times 5^q \times 5^b \\ &= 2^p \times 2^{\log_2 \frac{65}{64}} \times 5^q \times 5^{\log_5 \frac{72}{25}} \\ &= 2^p \times \frac{5 \times 13}{2^6} \times 5^q \times \frac{2^3 \times 3^2}{5^2} \\ &= 13 \times 3^2 \times 2^{p-3} \times 5^{q-1} \end{aligned}$$

STEP 3 STEP 2의 식이 100의 배수가 될 조건을 파악하여

$p+q$ 의 최솟값 구하기

$100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 $2^{p-3} \times 5^{q-1}$ 의 값이 100의 배수가 되기 위해서는

$$p-3 \geq 2, q-1 \geq 2$$

$$\text{즉, } p \geq 5, q \geq 3$$

따라서 $p+q$ 의 최솟값은 8이다.

09-6 ㉘ 21

해결전략 | α, β 를 식으로 나타낸 다음 3^b 이 최솟값을 갖는 경우를 생각한다.

STEP 1 α, β 를 식으로 나타내기

$$\log_a b = \alpha + \beta \text{이고}$$

$$x^2 - px + 2\log_3 7 = 2 \text{에서}$$

$$x^2 - px + 2\log_3 7 - 2 = 0$$

이 이차방정식의 해가 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = p = \log_a b$$

$$\alpha\beta = 2\log_3 7 - 2 = 2(\log_3 7 - 1) = 2\log_3 \frac{7}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 3^p 이 최솟값을 갖기 위한 조건 알아보기

3^b 이 최솟값을 갖기 위해서는 p 가 최솟값을 가져야 하고, $p = \log_a b$ 이므로 $\log_a b$ 의 최솟값을 구하면 된다.

또, $\log_a b$ 가 최솟값을 갖기 위해서는 정수 부분이 가장 작아야 하고 $a < b$ 이므로 정수 부분은 1 이상의 자연수이다.

STEP 3 α 의 값에 따라 β 가 소수 부분을 만족시키는지 확인하기

$$(i) \alpha = 1 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \beta = 2\log_3 \frac{7}{3}$$

이때 $2\log_3 \frac{7}{3} = \log_3 \frac{49}{9} > 1$ 이므로 β 가 소수 부분이 라는 조건을 만족시키지 못한다.

$$(ii) \alpha = 2 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \beta = \log_3 \frac{7}{3} \text{ 이고 } 0 < \log_3 \frac{7}{3} < 1 \text{ 이}$$

므로 소수 부분의 조건을 만족시킨다.

STEP 4 최솟값 구하기

따라서 $\log_a b$ 의 최솟값은

$$2 + \log_3 \frac{7}{3} = \log_3 9 + \log_3 \frac{7}{3} = \log_3 21$$

이고 3^b 의 최솟값은 $3^{\log_3 21} = 21$

필수유형 10

63쪽

10-1 ㉘ -0.6628

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 구하는 상용로그의 진수를 6.04를 사용하여 나타낸다.

STEP 1 로그의 값 각각 구하기

$$\begin{aligned} \log 0.0604 &= \log \frac{6.04}{100} \\ &= \log 6.04 - \log 100 \\ &= 0.7810 - 2 = -1.219 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[5]{604} &= \frac{1}{5} \log(100 \times 6.04) \\ &= \frac{1}{5} (\log 100 + \log 6.04) \\ &= \frac{1}{5} (2 + 0.7810) = 0.5562 \end{aligned}$$

STEP 2 로그의 값의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \log 0.0604 + \log \sqrt[5]{604} &= -1.219 + 0.5562 \\ &= -0.6628 \end{aligned}$$

10-2 ㉘ -0.0485

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 구하는 상용로그의 진수를 2를 사용하여 나타낸다.

11-1 ㉡ 정수 부분: 9, 소수 부분: 0.35

해결전략 | $\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3}$ 의 값을 구하여 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

STEP1 $\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3} &= 2\log x + \frac{3}{4}\log x \\ &= \frac{11}{4}\log x \\ &= \frac{11}{4} \times 3.4 = 9.35\end{aligned}$$

STEP2 $\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3}$ 의 정수 부분과 소수 부분 구하기

$\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3} = 9 + 0.35$ 이므로 $\log x^2 + \log \sqrt[4]{x^3}$ 의 정수 부분은 9, 소수 부분은 0.35이다.

11-2 ㉡ -9

해결전략 | $\log x$ 의 값을 구하여 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

STEP1 $\log x$ 의 값 구하기

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x = -\frac{8}{3} \text{이므로 } \log x = -\frac{16}{3}$$

STEP2 $\log x$ 의 정수 부분과 소수 부분 구하기

$$\begin{aligned}\log x &= -\frac{16}{3} = -5 - \frac{1}{3} = (-5-1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -6 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $n = -6$, $\alpha = \frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{n}{\alpha} = -9$

11-3 ㉡ $\frac{4-4\alpha}{5}$

해결전략 | $\log A = 4 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)임을 이용하여

$\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 을 구한다.

STEP1 $\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 을 α 에 대한 식으로 나타내기

$\log A$ 의 정수 부분이 4, 소수 부분이 α 이므로
 $\log A = 4 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)

$$\begin{aligned}\therefore \log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}} &= \log A^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5}\log A \\ &= -\frac{4}{5}(4 + \alpha) = -\frac{16}{5} - \frac{4}{5}\alpha\end{aligned}$$

STEP2 $\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 의 정수 부분 구하기

이때 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$$-\frac{4}{5} < -\frac{4}{5}\alpha < 0, \quad -4 < -\frac{16}{5} - \frac{4}{5}\alpha < -\frac{16}{5}$$

즉, $\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 의 정수 부분은 -4 이다.

STEP3 $\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 의 소수 부분을 α 에 대한 식으로 나타내기

따라서 $\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}}$ 의 소수 부분은

$$\log \frac{1}{\sqrt[5]{A^4}} - (-4) = -\frac{16}{5} - \frac{4}{5}\alpha - (-4) = \frac{4-4\alpha}{5}$$

▶참고 $0 < \alpha < 1$ 이므로

$$0 < 4 - 4\alpha < 4 \quad \therefore 0 < \frac{4-4\alpha}{5} < \frac{4}{5}$$

11-4 ㉡ 900

해결전략 | $\log A$ 의 정수 부분이 n 이면

$n \leq \log A < n+1$ 로 나타낼 수 있다.

STEP1 A 의 값의 범위 구하기

$\log A$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log A < 3, \quad 10^2 \leq A < 10^3$$

즉, $100 \leq A < 1000$

STEP2 자연수 A 의 개수 구하기

따라서 A 가 될 수 있는 자연수는 100부터 999까지이므로 자연수 A 의 개수는 900이다.

▶참고 a 부터 b 까지의 자연수의 개수는 $b-a+1$ 이다. (단, $a < b$)

11-5 ㉡ 4962

해결전략 | $\log x$ 의 정수 부분의 규칙을 찾는다.

STEP1 x 의 값의 범위에 따라 $f(x)$ 의 값 구하기

$$1 \leq x < 10 \text{ 일 때, } f(x) = 0$$

$$10 \leq x < 100 \text{ 일 때, } f(x) = 1$$

$$100 \leq x < 1000 \text{ 일 때, } f(x) = 2$$

$$1000 \leq x \leq 2023 \text{ 일 때, } f(x) = 3$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2023) \\ &= 0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 900 + 3 \times 1024 \\ &= 4962\end{aligned}$$

11-6 ㉡ 68

해결전략 | $f(n)$ 을 α 에 대한 식으로 나타내고 2α 의 값의 범위를 구한 후 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 α 의 값의 범위 구하기

$f(n)$ 의 정수 부분이 1, 소수 부분이 α 이므로

$$\log n = 1 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

2α 의 정수 부분이 1이므로 $1 \leq 2\alpha < 2$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \alpha < 1$$

STEP2 $\log n$ 의 값의 범위 구하기

이때 $\frac{3}{2} \leq 1 + \alpha < 2$ 이므로

$$\frac{3}{2} \leq \log n < 2$$

STEP3 자연수 n 의 개수 구하기

$$10^{\frac{3}{2}} \leq n < 10^2, 10\sqrt{10} \leq n < 100$$

$3.1 < \sqrt{10} < 3.2$ 에서 $31 < 10\sqrt{10} < 32$ 이므로 자연수 n 은 32, 33, ..., 99이다.

따라서 자연수 n 의 개수는 68이다.

발전유형 12

67쪽

12-1 답 (1) 8자리 (2) 26자리

해결전략 $\log N$ 의 정수 부분이 n 이면 N 은 $(n+1)$ 자리의 수이다.

(1) STEP1 $\log 6^{10}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log 6^{10} &= 10 \log 6 = 10 \log (2 \times 3) \\ &= 10(\log 2 + \log 3) \\ &= 10(0.3010 + 0.4771) \\ &= 7.781 \end{aligned}$$

STEP2 몇 자리의 정수인지 구하기

따라서 $\log 6^{10}$ 의 정수 부분이 7이므로 6^{10} 은 8자리의 정수이다.

(2) STEP1 $\log 18^{20}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log 18^{20} &= 20 \log 18 = 20 \log (2 \times 3^2) \\ &= 20(\log 2 + 2 \log 3) \\ &= 20(0.3010 + 2 \times 0.4771) \\ &= 25.104 \end{aligned}$$

STEP2 몇 자리의 정수인지 구하기

따라서 $\log 18^{20}$ 의 정수 부분이 25이므로 18^{20} 은 26자리의 정수이다.

12-2 답 (1) 10째 자리 (2) 7째 자리

해결전략 $\log N$ 의 정수 부분이 $-n$ 이면 N 은 소수점 아래 n 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(1) STEP1 $\log \left(\frac{1}{4}\right)^{15}$ 의 값 구하기

$$\log \left(\frac{1}{4}\right)^{15} = -15 \log 4 = -15 \log 2^2 = -30 \log 2$$

$$= -30 \times \log 2 = -30 \times 0.3010$$

$$= -9.03 = -10 + 0.97$$

STEP2 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 자리 구하기

따라서 $\log \left(\frac{1}{4}\right)^{15}$ 의 정수 부분이 -10 이므로 $\left(\frac{1}{4}\right)^{15}$ 은 소수점 아래 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(2) STEP1 $\log \left(\frac{1}{5}\right)^9$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{5}\right)^9 &= -9 \log 5 = -9 \log \frac{10}{2} \\ &= -9 \times (1 - \log 2) \\ &= -9 \times (1 - 0.3010) \\ &= -6.291 = -7 + 0.709 \end{aligned}$$

STEP2 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 자리 구하기

따라서 $\log \left(\frac{1}{5}\right)^9$ 의 정수 부분이 -7 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^9$ 은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

12-3 답 (1) 3 (2) 1

해결전략 상용로그를 취한 값의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

(1) STEP1 $\log 6^{20}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log 6^{20} &= 20 \log 6 = 20(\log 2 + \log 3) \\ &= 20(0.3010 + 0.4771) \\ &= 15.562 \end{aligned}$$

STEP2 최고 자리의 숫자 구하기

이때 $\log 4 = 2 \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ 이므로

$$\begin{aligned} \log 3 &< 0.562 < \log 4 \\ 15 + \log 3 &< 15.562 < 15 + \log 4 \\ \log (3 \times 10^{15}) &< \log 6^{20} < \log (4 \times 10^{15}) \\ \therefore 3 \times 10^{15} &< 6^{20} < 4 \times 10^{15} \end{aligned}$$

따라서 6^{20} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

(2) STEP1 $\log 9^{20}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log 9^{20} &= 20 \log 9 = 20 \log 3^2 = 40 \log 3 \\ &= 40 \times 0.4771 = 19.084 \end{aligned}$$

STEP2 최고 자리의 숫자 구하기

이때 $\log 1 = 0 < 0.084 < \log 2 = 0.3010$ 이므로

$$\begin{aligned} \log 1 &< 0.084 < \log 2 \\ 19 + \log 1 &< 19.084 < 19 + \log 2 \\ \log (1 \times 10^{19}) &< \log 9^{20} < \log (2 \times 10^{19}) \\ \therefore 1 \times 10^{19} &< 9^{20} < 2 \times 10^{19} \end{aligned}$$

따라서 9^{20} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.

12-4 ㉮ 17자리

해결전략 $\log N$ 의 정수 부분이 n 이면 N 은 $(n+1)$ 자리의 수이다.

STEP1 $\log A^3B$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\log A^3B &= \log(2^{30} \times 5^{10}) \\ &= \log(2^{20} \times 10^{10}) \\ &= 20\log 2 + 10 \\ &= 20 \times 0.3010 + 10 \\ &= 16.02\end{aligned}$$

STEP2 몇 자리의 정수인지 구하기

따라서 $\log A^3B$ 의 정수 부분이 16이므로 A^3B 는 17자리의 정수이다.

12-5 ㉮ 68째 자리

해결전략 $\log N$ 의 정수 부분이 $-n$ 이면 N 은 소수점 아래 n 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

STEP1 $\log A^{20}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\log A &= -3.36 \text{이므로} \\ \log A^{20} &= 20\log A \\ &= 20 \times (-3.36) \\ &= -67.2 = -68 + 0.8\end{aligned}$$

STEP2 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 자리 구하기

따라서 $\log A^{20}$ 의 정수 부분이 -68 이므로 A^{20} 은 소수점 아래 68째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

12-6 ㉮ 195

해결전략 N 이 n 자리의 수이면 $\log N$ 의 정수 부분은 $n-1$ 이다.

STEP1 $\log 2^n$ 의 값의 범위를 이용하여 n 의 값의 범위 구하기

2^n 이 20자리의 수가 되어야 하므로 $\log 2^n$ 의 정수 부분은 19이어야 한다.

$$\text{즉, } 19 \leq \log 2^n < 20$$

$$19 \leq n \log 2 < 20$$

$$19 \leq 0.3n < 20$$

$$\therefore \frac{190}{3} \leq n < \frac{200}{3}$$

STEP2 자연수 n 의 값의 합 구하기

따라서 이를 만족시키는 자연수 n 은 64, 65, 66이므로 구하는 합은

$$64 + 65 + 66 = 195$$

발전유형 13

69쪽

13-1 ㉮ ㄹ

해결전략 $\log A$ 의 소수 부분은 0 이상 1 미만인 수이다.

STEP1 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분에 대한 식 세우기

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라고 하면

STEP2 각 보기의 소수 부분 구하기

$$\neg. \log 100A = \log 100 + \log A = (n+2) + \alpha$$

$$\neg. \log 0.1A = \log A - \log 10 = (n-1) + \alpha$$

$$\neg. 1 + \log A = 1 + (n + \alpha) = (1+n) + \alpha$$

$$\neg. 2\log A = 2n + 2\alpha$$

따라서 $\log A$ 와 소수 부분이 항상 같지는 않은 것은 ㄹ이다.

▶참고 ㄹ에서 $\alpha=0$ 이면 $\log A$ 와 소수 부분이 같지만 $0 < \alpha < 1$ 이면 $\log A$ 와 소수 부분이 같지 않다.

13-2 ㉮ 100

해결전략 $\log x$ 의 값의 범위를 구하고, 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $\log x$ 의 값의 범위 구하기

$$100 \leq x < 1000 \text{에서 } \log 100 \leq \log x < \log 1000$$

$$\therefore 2 \leq \log x < 3$$

STEP2 소수 부분이 같음을 이용하여 x 의 값 구하기

$\log x^4$ 의 소수 부분과 $\log x^3$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^4 - \log x^3 = 4\log x - 3\log 3 = \log x$$

이때 $\log x$ 는 정수이므로 $\log x = 2$

$$\therefore x = 100$$

13-3 ㉮ $\sqrt[4]{10^{15}}$

해결전략 $\log x$ 의 값의 범위를 구하고, 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $\log x$ 의 값의 범위 구하기

$$1000 < x < 10000 \text{에서 } \log 10^3 < \log x < \log 10^4$$

$$\therefore 3 < \log x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 소수 부분의 합이 1임을 이용하여 x 의 값 구하기

$$\log x + \log \sqrt[3]{x} = \log x + \frac{1}{3}\log x = \frac{4}{3}\log x$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } 4 < \frac{4}{3}\log x < \frac{16}{3}$$

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$\frac{4}{3}\log x$ 는 정수이다.

$$\text{즉, } \frac{4}{3}\log x = 5 \text{에서 } \log x = \frac{15}{4}$$

STEP3 x 의 값 구하기

$$\therefore x = 10^{\frac{15}{4}} = \sqrt[4]{10^{15}}$$

13-4 16

해결전략 | $\log x$ 의 값의 범위를 구하고, 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $\log x$ 의 값의 범위 구하기

조건 (가)에서 $\log x$ 의 정수 부분이 5이므로

$$5 \leq \log x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 소수 부분이 같음을 이용하여 $\log x$ 의 값 구하기

$$\log x^2 - \log \frac{1}{x} = 2\log x + \log x = 3\log x$$

①에 의하여 $15 \leq 3\log x < 18$

조건 (나)에서 $\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 같으므로 $3\log x$ 는 정수이다.

$$\text{즉, } 3\log x = 15, 16, 17 \text{에서 } \log x = 5, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}$$

STEP3 $\log A$ 의 값 구하기

$$\therefore x = 10^5, 10^{\frac{16}{3}}, 10^{\frac{17}{3}}$$

따라서 실수 x 의 곱 A 는

$$A = 10^5 \times 10^{\frac{16}{3}} \times 10^{\frac{17}{3}} = 10^{16}$$

$$\therefore \log A = \log 10^{16} = 16$$

13-5 1000

해결전략 | $\log x$ 의 값의 범위를 구하고, 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $\log x$ 의 값의 범위 구하기

조건 (가)의 $f(x)=1$ 에서

$$1 \leq \log x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log x$ 의 값 구하기

$$\log x + \log x^2 = \log x + 2\log x = 3\log x$$

①에 의하여 $3 \leq 3\log x < 6$

조건 (나)에서 $g(x)+g(x^2)=1$ 이므로 $3\log x$ 는 정수이다.

$$\text{즉, } 3\log x = 3, 4, 5 \text{에서 } \log x = 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$$

STEP3 x 의 값의 곱 구하기

그런데 $x=10$ 이면 $\log x=1$, $\log x^2=2$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\therefore x = 10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{5}{3}} = 10^3 = 1000$$

다른 풀이

$f(x)=1$ 이므로 $\log x$ 의 소수 부분을 α 라고 하면

$$\log x = 1 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\therefore \log x^2 = 2\log x = 2(1 + \alpha) = 2 + 2\alpha$$

(i) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때

$0 \leq 2\alpha < 1$ 에서 $\log x^2$ 의 소수 부분은 2α 이고

$$g(x) + g(x^2) = 1 \text{이므로}$$

$$\alpha + 2\alpha = 1, 3\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } \log x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{이므로 } x = 10^{\frac{4}{3}}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ 일 때

$1 \leq 2\alpha < 2$ 에서 $\log x^2$ 의 소수 부분은 $2\alpha - 1$ 이고

$$g(x) + g(x^2) = 1 \text{이므로}$$

$$\alpha + (2\alpha - 1) = 1, 3\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } \log x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{이므로 } x = 10^{\frac{5}{3}}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{5}{3}} = 10^3 = 1000$$

13-6 6

해결전략 | $\log a$ 와 $\log b$ 의 합이 정수임을 이용하여 순서쌍을 찾는다.

STEP1 $\log ab$ 의 값 파악하기

$$\log a = m + \alpha \quad (\text{단, } m \text{은 정수, } 0 < \alpha < 1)$$

$$\log b = n + \beta \quad (\text{단, } n \text{은 정수, } 0 < \beta < 1)$$

라고 하면

$$\log a + \log b = \log ab = n + m + 1 \quad (\because \alpha + \beta = 1)$$

따라서 $\log ab$ 는 정수이다.

STEP2 ab 의 값 찾기

100보다 작은 자연수 a, b 에 대하여 ab 는 10의 거듭제곱이므로 ab 가 될 수 있는 값은 10, 10^2 , 10^3 이다.

STEP3 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

$a < b$ 이므로

(i) $ab=10$ 일 때, (2, 5)

(ii) $ab=100$ 일 때, (2, 50), (4, 25), (5, 20)

(iii) $ab=1000$ 일 때, (20, 50), (25, 40)

(i)~(iii)에 의하여 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6이다.

▶참고 $ab=10$ 일 때 (1, 10)이면 $\log a = \log 1 = 0$,

$\log b = \log 10 = 1$ 이 되어 $\log a$ 와 $\log b$ 의 소수 부분은 모두 0이므로 소수 부분의 합이 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

14-1 **답** $10^{\frac{12}{5}}$ 배

해결전략 | 제시된 식에 주어진 조건을 대입하여 식을 세운다.

STEP1 I_4, I_{10} 을 정하여 주어진 관계식에 각 문자에 해당하는 값 대입하기

별의 등급이 4등급인 별의 밝기를 I_4 , 10등급인 별의 밝기를 I_{10} 이라고 하면

$$4 = -\frac{5}{2} \log I_4 + C \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$10 = -\frac{5}{2} \log I_{10} + C \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

STEP2 몇 배인지 구하기

$$\textcircled{B} - \textcircled{A} \text{을 하면 } \frac{5}{2} (\log I_4 - \log I_{10}) = 6$$

$$\log \frac{I_4}{I_{10}} = \frac{12}{5} \quad \therefore I_4 = 10^{\frac{12}{5}} I_{10}$$

따라서 4등급인 별의 밝기는 10등급인 별의 밝기의 $10^{\frac{12}{5}}$ 배이다.

14-2 **답** 20

해결전략 | 제시된 식에 주어진 조건을 대입하여 식을 세운다.

STEP1 주어진 관계식에 A, B에 대한 각각의 조건 대입하기
두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 각각 P_A, P_B 이고, 평균제곱오차가 각각 E_A, E_B 이므로

$$P_A = 20 \log 255 - 10 \log E_A \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$P_B = 20 \log 255 - 10 \log E_B \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

STEP2 $P_A - P_B$ 의 값 구하기

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\begin{aligned} P_A - P_B &= 20 \log 255 - 10 \log E_A - (20 \log 255 - 10 \log E_B) \\ &= 10 \log E_B - 10 \log E_A \\ &= 10 \log \frac{E_B}{E_A} = 10 \log 100 \quad (\because E_B = 100 E_A) \\ &= 10 \log 10^2 = 20 \end{aligned}$$

14-3 **답** 100만 원

해결전략 | 1000만 원이 매년 $r\%$ 씩 감소하면 n 년 후에

$$1000 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n \text{ 만 원이 된다.}$$

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

10년 전에 1000만 원인 자동차의 현재 보상 기준 가격은 $1000(1 - 0.2)^{10} = 10^3 \times 0.8^{10}$ (만 원)

STEP2 상용로그를 취하여 현재 보상 기준 가격 구하기

$10^3 \times 0.8^{10}$ 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log(10^3 \times 0.8^{10}) &= 3 + 10 \log 0.8 = 3 + 10 \log \frac{8}{10} \\ &= 3 + 10(3 \log 2 - 1) \\ &= 3 + 10(3 \times 0.30 - 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore 10^3 \times 0.8^{10} = 10^2$$

따라서 현재 보상 기준 가격은 100만 원이다.

14-4 **답** 3.8%

해결전략 | 올해 매출을 a , 매년 $r\%$ 씩 증가시킨다고 놓고 식을 세운다.

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

올해 매출을 a 라 하고, 매출을 매년 $r\%$ 씩 증가시킨다고

하면 30년 후의 매출은 $a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30}$

30년 후 올해 매출의 3배가 되려면

$$a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = 3a$$

$$\therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

STEP2 상용로그를 취하여 r 의 값 구하기

$\textcircled{A}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = \log 3, \quad 30 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 3$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{\log 3}{30} = \frac{0.48}{30} = 0.016$$

이때 $\log 1.038 = 0.016$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.038 \quad \therefore r = 3.8(\%)$$

따라서 매출을 매년 3.8%씩 증가시켜야 한다.

14-5 **답** 4

해결전략 | 100만 원이 매년 $a\%$ 씩 증가하면 n 년 후에

$$100 \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n \text{ 만 원이 된다.}$$

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

100만 원에 구입한 미술품의 가격이 매년 $a\%$ 씩 증가하여 14년 후에는 173만 원이 되었으므로

$$100 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{14} = 173$$

$$\therefore \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{14} = 1.73 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

STEP2 상용로그를 취하여 a 의 값 구하기

$\textcircled{A}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$14 \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \log 1.73$$

상용로그표에서 $\log 1.73=0.238$ 이므로

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{0.238}{14}=0.017$$

이때 상용로그표에서 $\log 1.04=0.017$ 이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.04 \quad \therefore a=4$$

실전 연습 문제

72~74쪽

01 ⑤	02 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 6$	03 ③
04 ③	05 ④	06 ②
07 ④	08 ⑤	
09 ①	10 ④	11 ③
12 16	13 ④	
14 ②	15 ①	16 39
17 360		
18 0.0417		

01

해결전략 | 로그의 정의를 연속하여 이용한다.

$$\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\} = 0 \text{에서}$$

로그의 정의에 의하여

$$\log_3 (\log_4 x) = 1$$

$$\log_4 x = 3^1 = 3$$

$$\therefore x = 4^3 = 64$$

02

해결전략 | 밑의 조건과 진수의 조건을 모두 만족시키는 범위를 구한다.

STEP1 (밑) > 0 , (밑) $\neq 1$ 인 범위 구하기

밑은 1이 아닌 양수이어야 하므로

$$x-2 \neq 1, x-2 > 0$$

$$\text{즉, } 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 (진수) > 0 인 범위 구하기

진수는 양수이어야 하므로

$$-x^2 + 7x - 6 > 0$$

$$x^2 - 7x + 6 < 0, (x-1)(x-6) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

STEP3 공통 범위 구하기

①, ②를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$2 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① 밑의 조건으로 식 세우기	30 %
② 진수의 조건으로 식 세우기	30 %
③ 공통 범위 구하기	40 %

03

해결전략 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\log_2 12 - 2\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} - \log_{\sqrt{2}} 3$$

$$= \log_2 12 - 2\log_{2^{-1}} \sqrt{3} - \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3$$

$$= \log_2 12 + \log_2 (\sqrt{3})^2 - \log_2 3^2$$

$$= \log_2 \frac{12 \times 3}{9} = \log_2 4 = 2$$

04

해결전략 | 로그의 정의와 성질을 이용한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 간단히 하기

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log 2 + \log \frac{3}{2} + \cdots + \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \log\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \log(n+1)$$

STEP2 n 의 값 구하기

따라서 $\log(n+1) = 2$ 이므로

$$n+1 = 10^2 \quad \therefore n = 99$$

05

해결전략 | 주어진 식을 밑의 변환 공식을 이용하여 변형한 후 a 의 값을 구한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 변형하기

밑의 변환 공식에 의하여 주어진 식을 변형하면

$$\log_x 4 + \log_x 9 = 2\log_x a$$

$$\log_x 36 = \log_x a^2$$

STEP2 진수를 비교하여 a 의 값 구하기

$$\text{즉, } a^2 = 36$$

이때 a 가 양수이므로 $a = 6$

06

해결전략 | p, q 를 $\log_5 2, \log_5 3$ 를 사용한 식으로 나타낸 후

$\log_5 \frac{36}{5}$ 에 대입한다.

STEP1 p, q 를 $\log_5 2, \log_5 3$ 를 사용하여 나타내기

$$p = \log_5 \frac{2}{3} = \log_5 2 - \log_5 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$q = \log_5 \frac{3}{4} = \log_5 3 - 2\log_5 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

STEP2 $\log_5 2$ 를 p, q 를 사용한 식으로 나타내기

㉠, ㉡을 변끼리 더하면 $p+q=-\log_5 2$

$$\therefore \log_5 2 = -p - q$$

㉢에서

$$\log_5 3 = \log_5 2 - p = (-p - q) - p = -2p - q$$

STEP3 $\log_5 \frac{36}{5}$ 를 p, q 를 사용한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \therefore \log_5 \frac{36}{5} &= \log_5 \frac{2^2 \times 3^2}{5} \\ &= 2\log_5 2 + 2\log_5 3 - 1 \\ &= 2(-p - q) + 2(-2p - q) - 1 \\ &= -6p - 4q - 1 \end{aligned}$$

07

해결전략 | $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ 를 로그로 나타내어 대입한다.

STEP1 로그의 정의를 이용하여 $\frac{1}{x}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} 15^x &= 25 \text{이므로 } x = \frac{\log_{15} 25}{\log_{15} 15} = 2\log_{15} 5 \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \log_5 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^y &= 625 \text{이므로 } y = \frac{\log_3 625}{\log_3 3} = 4\log_3 5 \\ \therefore \frac{1}{y} &= \frac{1}{4} \log_5 3 \end{aligned}$$

STEP2 대입하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} - \frac{2}{y} &= \frac{1}{2} \log_5 15 - \frac{1}{2} \log_5 3 \\ &= \frac{1}{2} (\log_5 15 - \log_5 3) \\ &= \frac{1}{2} \log_5 \frac{15}{3} = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

08

해결전략 | x, y, z 를 밑이 2인 로그로 나타내어 대입한다.

STEP1 x, y, z 를 밑이 2인 로그로 나타내기

$$2^x = a \text{에서 } x = \log_2 a$$

$$2^y = b \text{에서 } y = \log_2 b$$

$$2^z = c \text{에서 } z = \log_2 c$$

STEP2 $\log_a \sqrt{bc^2}$ 을 x, y, z 로 나타내기

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \sqrt{bc^2} &= \frac{\log_2 \sqrt{bc^2}}{\log_2 a} = \frac{\frac{1}{2} \log_2 bc^2}{\log_2 a} = \frac{\log_2 bc^2}{2\log_2 a} \\ &= \frac{\log_2 b + \log_2 c^2}{2\log_2 a} = \frac{\log_2 b + 2\log_2 c}{2\log_2 a} \\ &= \frac{y + 2z}{2x} \end{aligned}$$

09

해결전략 | $a^2=b^3=c^4=k$ 로 놓고 로그를 사용한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\log_k a, \log_k b, \log_k c$ 의 값 구하기

$$a^2=b^3=c^4=k \text{로 놓으면}$$

$$a^2=k \text{에서 } \log_a k=2 \quad \therefore \log_k a=\frac{1}{2}$$

$$b^3=k \text{에서 } \log_b k=3 \quad \therefore \log_k b=\frac{1}{3}$$

$$c^4=k \text{에서 } \log_c k=4 \quad \therefore \log_k c=\frac{1}{4}$$

STEP2 A, B, C 의 값 구하기

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$A = \log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$B = \log_b c = \frac{\log_k c}{\log_k b} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$C = \log_c a = \frac{\log_k a}{\log_k c} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

STEP3 A, B, C 의 대소 비교하기

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 2 \text{이므로}$$

$$A < B < C$$

10

해결전략 | $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$ 로 놓고 밑이 2인 로그를 취한다.

STEP1 조건 (가)의 식 변형하기

$$\text{조건 (가)에서 } \sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k \text{로 놓으면}$$

$$a^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{4}}=k \text{이므로 각각 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\frac{1}{3} \log_2 a = \frac{1}{2} \log_2 b = \frac{1}{4} \log_2 c = \log_2 k \quad \dots\dots ㉠$$

STEP2 조건 (나)의 식을 이용하여 $\log_2 k$ 의 값 구하기

$$\text{조건 (나)에서 } \log_8 a + \log_4 b + \log_2 c = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b + \log_2 c = 2$$

㉠에 의하여

$$\log_2 k + \log_2 k + 4\log_2 k = 2$$

$$6\log_2 k = 2$$

$$\therefore \log_2 k = \frac{1}{3}$$

STEP3 $\log_2 abc$ 의 값 구하기

따라서 $\log_2 a=1, \log_2 b=\frac{2}{3}, \log_2 c=\frac{4}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_2 abc &= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 3\end{aligned}$$

11

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 다음 a, b, c 사이의 관계를 파악한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 정리하기

$$\begin{aligned}\log_9(a+b) + \log_9(a-b) &= \log_3 c \text{에서} \\ \log_{3^2}(a+b) + \log_{3^2}(a-b) &= \log_3 c \\ \frac{1}{2}\log_3(a+b) + \frac{1}{2}\log_3(a-b) &= \log_3 c\end{aligned}$$

$$\log_3(a+b)(a-b) = 2\log_3 c$$

$$\log_3(a^2 - b^2) = \log_3 c^2$$

따라서 $a^2 - b^2 = c^2$ 이므로 $a^2 = b^2 + c^2$

STEP2 삼각형의 모양 구하기

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

12

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한 다음 변형한 식에 대입한다.

STEP1 이차방정식의 두 근의 합과 곱 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_3 b = 6, \log_3 a \times \log_3 b = 2 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 밑의 변환 공식을 이용하여 식 변형하기

$$\begin{aligned}\log_a b + \log_b a &= \frac{\log_3 b}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 b} \\ &= \frac{(\log_3 b)^2 + (\log_3 a)^2}{\log_3 a \times \log_3 b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

STEP3 곱셈 공식을 이용하여 식 변형하기

$$= \frac{(\log_3 a + \log_3 b)^2 - 2\log_3 a \times \log_3 b}{\log_3 a \times \log_3 b} \quad \dots\dots ③$$

STEP4 대입하여 식의 값 구하기

$$= \frac{6^2 - 2 \times 2}{2} = 16 \quad \dots\dots ④$$

채점 요소	배점
① 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기	20 %
② $\log_a b + \log_b a$ 를 밑이 3인 로그로 정리하기	30 %
③ 곱셈 공식을 이용하여 식 변형하기	30 %
④ $\log_a b + \log_b a$ 의 값 구하기	20 %

13

해결전략 | $\log_5 \frac{1}{3}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한 다음 대입한다.

STEP1 n, a 의 값 구하기

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로 } \log_5 \frac{1}{5} < \log_5 \frac{1}{3} < \log_5 1$$

$$\therefore -1 < \log_5 \frac{1}{3} < 0$$

$$\log_5 \frac{1}{3} \text{의 정수 부분은 } -1 \text{이므로 } n = -1$$

$$\log_5 \frac{1}{3} \text{의 소수 부분은}$$

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{1}{3} - (-1) &= \log_5 \frac{1}{3} + 1 = \log_5 \frac{1}{3} + \log_5 5 \\ &= \log_5 \frac{5}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$a = \log_5 \frac{5}{3}$$

STEP2 대입하여 식의 값 구하기

$$\therefore 5^a - 5^n = 5^{\log_5 \frac{5}{3}} - 5^{-1} = \frac{5}{3} - \frac{1}{5} = \frac{22}{15}$$

14

해결전략 | 3^{16} 에 상용로그를 취한 값의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

STEP1 3^{16} 의 자릿수 구하기

$$\log 3^{16} = 16\log 3 = 16 \times 0.4771 = 7.6336$$

즉, $\log 3^{16}$ 의 정수 부분이 7이므로 3^{16} 은 8자리의 정수이다.

STEP2 3^{16} 의 최고 자리의 숫자 구하기

$$\text{이때 } \log 4 = 2\log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020,$$

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990 \text{이므로}$$

$$\log 4 < 0.6336 < \log 5$$

$$7 + \log 4 < 7.6336 < 7 + \log 5$$

$$\log(4 \times 10^7) < \log 3^{16} < \log(5 \times 10^7)$$

$$\therefore 4 \times 10^7 < 3^{16} < 5 \times 10^7$$

즉, 3^{16} 의 최고 자리의 숫자는 4이다.

STEP3 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=8, n=4$ 이므로

$$m+n=12$$

15

해결전략 | $\log x$ 의 값의 범위를 구하고, 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $\log x$ 의 값의 범위 구하기

$$100 \leq x < 1000 \text{에서 } \log 100 \leq \log x < \log 1000$$

$$\therefore 2 \leq \log x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 소수 부분이 같음을 이용하여 $\log x$ 의 값 구하기

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log x^4$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^4 - \log x^2 = 4\log x - 2\log x = 2\log x$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } 4 \leq 2\log x < 6$$

이때 $2\log x$ 는 정수이므로

$$2\log x = 4 \text{ 또는 } 2\log x = 5$$

$$\text{즉, } \log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{5}{2}$$

STEP3 $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값 구하기

$$\therefore x = 100 \text{ 또는 } x = 100\sqrt{10}$$

따라서 $\alpha = 100$, $\beta = 100\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{100\sqrt{10}}{100} = \sqrt{10}$$

16

해결전략 $\log t$ 의 정수 부분이 $f(t)$ 이면 $\log t - f(t)$ 는 $\log t$ 의 소수 부분임을 이용한다.

STEP1 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기

이차방정식 $3x^2 - 41x + k = 0$ 의 두 근이

$$f(t), \log t - f(t)$$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$f(t) + \log t - f(t) = \frac{41}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(t) \{ \log t - f(t) \} = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $f(t), \log t - f(t)$ 의 값 구하기

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(t) + \log t - f(t) = \frac{41}{3} = 13 + \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$f(t) = 13, \log t - f(t) = \frac{2}{3} \quad \leftarrow f(t) \text{는 } \log t \text{의 정수 부분, } \log t - f(t) \text{는 } \log t \text{의 소수 부분} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 k 의 값 구하기

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$13 \times \frac{2}{3} = \frac{k}{3} \quad \therefore k = 26 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

STEP4 $f(t) + k$ 의 값 구하기

$$\therefore f(t) + k = 13 + 26 = 39 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

채점 요소	배점
① 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기	20 %
② $f(t), \log t - f(t)$ 의 값 구하기	30 %
③ k 의 값 구하기	30 %
④ $f(t) + k$ 의 값 구하기	20 %

17

해결전략 $[\log N]$ 은 $\log N$ 의 정수 부분을 나타낸다.

STEP1 $\log N$ 의 정수 부분 구하기

$$\text{조건 (가)에서 } \log 100 < \log 256 < \log 1000$$

$$2 < \log 256 < 3 \text{이므로 } [\log 256] = 2$$

$$\therefore [\log N] = 2$$

STEP2 $\log N$ 의 값 구하기

$$\text{조건 (나)에서 } \log 10 < \log 24 < \log 100$$

$$1 < \log 24 < 2 \text{이므로 } [\log 24] = 1 \text{이고}$$

$$\log N - [\log N] = \log 36 - [\log 24] \text{에서}$$

$$\log N - 2 = \log 36 - 1$$

$$\log N = \log 36 + 1$$

$$= \log 36 + \log 10 = \log 360$$

STEP3 N 의 값 구하기

$$\therefore N = 360$$

18

해결전략 주어진 상황의 규칙을 찾아 식을 세우고 상용로그를 이용하여 해결한다.

STEP1 제시된 내용을 유추하여 k 의 값을 구한다.

이 호수의 현재 오염물질의 양을 a 라고 하면

1년 후의 오염물질의 양은 $0.9a$,

2년 후의 오염물질의 양은 0.9^2a ,

⋮

30년 후의 오염물질의 양은 $0.9^{30}a$ 이다.

$$\therefore k = 0.9^{30} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 상용로그를 취하여 $\log k$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log k = \log 0.9^{30} = 30 \log 0.9$$

$$= 30(2 \log 3 - 1) = 30(2 \times 0.477 - 1)$$

$$= -1.38$$

$$= -2 + 0.620 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 표를 이용하여 k 의 값 구하기

표에서 $\log 4.17 = 0.620$ 이므로

$$\log k = \log 10^{-2} + \log 4.17$$

$$= \log 0.0417$$

$$\therefore k = 0.0417 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① k 를 지수를 사용하여 나타내기	30 %
② $\log k$ 의 값 구하기	40 %
③ k 의 값 구하기	30 %

- 01 3 02 ⑤ 03 9 04 1
05 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 06 ③
07 $\log 21$ 08 277

01

해결전략 | 밑의 조건과 진수의 조건을 모두 만족시키는 a 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 밑의 조건으로 범위 구하기

- (i) 밑의 조건에 의하여 $a+2>0$, $a+2\neq 1$ 이므로
 $-2<a<-1$ 또는 $a>-1$

STEP2 진수의 조건으로 범위 구하기

- (ii) 진수의 조건에 의하여 $ax^2-2ax-a+6>0$

㉠ $a=0$ 인 경우

$ax^2-2ax-a+6=6>0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ $a<0$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $ax^2-2ax-a+6>0$ 을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

㉢ $a>0$ 인 경우

$ax^2-2ax-a+6>0$ 을 만족시키기 위해서는 방정식 $ax^2-2ax-a+6=0$ 의 판별식을 D 라고 할

때, $\frac{D}{4}<0$ 이어야 하므로

$$(-a)^2-a(-a+6)<0$$

$$2a(a-3)<0$$

$$\therefore 0<a<3$$

STEP3 정수 a 의 개수 구하기

- (i), (ii)에 의하여 $0\leq a<3$ 이므로 조건을 만족시키는 정수 a 는 0, 1, 2이고, 그 개수는 3이다.

02

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

STEP1 A 를 간단히 하기

밑의 변환 공식에 의하여

$$A=3^{\frac{\log_{10}(\log_{10} 3)}{\log_{10} 3}}=3^{\log_3(\log_{10} 3)}=(\log_{10} 3)^{\log_3 3}=\log_{10} 3$$

STEP2 10^A 의 값 구하기

$$\therefore 10^A=10^{\log_{10} 3}=3^{\log_{10} 10}=3$$

03

해결전략 | 주어진 식으로부터 a, b 사이의 관계를 구한 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구한다.

STEP1 a, b 사이의 관계 구하기

$$\log_a b=\log_b a \text{에서}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_a b}, (\log_a b)^2=1$$

$$\log_a b=\pm 1$$

이때 a, b 는 서로 다른 양수이므로

$$\log_a b\neq 1 \quad \therefore \log_a b=-1 \quad \leftarrow b=a^{-1}$$

$$\therefore b=\frac{1}{a}$$

STEP2 $(a+1)(b+4)$ 의 최솟값 구하기

$$(a+1)(b+4)=(a+1)\left(\frac{1}{a}+4\right)=5+4a+\frac{1}{a} \text{에서}$$

$4a>0, \frac{1}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5+4a+\frac{1}{a}\geq 5+2\sqrt{4a\times\frac{1}{a}}=9$$

(단, 등호는 $4a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=\frac{1}{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

04

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 $A-B$ 를 간단히 한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 B 의 식 간단히 하기

$$B=2+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$$

$$=2+\frac{1}{2}\log_2 ab$$

$$=2+\log_2 \sqrt{ab}$$

$$=\log_2 4\sqrt{ab}$$

STEP2 $A-B$ 간단히 하기

$$\therefore A-B=\log_2(a+b)-\log_2 4\sqrt{ab}$$

$$=\log_2 \frac{a+b}{4\sqrt{ab}}$$

STEP3 $\frac{b}{a}$ 의 값 구하기

$$\log_2 \frac{a+b}{4\sqrt{ab}}=-1 \text{이므로}$$

$$\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}=\frac{1}{2}$$

$$a-2\sqrt{ab}+b=0$$

$a>0, b>0$ 이므로

$$(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=0$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0 \quad \therefore \sqrt{a}=\sqrt{b}, \text{ 즉 } a=b$$

$$\therefore \frac{b}{a}=1$$

05

해결전략 | 밑의 변환 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 간단히 하기

밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{\log_a(b+c)} + \frac{1}{\log_a(b-c)} \\ = \frac{2}{\log_a(b+c) \times \log_a(b-c)}$$

양변에 $\log_a(b+c) \times \log_a(b-c)$ 를 곱하면

$$\log_a(b-c) + \log_a(b+c) = 2$$

$$\log_a(b^2 - c^2) = 2$$

로그의 정의에 의하여

$$a^2 = b^2 - c^2$$

STEP2 세 변 사이의 관계를 통해 삼각형의 종류 판단하기

따라서 $b^2 = a^2 + c^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

06

해결전략 | $10^a = 3A + 2$ (A 는 정수)로 놓고 a 의 값의 범위를 이용하여 정수 A 를 구한다.

STEP1 나눗셈식을 이용하여 a 를 상용로그의 식으로 나타내기

$$10^a = 3A + 2 \quad (A \text{는 정수}) \text{라고 하면}$$

$$a = \log_{10}(3A + 2)$$

STEP2 a 의 값의 범위를 이용하여 정수 A 의 값 구하기

$$0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$0 < \log_{10}(3A + 2) < 1$$

$$1 < 3A + 2 < 10, \quad -\frac{1}{3} < A < \frac{8}{3}$$

이때 정수 A 의 값은 0, 1, 2이다.

STEP3 a 의 값의 합 구하기

따라서 $a = \log_{10} 2, \log_{10} 5, \log_{10} 8$ 이므로 모든 a 의 값의 합은

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 + \log_{10} 8 = 1 + 3\log_{10} 2$$

07

해결전략 | 이차방정식 $x^2 - 2nx - 1 = x - 2n$ 의 근과 계수의 관계를 이용하여 $f(n)$ 을 구한다.

STEP1 교점의 x 좌표를 구하는 이차방정식 구하기

함수 $y = x^2 - 2nx - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x - 2n$ 이 만나는 두 점의 x 좌표 α_n, β_n 은 방정식 $x^2 - 2nx - 1 = x - 2n$, 즉 $x^2 - (2n+1)x + 2n - 1 = 0$ 의 해와 같다.

STEP2 근과 계수의 관계 이용하기

이차방정식 $x^2 - (2n+1)x + 2n - 1 = 0$ 의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 2n + 1, \quad \alpha_n \beta_n = 2n - 1$$

STEP3 $f(n)$ 구하기

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{2n+1}{2n-1} \text{이므로}$$

$$f(n) = \log\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right) = \log \frac{2n+1}{2n-1}$$

STEP4 $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(1) + f(2) + \dots + f(10)$$

$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{5}{3} + \log \frac{7}{5} + \dots + \log \frac{21}{19}$$

$$= \log\left(\frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{21}{19}\right)$$

$$= \log 21$$

08

해결전략 | x 가 분수일 때와 자연수일 때로 나누어 $\log x$ 의 정수 부분을 구한다.

STEP1 A 의 값 구하기

$$\frac{1}{99} \leq x \leq \frac{1}{11} \text{이면 } x \text{는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음}$$

으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로

$$(\log x \text{의 정수 부분}) = -2$$

$$\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{이면 } x \text{는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로}$$

0이 아닌 숫자가 나타나므로

$$(\log x \text{의 정수 부분}) = -1$$

$$\therefore A = N\left(\frac{1}{99}\right) + N\left(\frac{1}{98}\right) + \dots + N\left(\frac{1}{11}\right) + N\left(\frac{1}{10}\right) \\ + N\left(\frac{1}{9}\right) + \dots + N\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= (-2) \times 89 + (-1) \times 9 = -187$$

STEP2 B 의 값 구하기

또, $1 \leq x \leq 9$ 이면 x 는 한 자리의 정수이므로

$$(\log x \text{의 정수 부분}) = 0$$

$10 \leq x \leq 99$ 이면 x 는 두 자리의 정수이므로

$$(\log x \text{의 정수 부분}) = 1$$

$$\therefore B = N(1) + N(2) + \dots + N(9) + N(10) \\ + N(11) + \dots + N(99)$$

$$= 0 \times 9 + 1 \times 90 = 90$$

STEP3 $|A| + |B|$ 의 값 구하기

$$\therefore |A| + |B| = 187 + 90 = 277$$

03 지수함수

개념확인

78~79쪽

01 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 8

(4) $f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

02 답 (1) 실수, 양의 실수

(2) <

(3) >

03 답 (1) 풀이 참조, 치역: $\{y|y>0\}$,

점근선의 방정식: $y=0$

(2) 풀이 참조, 치역: $\{y|y>0\}$,

점근선의 방정식: $y=0$

(3) 풀이 참조, 치역: $\{y|y>3\}$,

점근선의 방정식: $y=3$

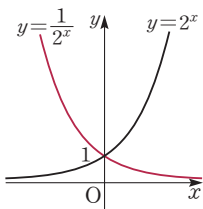
(4) 풀이 참조, 치역: $\{y|y<0\}$,

점근선의 방정식: $y=0$

(1) $y = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 의 그래

프는 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

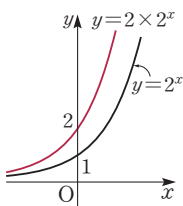
따라서 치역은 $\{y|y>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.



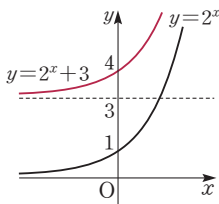
(2) $y = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$ 의 그래프는

$y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

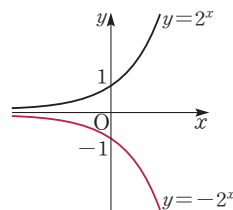


(3) $y = 2^x + 3$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>3\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=3$ 이다.

(4) $y = -2^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y<0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

04 답 (1) 최댓값: 25, 최솟값: 5

(2) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{4}$

(1) 함수 $y=5^x$ 에서 밑이 5이고 $5>1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=5^x$ 은 $x=2$ 일 때 최대이고 최댓값은 $y=5^2=25$, $x=1$ 일 때 최소이고 최솟값은 $y=5$ 이다.

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 에서 밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은

$x=-1$ 일 때 최대이고 최댓값은 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$,

$x=1$ 일 때 최소이고 최솟값은 $y=\frac{1}{4}$ 이다.

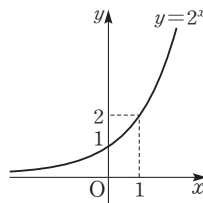
필수유형 01

81쪽

01-1 답 ③

해결전략 | 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프를 그려서 지수함수의 성질을 파악한다.

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



① $y=2^x$ 에 $x=1$ 을 대입하면 $y=2$ 이므로 그래프는 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

② 그래프는 제1, 2사분면을 지난다.

- ③ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$, 즉 x 축이므로 x 축과 만나지 않는다.
- ④ 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.
- ⑤ 밑 2가 $2>1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

01-2 ㉮ 5

해결전략 | 지수함수에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하기 위한 밑의 조건을 식으로 나타낸다.

STEP1 a 에 대한 부등식 나타내기

지수함수에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하기 위해서는 밑이 1보다 커야 한다.

$$y = (-a^2 + 4a + 5)^x \text{의 밑은 } -a^2 + 4a + 5 \text{이므로}$$

$$-a^2 + 4a + 5 > 1$$

STEP2 부등식의 해 구하기

$$a^2 - 4a - 4 < 0 \quad \therefore 2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$$

STEP3 정수 a 의 개수 구하기

이때 $-1 < 2 - 2\sqrt{2} < 0$, $4 < 2 + 2\sqrt{2} < 5$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 5이다.

01-3 ㉮ $-2 < a < -1$ 또는 $-1 < a < 0$

해결전략 | 지수함수에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하기 위한 밑의 조건을 식으로 나타낸다.

STEP1 a 에 대한 부등식 나타내기

지수함수에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하기 위해서는 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 한다.

$$y = (a^2 + 2a + 1)^x \text{의 밑은 } a^2 + 2a + 1 \text{이므로}$$

$$0 < a^2 + 2a + 1 < 1$$

STEP2 부등식의 해 구하기

$$(i) a^2 + 2a + 1 > 0, \text{ 즉 } (a+1)^2 > 0 \text{에서}$$

$$a \neq -1 \text{인 모든 실수}$$

$$(ii) a^2 + 2a + 1 < 1, \text{ 즉 } a^2 + 2a < 0 \text{에서}$$

$$a(a+2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 0$$

STEP3 a 의 값의 범위 구하기

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } -2 < a < -1 \text{ 또는 } -1 < a < 0$$

01-4 ㉮ $\neg, \subset$

해결전략 | $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 이기 위한 밑의 조건을 생각한다.

STEP1 주어진 조건을 만족시키는 함수의 조건 찾기

$a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이

증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다. 따라서 지수함수에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 을 만족시켜야 한다.

STEP2 보기의 함수의 밑 찾기

$$\neg. f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x \text{에서 밑 } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{는 } 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$a < b \text{이면 } f(a) > f(b)$$

$$\cup. f(x) = \frac{1}{3^{-x}} = 3^x \text{에서 밑 } 3 \text{은 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$a < b \text{이면 } f(a) < f(b)$$

$$\cap. f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{에서 밑 } \frac{2}{3} \text{는 } 0 < \frac{2}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$a < b \text{이면 } f(a) > f(b)$$

$$\text{ㄹ. } f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 5^x \text{에서 밑 } 5 \text{는 } 5 > 1 \text{이므로}$$

$$a < b \text{이면 } f(a) < f(b)$$

따라서 $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 것은 $\neg, \cap$ 이다.

>참고 $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$

$\Rightarrow x$ 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$a < b$ 일 때, $f(a) < f(b)$

$\Rightarrow x$ 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

01-5 ㉮ $b < a < d < c$

해결전략 | 먼저 주어진 지수함수의 그래프를 이용하여 함수의 밑의 범위를 파악한다.

STEP1 c, d 의 값의 범위를 구하여 c, d 의 대소 비교하기

두 함수 $y = c^x, y = d^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $c > 1, d > 1$

이때 밑이 1보다 큰 지수함수의 그래프는 $x > 0$ 에서 밑이 커질수록 y 축에 가까워지므로

$$c > d > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 a, b 의 값의 범위를 구하여 a, b 의 대소 비교하기

두 함수 $y = a^x, y = b^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $0 < a < 1, 0 < b < 1$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작은 지수함수의 그래프는 $x > 0$ 에서 밑이 작을수록 x 축에 가까워지므로

$$0 < b < a < 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

STEP3 a, b, c, d 의 대소 비교하기

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에 의하여 } b < a < d < c$$

01-6 ㉮ $\neg, \cup$

해결전략 | 지수의 성질을 이용하여 주어진 등식이 성립하는지 알아본다.

STEP1 $f(-x)$ 를 구해 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

$$\neg. f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{f(x)} \quad (\text{참})$$

STEP2 $\sqrt{f(2x)}$ 를 구해 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

$$\begin{aligned} \neg. f(2x) &= a^{2x} = (a^x)^2 \text{이므로} \\ \sqrt{f(2x)} &= \sqrt{(a^x)^2} = a^x = f(x) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

STEP3 $f(x^3)$, $\{f(x)\}^3$ 을 구해 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

$$\neg. f(x^3) = a^{x^3} \neq a^{3x} = \{f(x)\}^3 \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

🎯 뽀빠의 비법

지수함수 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)에 대하여 다음 성질이 성립한다. (단, $p > 0, q > 0$)

- (1) $f(0) = 1, f(1) = a$
- (2) $f(p+q) = f(p)f(q)$
- (3) $f(p-q) = f(p) \div f(q)$
- (4) $f(np) = \{f(p)\}^n$ (단, n 은 실수이다.)

필수유형 02

83쪽

02-1 답 (1) 풀이 참조, 치역: $\{y | y > -2\}$,
점근선의 방정식: $y = -2$

(2) 풀이 참조, 치역: $\{y | y < \frac{5}{2}\}$,

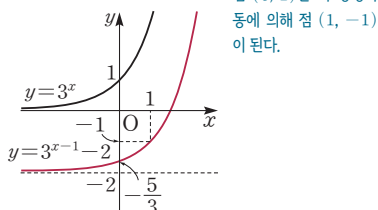
점근선의 방정식: $y = \frac{5}{2}$

(3) 풀이 참조, 치역: $\{y | y < 1\}$,
점근선의 방정식: $y = 1$

(4) 풀이 참조, 치역: $\{y | y > -1\}$,
점근선의 방정식: $y = -1$

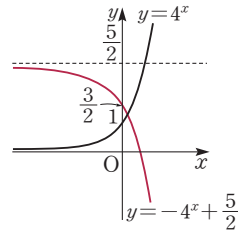
해결전략 | 주어진 함수의 그래프는 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동한 그래프이다.

(1) $y = 3^{x-1} - 2$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y > -2\}$, 점근선의 방정식은 $y = -2$ 이다.

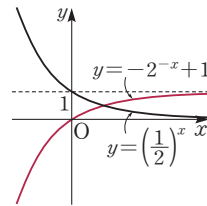
(2) $y = -4^x + \frac{5}{2}$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y < \frac{5}{2}\}$, 점근선의 방정식은 $y = \frac{5}{2}$ 이다.

$$(3) y = -2^{-x} + 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

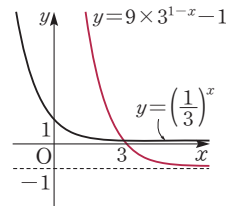
즉, $y = -2^{-x} + 1$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y < 1\}$, 점근선의 방정식은 $y = 1$ 이다.

$$\begin{aligned} (4) y &= 9 \times 3^{1-x} - 1 = 3^2 \times 3^{1-x} - 1 \\ &= 3^{3-x} - 1 = 3^{-(x-3)} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 1 \end{aligned}$$

즉, $y = 9 \times 3^{1-x} - 1$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y > -1\}$, 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

02-2 답 -2

해결전략 | 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식을 구한 후 그래프의 점근선과 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용한다.

STEP1 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}+n$$

STEP2 그래프의 점근선을 이용하여 n 의 값 구하기

이때 점근선은 직선 $y=-3$ 이므로

$$n=-3$$

STEP3 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용하여 m 의 값 구하기

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}-3$ 의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{-m}-3$$

$$3^m=3 \quad \therefore m=1$$

$$\therefore m+n=1+(-3)=-2$$

02-3 **답 5**

해결전략 | 주어진 함수식을 $y=3^{2(x-m)}+n$ 꼴로 정리한다.

STEP1 함수식 정리하기

$$\begin{aligned} y &= 9 \times 3^{2x} - 6 = 3^2 \times 3^{2x} - 6 = 3^{2x+2} - 6 \\ &= 3^{2(x+1)} - 6 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $m-n$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}$ 의 그래프는 $y=3^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-1$, $n=-6$ 이므로

$$m-n=5$$

02-4 **답 3**

해결전략 | $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$ 이고, x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=f(x-m)+n$ 임을 이용한다.

STEP1 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y=a \times 3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-a \times 3^{-x}$$

$y=-a \times 3^{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-a \times 3^{-(x-2)}+3$$

$$\text{즉, } y=-a \times 3^{-x+2}+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 a 의 값 구하기

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(1, -6)$ 을 지나므로

$$-6=-a \times 3^{-1+2}+3$$

$$-6=-a \times 3+3, \quad -3a=-9$$

$$\therefore a=3$$

02-5 **답 ㄱ, ㄷ, ㄹ**

해결전략 | 보기의 식을 변형하여 $y=5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동을 할 수 있는지 파악한다.

STEP1 함수식 정리하여 이동 유추하기

$$\text{ㄱ. } y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}=5^{-(x-2)}$$

이므로 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ 의 그래프는 $y=5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄴ. } y=5^{2x}+3=25^x+3$$

이므로 $y=5^{2x}+3$ 의 그래프는 $y=5^x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

$$\text{ㄷ. } y=\sqrt{5} \times 5^x+1=5^{\frac{1}{2}} \times 5^x+1=5^{x+\frac{1}{2}}+1$$

이므로 $y=\sqrt{5} \times 5^x+1$ 의 그래프는 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x=-5^{-x}$$

이므로 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프는 $y=5^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

🔗 풀법의 비법

$y=c \times a^x$ ($a>0$, $a \neq 1$, c 는 상수)의 그래프는

$$y=c \times a^x=a^{\log_a c} \times a^x=a^{x+\log_a c}$$

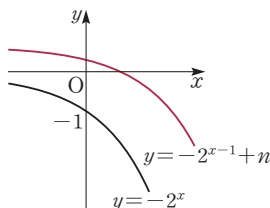
이므로 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\log_a c$ 만큼 평행이동한 것이다.

02-6 **답 0**

해결전략 | 주어진 함수의 그래프의 개형을 그려 조건을 만족시키는 식을 세운다.

STEP1 $y=-2^{x-1}+n$ 의 그래프의 개형 그리기

$y = -2^{x-1} + n$ 의 그래프는 $y = -2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이므로 $y = -2^{x-1} + n$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP2 정수 n 의 최댓값 구하기

이때 $y = -2^{x-1} + n$ 의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $x=0$ 일 때, $y \leq 0$ 이면 된다. 즉,

$$-2^{-1} + n \leq 0, \quad -\frac{1}{2} + n \leq 0$$

$$\therefore n \leq \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 정수 n 의 최댓값은 0이다.

필수유형 03

85쪽

03-1 ㉮ $\frac{26}{3}$

해결전략 | 점 A의 x 좌표를 a 로 놓고 B, C의 좌표를 구한다.

STEP1 세 점 A, B, C의 좌표를 a 를 사용하여 나타내기

점 A의 좌표를 $(a, 3^{-a})$ 이라고 하자.

점 B는 함수 $y = 9^x$ 의 그래프 위의 점이고, 점 B의 y 좌표는 3^{-a} 이므로 점 B의 x 좌표를 구하면

$$3^{-a} = 9^x \text{에서 } 3^{-a} = 3^{2x}, \quad 2x = -a \quad \therefore x = -\frac{a}{2}$$

$$\therefore B\left(-\frac{a}{2}, 3^{-a}\right)$$

또, 점 C는 함수 $y = 3^{-x}$ 의 그래프 위의 점이고, 점 C의

x 좌표가 $-\frac{a}{2}$ 이므로 점 C의 y 좌표를 구하면

$$y = 3^{-\left(-\frac{a}{2}\right)} = 3^{\frac{a}{2}}$$

$$\therefore C\left(-\frac{a}{2}, 3^{\frac{a}{2}}\right)$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$\overline{AB} = 3 \text{이므로 } -\frac{a}{2} - a = 3$$

$$-\frac{3}{2}a = 3 \quad \therefore a = -2$$

STEP3 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이는

$$3^{-a} - 3^{\frac{a}{2}} = 3^2 - 3^{-1} = \frac{26}{3}$$

03-2 ㉮ $\frac{6}{5}$

해결전략 | 점 P의 x 좌표를 a 로 놓고 Q의 좌표를 구한다.

STEP1 Q의 좌표를 한 문자로 나타내기

A(4, 0)이고, 점 P의 좌표를 $(a, 2^{3a})$ 이라고 하면 선분 AP의 중점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2^{3a}}{2}\right)$$

STEP2 점 P의 x 좌표 구하기

점 Q가 함수 $y = 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\frac{2^{3a}}{2} = 2^{\frac{4+a}{2}} \text{에서 } 2^{3a-1} = 2^{\frac{4+a}{2}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow y=2^x \text{에 } x \text{ 대신 } \frac{4+a}{2}, \\ y \text{ 대신 } \frac{2^{3a}}{2} \text{을 대입} \end{array}$$

$$3a-1 = \frac{4+a}{2}, \quad \frac{5}{2}a = 3 \quad \therefore a = \frac{6}{5}$$

03-3 ㉮ 9

해결전략 | 점 A의 x 좌표를 구하고 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 임을 이용한다.

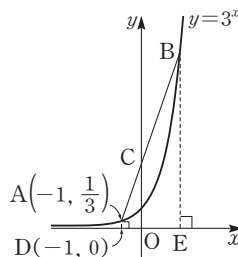
STEP1 점 A의 좌표 구하기

점 A는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프 위에 있고 y 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} = 3^x \quad \therefore x = -1$$

$$\therefore A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

STEP2 점 B의 y 좌표 구하기



점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라고 하면 y 축 위의 점 C에 대하여

$\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 이므로

$$\overline{DO} : \overline{OE} = 1 : 2 \quad \rightarrow \overline{CO} \parallel \overline{BE} \text{이므로 } \overline{AC} : \overline{CB} = \overline{DO} : \overline{OE}$$

또, 점 E(2, 0)이므로

B(2, 3^2), 즉 B(2, 9)

따라서 점 B의 y 좌표는 9이다.

● **다른 풀이**

STEP1 점 C의 좌표를 한 문자로 나타내기

점 A $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이고 점 B의 x 좌표를 b 라고 하면 점 B의 좌표는 $(b, 3^b)$

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{b-2}{3}, \frac{3^b + \frac{2}{3}}{3} \right)$$

STEP2 점 B의 y 좌표 구하기

점 C는 y 축 위에 있으므로 $\frac{b-2}{3}=0 \quad \therefore b=2$

따라서 점 B의 y 좌표는 $3^2=9$ (점 C의 x 좌표)=0

03-4 ㉮ 71

해결전략 | 넓이를 이용하여 점 A의 y 좌표를 먼저 구한다.

STEP1 점 A의 x 좌표 구하기

삼각형 AOB의 넓이가 16이고 $\overline{OB}=4$ 이므로 점 A의 y 좌표는 8이다.

점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로 점 A의 x 좌표를 a 라고 하면

$$2^a - 1 = 8$$

$$\therefore a = \log_2 9$$

STEP2 양수 a 의 값 구하기

이때 점 A($\log_2 9$, 8)은 곡선 $y=2^{-x} + \frac{a}{9}$ 위의 점이므로

$$8 = 2^{-\log_2 9} + \frac{a}{9}, \quad 8 = \frac{1}{9} + \frac{a}{9}$$

$$\therefore a = 71$$

발전유형 04

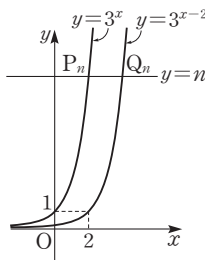
87쪽

04-1 ㉮ (1) 18 (2) 16

해결전략 | 두 함수 $y=3^x$, $y=3^{x-2}$ 의 그래프는 한 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 일치한다.

$y=3^{x-2}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

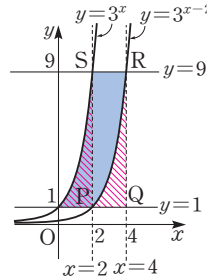
(1) 두 함수 $y=3^x$, $y=3^{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} = \overline{P_3Q_3} = \dots = \overline{P_9Q_9} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \dots + \overline{P_9Q_9} = 9 \times 2 = 18$$

- (2) 함수 $y=3^x$ 의 그래프와 두 직선 $x=2$, $y=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=3^{x-2}$ 의 그래프와 두 직선 $x=4$, $y=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



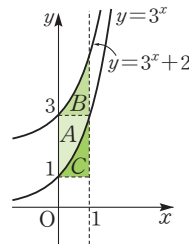
따라서 두 함수 $y=3^x$, $y=3^{x-2}$ 의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 위의 그림에서 직사각형 PQRS의 넓이와 같다.

직사각형 PQRS의 넓이는 $(4-2) \times (9-1) = 16$ 이므로 구하는 넓이는 16이다.

04-2 ㉮ 2

해결전략 | 두 함수 $y=3^x$, $y=3^x+2$ 의 그래프는 한 그래프를 y 축의 방향으로 평행이동하면 일치한다.

다음 그림에서 두 함수 $y=3^x$, $y=3^x+2$ 의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $A+B$ 이다.



이때 $y=3^x+2$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그림에서 B와 C의 넓이가 같다.

따라서 $A+B=A+C$ 이므로 구하는 넓이는 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같으므로 $1 \times 2 = 2$ 이다.

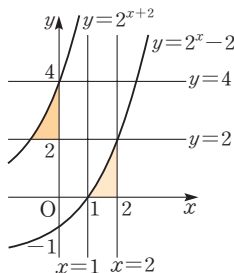
04-3 ㉮ 6

해결전략 | 두 함수 $y=2^{x+2}$, $y=2^x-2$ 의 그래프는 한 그래프를 평행이동하면 일치한다.

STEP1 색칠한 부분과 넓이가 같은 부분 찾기

$y=2^{x+2}$ 의 그래프는 $y=2^x-2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

로 -2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 함수 $y=2^{x+2}$ 의 그래프와 y 축, 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=2^x-2$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



STEP2 넓이 구하기

따라서 S_1+S_2 의 값은 가로 길이가 1, 세로 길이가 2인 직사각형 3개의 넓이와 같다.

$$\therefore S_1+S_2=(1 \times 2) \times 3=6$$

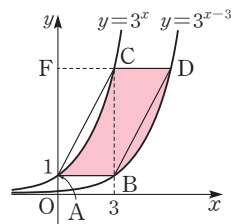
▶참고 $S_1=2 \times 2=4$, $S_2=2 \times 1=2$ 임을 이용할 수 있다.

04-4 ㉮ 78

해결전략 점 D의 좌표를 구하고, 색칠한 부분의 일부를 이동시켜 넓이를 구한다.

STEP1 색칠한 부분과 넓이가 같은 부분 찾기

$y=3^{x-3}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형의 넓이는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같고, 평행사변형 ABDC의 넓이는 직사각형 ABCF의 넓이와 같다.



STEP2 점 B, C의 좌표 구하기

한편, 점 B와 C의 좌표를 구하면

$$y=3^{x-3} \text{에서 } y=1 \text{ 일 때, } 1=3^{x-3} \quad \therefore x=3$$

$$\therefore B(3, 1)$$

점 B와 점 C는 x 좌표가 같으므로

$$y=3^x \text{에서 } x=3 \text{ 일 때, } y=3^3=27$$

$$\therefore C(3, 27)$$

STEP3 넓이 구하기

따라서 직사각형 ABCF의 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 3 \times (27-1) = 78$$

필수유형 05

89쪽

05-1 ㉮ (1) $B < C < A$ (2) $B < C < A$

해결전략 밑을 통일한 후 (밑) > 1이면 지수가 클수록 큰 수이고, $0 < (\text{밑}) < 1$ 이면 지수가 클수록 작은 수이다.

(1) STEP1 밑을 $\frac{2}{3}$ 로 나타내기

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}, B = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{5}{4}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right\}^{-\frac{5}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{4}},$$

$$C = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$$

STEP2 지수함수의 성질을 이용하여 대소 비교하기

이때 $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{4}$ 이고, 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \quad \therefore B < C < A$$

(2) STEP1 밑을 3으로 나타내기

$$A = 9^{\frac{4}{3}} = (3^2)^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{8}{3}}$$

$$B = \sqrt[4]{27^3} = (3^3)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{4}}$$

$$C = \left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{1}{2}} = (3^{-5})^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$$

STEP2 지수함수의 성질을 이용하여 대소 비교하기

이때 $\frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{8}{3}$ 이고, 함수 $y = 3^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$3^{\frac{9}{4}} < 3^{\frac{5}{2}} < 3^{\frac{8}{3}} \quad \therefore B < C < A$$

05-2 ㉮ ④

해결전략 밑을 통일한 후 (밑) > 1이면 지수가 클수록 큰 수이고, $0 < (\text{밑}) < 1$ 이면 지수가 클수록 작은 수이다.

$$\textcircled{1} 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \text{이고 밑 } 3 \text{이 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$3^{\frac{2}{3}} > 3^{\frac{1}{2}} \quad \therefore 9^{\frac{1}{3}} > \sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}, 16^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} \text{이고 밑 } 2 \text{가 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2^{\frac{3}{5}} > 2^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \sqrt[5]{8} > 16^{\frac{1}{8}}$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \frac{1}{3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \text{이고 밑 } \frac{1}{3} \text{이}$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \therefore \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}}$$

$$\textcircled{4} \sqrt{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \text{이고 밑 } 3 \text{이 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$3^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \sqrt{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

⑤ $(0.5)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$ 이고 밑 2가 $2 > 1$ 이므로
 $2^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{3}} \quad \therefore (0.5)^{-\frac{1}{2}} > (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$
 따라서 대소 관계가 옳은 것은 ④이다.

05-3 ㉡ $C < B < A$

해결전략 | 지수함수에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다는 성질을 이용하여 크기를 비교한다.

STEP 1 지수의 대소 비교하기

$$A = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$B = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n+2}}$$

$$C = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+2}{n+3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n+3}}$$

n 이 자연수일 때, $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3}$ 이므로

$$1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{1}{n+3}$$

$$\therefore \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+3}$$

STEP 2 지수함수의 성질을 이용하여 대소 비교하기

함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\text{로 } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+2}{n+3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\therefore C < B < A$$

05-4 ㉡ A

해결전략 | 지수함수에서 $(\text{밑}) > 1$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다는 성질을 이용하여 크기를 비교한다.

STEP 1 지수의 대소 비교하기

$$0 < a < 1 \text{ 일 때 } a^4 < a^3 < a^2 < a$$

STEP 2 지수함수의 성질을 이용하여 대소 비교하기

함수 $y = 3^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$3^{a^4} < 3^{a^3} < 3^{a^2} < 3^a$$

$$\therefore D < C < B < A$$

따라서 가장 큰 수는 A이다.

05-5 ㉡ ②

해결전략 | 지수함수에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다는 성질을 이용하여 크기를 비교한다.

$0 < a < 1$ 일 때, 함수 $y = a^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

$$0 < a \text{ 이므로 } a^0 > a^a$$

$$\therefore 1 > a^a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a^1 < a^{a^a}$$

$$\therefore a < a^{a^a} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\text{또, } a < 1 \text{ 이므로 } a^a > a^1$$

$$\therefore a^a > a \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } a^{a^a} < a^a \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉣}$ 에 의하여 a, a^a, a^{a^a} 의 대소 관계는

$$a < a^{a^a} < a^a$$

05-6 ㉡ ㄱ, ㄷ

해결전략 | $(\text{밑}) > 1$ 일 때는 밑이 클수록 그래프가 y 축에 더 가깝다는 사실을 이용하여 밑이 다른 두 수의 크기를 비교한다.

STEP 1 참, 거짓 판단하기

$$\text{ㄱ. } a > 1 \text{ 이고 } a < b \text{ 이므로 } a^a < a^b \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } a = 2, b = 5 \text{ 라고 하면 } 2^5 > 5^2 \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄷ. } b > 1 \text{ 이고 } a < b \text{ 이므로 } b^a < b^b$$

a^b 과 b^b 은 지수가 같고 $a < b$ 이므로 $a^b < b^b$

$$a^a < a^b \text{ 이므로 } a^a < a^b < b^b$$

따라서 가장 큰 수는 b^b 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

▶참고 문자로 주어진 대소 비교는 조건을 만족시키는 수를 대입하여 그 크기를 비교해도 된다.

$$1 < a < b \text{ 이므로 } a = 2, b = 3 \text{ 으로 놓으면}$$

$$a^a, a^b, b^a, b^b \Rightarrow 2^2, 2^3, 3^2, 3^3$$

이로부터 가장 큰 수는 b^b 임을 알 수 있다.

필수유형 06

91쪽

06-1 ㉡ (1) 최댓값: 23, 최솟값: -1

$$(2) \text{ 최댓값: } 2, \text{ 최솟값: } -\frac{7}{4}$$

$$(3) \text{ 최댓값: } \frac{4}{27}, \text{ 최솟값: } \frac{1}{12}$$

해결전략 | $(\text{밑}) > 1$ 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최소, x 가 최대일 때 최대가 되고, $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최대, x 가 최대일 때 최소가 된다.

(1) **STEP 1** 주어진 함수가 증가하는 함수임을 알기

$y = 5^{x-1} - 2$ 에서 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

STEP 2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

$$1 \leq x \leq 3 \text{ 에서 함수 } y = 5^{x-1} - 2 \text{ 는}$$

$$x = 3 \text{ 일 때 최대이고, 최댓값은}$$

$$5^{3-1} - 2 = 25 - 2 = 23$$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$5^{1-1}-2=1-2=-1$$

(2) **STEP1** 주어진 함수가 감소하는 함수임을 알기

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0<\frac{1}{2}<1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

$$-3\leq x\leq 1\text{에서 함수 } y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2\text{는}$$

$x=-3$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+1}-2=2^2-2=2$$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$$

(3) **STEP1** 주어진 함수가 감소하는 함수임을 알기

$$y=3^{x-2}\times 2^{-2x}=3^x\times 3^{-2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^x\text{에서 밑}$$

이 $\frac{3}{4}$ 이고 $0<\frac{3}{4}<1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

$$-1\leq x\leq 1\text{에서 함수 } y=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^x\text{은}$$

$x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\frac{1}{9}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{27}$$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$$

06-2 ㉔ 2

해결전략 | 지수함수에서 (밑) >1 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최소, x 가 최대일 때 최대이다.

STEP1 최소가 되는 경우 알기

$f(x)=2^{x+1}+k$ 라고 하면 밑이 2이고 $2>1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $-2\leq x\leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최소이고 최솟값은 $f(-2)$ 이다.

STEP2 k 의 값 구하기

$$f(-2)=2^{-1}+k=\frac{1}{2}+k=\frac{5}{2}$$

$$\therefore k=2$$

06-3 ㉔ 21

해결전략 | 지수함수에서 $0<(\text{밑})<1$ 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최대, x 가 최대일 때 최소이다.

STEP1 a 의 값 구하기

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$ 은 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0<\frac{1}{3}<1$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $2\leq x\leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 27을 가지므로

$$f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4-a}=27$$

$$3^{a-4}=3^3 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7}$$

STEP2 m 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$m=f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{6-7}=3$$

STEP3 $a\times m$ 의 값 구하기

$$\therefore a\times m=7\times 3=21$$

06-4 ㉔ $\frac{65}{32}$

해결전략 | 밑의 범위를 나누어 각각의 경우의 최댓값을 구한다.

STEP1 $0<a<1$ 인 경우 a 의 값 구하기

$-1\leq x\leq 2$ 에서 함수 $f(x)=a^{2x+1}$ 의 최댓값은 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $0<a<1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 $f(-1)$ 을 가지므로

$$f(-1)=a^{-1}=32$$

$$\therefore a=\frac{1}{32}$$

STEP2 $a>1$ 인 경우 a 의 값 구하기

(ii) $a>1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $f(2)$ 를 가지므로

$$f(2)=a^5=32$$

$$\therefore a=2$$

STEP3 a 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 양수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{32}+2=\frac{65}{32}$$

06-5 ㉔ $\frac{7}{2}$

해결전략 | 지수함수에서 $0<(\text{밑})<1$ 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최대, x 가 최대일 때 최소이다.

STEP1 $f(-2), f(2)$ 의 값 알기

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) = a^x + b$ 로 놓으면 밑은 a 이고 $0 < a < 1$ 이므로 $f(-2)$ 가 최댓값, $f(2)$ 가 최솟값이다.

$$f(-2) = a^{-2} + b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = a^2 + b = \frac{13}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면 } a^{-2} - a^2 = \frac{15}{4}$$

$$a^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{t} - t = \frac{15}{4}, 4t^2 + 15t - 4 = 0$$

$$(4t-1)(t+4) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\text{이때 } a^2 > 0 \text{이므로 } a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because 0 < a < 1)$$

STEP3 b 의 값 구하기

$$a = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } \frac{1}{4} + b = \frac{13}{4}$$

$$\therefore b = 3$$

STEP4 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

06-6 $\textcircled{㉠} \frac{1}{4}$

해결전략 $|a| > 1, 0 < a < 1$ 인 경우로 나누어 최댓값을 구한다.

STEP1 지수의 최댓값과 최솟값 구하기

$f(x) = |x-2| + 2$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 3$ 에서

$$-2 \leq x-2 \leq 1, 0 \leq |x-2| \leq 2$$

$$\therefore 2 \leq |x-2| + 2 \leq 4, \text{ 즉 } 2 \leq f(x) \leq 4$$

STEP2 a 의 값 구하기

(i) $a > 1$ 일 때 $\rightarrow$ 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x) = 2$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} (\because a > 0)$$

그런데 $a = \frac{1}{4}$ 은 $a > 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때 $\rightarrow$ 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x) = 4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$a^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

이때 $a = \frac{1}{2}$ 은 $0 < a < 1$ 을 만족시킨다.

STEP3 최댓값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $a = \frac{1}{2}$ 이고, $f(x) = 2$ 일 때 최대이므로

$$\text{최댓값은 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

필수유형 07

07-1 $\textcircled{㉠} \frac{1}{4}$ (2) 243

해결전략 $|$ 지수를 $f(x)$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때 밑의 범위에 주의한다.

(1) STEP1 지수의 최솟값 구하기

$$y = 4^{x^2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-8} = 4^{x^2} \times 4^{-6x+8} = 4^{x^2-6x+8}$$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ 로 놓으면

$$f(x) = (x-3)^2 - 1$$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값 $f(3) = -1$ 을 갖는다.

STEP2 지수함수의 최솟값 구하기

함수 $y = 4^{f(x)}$ 은 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 도 최소이다.

따라서 $f(x) = -1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$4^{-1} = \frac{1}{4}$$

(2) STEP1 지수의 최솟값 구하기

$f(x) = x^2 + 4x - 1$ 로 놓으면

$$f(x) = (x+2)^2 - 5$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최솟값 $f(-2) = -5$ 를 갖는다.

STEP2 지수함수의 최댓값 구하기

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대이다.

따라서 $f(x) = -5$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 3^5 = 243$$

07-2 $\textcircled{㉠} (1) \text{ 최댓값: } 1, \text{ 최솟값: } \frac{1}{3}$

$$(2) \text{ 최댓값: } 125, \text{ 최솟값: } \frac{1}{5}$$

해결전략 $|$ 지수를 $f(x)$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때 밑의 범위에 주의한다.

(1) STEP1 지수의 최댓값과 최솟값 구하기

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$

$$f(1) = 0, f(2) = -1, f(3) = 0 \text{이므로}$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{에서 } -1 \leq f(x) \leq 0$$

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

함수 $y = 3^{f(x)}$ 은 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 도 최대, $f(x)$ 가 최소일 때 y 도 최소가 된다.

따라서 함수 $y=3^{f(x)}$ 은

$f(x)=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $3^0=1$

$f(x)=-1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $3^{-1}=\frac{1}{3}$

(2) STEP1 지수의 최댓값과 최솟값 구하기

$f(x)=-x^2+2x$ 로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+1$

$f(-1)=-3, f(1)=1, f(2)=0$ 이므로

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-3 \leq f(x) \leq 1$

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대, $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소가 된다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x)=-3$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=5^3=125$

$f(x)=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{1}{5}$

07-3 ▣ -1

해결전략 | 지수를 $f(x)$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다. $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우 y 의 값은 $f(x)$ 가 최소일 때 최대, $f(x)$ 가 최대일 때 최소이다.

STEP1 지수의 최댓값과 최솟값 구하기

$f(x)=-x^2+4x+k$ 로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+k+4$ 이므로 $-1 \leq x \leq 3$ 에서

$f(-1)=k-5, f(2)=k+4, f(3)=k+3$

STEP2 지수함수가 최대가 되는 경우 찾기

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대, $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소이다. 즉, $f(x)=k-5$ 일 때 y 는 최대이다.

STEP3 k 의 값 구하기

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 최댓값이 64이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=64, 2^{-k+5}=2^6$$

$$-k+5=6 \quad \therefore k=-1$$

07-4 ▣ $\frac{2}{3}$

해결전략 | 지수를 $f(x)$ 로 놓고 $f(x)$ 의 최댓값을 구한다. $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우 y 의 값은 $f(x)$ 가 최대일 때 최소이다.

STEP1 지수의 최댓값 구하기

$f(x)=-x^2+2x+3$ 으로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+4$

$\therefore f(x) \leq 4$

STEP2 지수함수가 최소가 되는 경우 찾기

함수 $y=a^{f(x)}$ 에서 밑 a 가 $0 < a < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소가 된다. 즉, $f(x)=4$ 일 때 y 는 최소이다.

STEP3 a 의 값 구하기

함수 $y=a^{f(x)}$ 의 최솟값이 $\frac{16}{81}$ 이므로

$$a^4=\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\therefore a=\frac{2}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

07-5 ▣ $\frac{17}{2}$

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우와 $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 최솟값을 찾아 a 의 값을 구한다.

STEP1 $f(x)$ 의 범위 구하기

$f(x)=x^2-4x+3$ 으로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2-1$

$f(1)=0, f(2)=-1, f(4)=3$ 이므로

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-1 \leq f(x) \leq 3$

STEP2 밑의 범위를 나누어 a 의 값 구하기

(i) $0 < a < 1$ 이면 $f(x)$ 가 최대일 때, 즉 $f(x)=3$ 일 때

함수 $y=a^{x^2-4x+3}$ 이 최솟값을 가지므로

$$a^3=\frac{1}{8} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

(ii) $a > 1$ 이면 $f(x)$ 가 최소일 때, 즉 $f(x)=-1$ 일 때

함수 $y=a^{x^2-4x+3}$ 이 최솟값을 가지므로

$$a^{-1}=\frac{1}{8} \quad \therefore a=8$$

STEP3 a 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{2}+8=\frac{17}{2}$$

07-6 ▣ 3

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우와 $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

STEP1 $f(x)$ 의 범위 구하기

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=a^{f(x)}=a^{x^2-6x+3}$

이고, $f(x)=(x-3)^2-6$

$f(1)=-2, f(3)=-6, f(4)=-5$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-6 \leq f(x) \leq -2$

STEP2 a의 값 구하기

(i) $0 < a < 1$ 이면 $f(x)$ 가 최소일 때, 즉 $f(x) = -6$ 일 때

$y = a^{x^2-6x+3}$ 이 최댓값을 가지므로

$$a^{-6} = 27 \quad \therefore a = (3^3)^{-\frac{1}{6}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 은 $0 < a < 1$ 을 만족시킨다.

(ii) $a > 1$ 이면 $f(x)$ 가 최대일 때, 즉 $f(x) = -2$ 일 때

$y = a^{x^2-6x+3}$ 이 최댓값을 가지므로

$$a^{-2} = 27 \quad \therefore a = (3^3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

그런데 $a = \frac{\sqrt{3}}{9}$ 은 $a > 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

STEP3 m의 값 구하기

$f(x)$ 가 최대일 때, 즉 $f(x) = -2$ 일 때 $y = a^{x^2-6x+3}$ 이 최소이므로 최솟값은

$0 < a < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 $a^{f(x)}$ 은 최솟값을 갖는다.

$$a^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3$$

$\therefore m = 3$

필수유형 08

95쪽

08-1 ㉠ (1) -2 (2) -10

해결전략 | $a^x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) **STEP1** $3^x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = -9^x + 2 \times 3^x - 3 = -(3^x)^2 + 2 \times 3^x - 3$$

$3^x = t$ 로 놓으면 $t > 0$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t - 3 = -(t-1)^2 - 2$$

따라서 $t > 0$ 에서 함수 $y = -(t-1)^2 - 2$ 는

$t = 1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 -2 이다.

(2) **STEP1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 6 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^x + 6$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ 로 놓으면 $t > 0$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 8t + 6 = (t-4)^2 - 10$$

따라서 $t > 0$ 에서 함수 $y = (t-4)^2 - 10$ 은 $t = 4$ 일 때 최소이고, 최솟값은 -10 이다.

08-2 ㉠ (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 63, 최솟값: -1

해결전략 | $a^x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) **STEP1** $2^x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = 2^{x+2} - 4^x - 2 = 2^2 \times 2^x - (2^2)^x - 2$$

$$= 4 \times 2^x - (2^x)^2 - 2$$

$$2^x = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x \leq 2 \text{에서 } 2^0 \leq 2^x \leq 2^2$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 4$$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값과 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = 4t - t^2 - 2 = -(t-2)^2 + 2$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = -(t-2)^2 + 2$ 는

$t = 2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 2

$t = 4$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $-(4-2)^2 + 2 = -2$

(2) **STEP1** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = 9^{-x} - 2 \times 3^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \text{로 놓으면 } -2 \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값과 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$$

따라서 $\frac{1}{3} \leq t \leq 9$ 에서 함수 $y = (t-1)^2 - 1$ 은

$t = 9$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $(9-1)^2 - 1 = 63$

$t = 1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $(1-1)^2 - 1 = -1$

08-3 ㉠ 8

해결전략 | $3^x = t$ 로 치환한 다음 이차함수의 최솟값을 이용하여 k 의 값을 구한다.

STEP 1 $3^x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y=9^x-6 \times 3^x+k=(3^x)^2-6 \times 3^x+k$$

$3^x=t$ 로 놓으면 $x \leq 0$ 이므로 $0 < t \leq 1$

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+k=(t-3)^2+k-9$$

따라서 $0 < t \leq 1$ 에서 함수 $y=(t-3)^2+k-9$ 는 $t=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $k-5$ 이다.

STEP 3 k 의 값 구하기

주어진 함수의 최솟값이 3이므로

$$k-5=3 \text{에서 } k=8$$

08-4 ㉠ -2

해결전략 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ 로 치환한 다음 이차함수의 최솟값을 이용하여 k 의 값을 구한다.

STEP 1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{9}\right)^x + k\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2 = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x + 3k \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 \\ &= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 3k \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ 로 놓으면 $t > 0$

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+3kt+2=\left(t+\frac{3}{2}k\right)^2-\frac{9}{4}k^2+2$$

$t > 0$ 에서 함수 $y=\left(t+\frac{3}{2}k\right)^2-\frac{9}{4}k^2+2$ 는

$t=-\frac{3}{2}k$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $-\frac{9}{4}k^2+2$ 이다.

STEP 3 k 의 값 구하기

주어진 함수의 최솟값이 -7 이므로

$$-\frac{9}{4}k^2+2=-7, \frac{9}{4}k^2=9$$

$$k^2=4$$

$$\therefore k=-2 \quad (\because k < 0)$$

08-5 ㉠ 1

해결전략 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ 로 치환한 다음 t 의 값의 범위에서의 이차함수의 최솟값을 구한다.

STEP 1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^x+b$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ 로 놓으면 $t > 0$

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=A \quad (A > 0)$ 라고 하면 주어진 함수는

$$y=t^2-At+b=\left(t-\frac{A}{2}\right)^2+b-\frac{A^2}{4}$$

$t > 0$ 에서 함수 $y=\left(t-\frac{A}{2}\right)^2+b-\frac{A^2}{4}$ 은 $t=\frac{A}{2}$ 일 때

최소이고 최솟값은 $b-\frac{A^2}{4}$ 이다.

STEP 3 a, b 의 값 구하기

주어진 함수가 $x=-1$, 즉 $t=2$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$2=\frac{A}{2} \quad \therefore A=4$$

$$A=\left(\frac{1}{2}\right)^a=4 \text{이므로 } a=-2$$

또, $b-\frac{A^2}{4}=-1$ 에 $A=4$ 를 대입하면

$$b-4=-1 \text{이므로 } b=3$$

$$\therefore a+b=-2+3=1$$

08-6 ㉠ 60

해결전략 주어진 식을 변형하여 공통 부분을 t 로 치환한다.

STEP 1 주어진 함수식 변형하기

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-2 \times 3^x-9^x}{9^x} \\ &= 3^{-2x}-2 \times 3^{-x}-1 \\ &= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x-2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x-1 \end{aligned}$$

STEP 2 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ 로 놓으면 $-2 \leq x \leq 3$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore \frac{1}{27} \leq t \leq 9$$

STEP 3 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 M, m 의 값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$$

따라서 $\frac{1}{27} \leq t \leq 9$ 에서 함수 $y=(t-1)^2-2$ 는

$t=9$ 일 때 최대이므로 $M=62$

$t=1$ 일 때 최소이므로 $m=-2$

$$\therefore M+m=62+(-2)=60$$

09-1 ㉔ (1) 8 (2) -4

해결전략 | 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $2^{2+x} > 0$, $2^{2-x} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2+x} + 2^{2-x} \geq 2\sqrt{2^{2+x} \times 2^{2-x}} = 2\sqrt{2^4} = 8$$

(단, 등호는 $2^{2+x} = 2^{2-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 $y = 2^{2+x} + 2^{2-x}$ 의 최솟값은 8이다.

(2) STEP1 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 모든 실수 x 에 대하여 $2^x > 0$,

$2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 t 의 값의 범위는 $t \geq 2$ 이다.

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

$$y = 2(4^x + 4^{-x}) - 4(2^x + 2^{-x}) \text{에서}$$

$$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = 2(t^2 - 2) - 4t = 2t^2 - 4t - 4 = 2(t-1)^2 - 6$$

따라서 $t=2$ 일 때 함수 $y = 2(t-1)^2 - 6$ 은 최소이고 최솟값은 -4이다.

09-2 ㉔ (1) 16 (2) 11

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$$(1) y = 4^x + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 4^x + 4^{-x+3}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $4^x > 0$, $4^{-x+3} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4^x + 4^{-x+3} \geq 2\sqrt{4^x \times 4^{-x+3}} = 2\sqrt{4^3} = 2\sqrt{2^6} = 16$$

(단, 등호는 $4^x = 4^{-x+3}$, 즉 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y = 4^x + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$ 의 최솟값은 16이다.

$$(2) y = \frac{5^{2x} + 5^x + 25}{5^x} = 5^x + 1 + \frac{25}{5^x} = 5^x + 5^{2-x} + 1$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $5^x > 0$, $5^{2-x} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^x + 5^{2-x} + 1 \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{2-x}} + 1 = 10 + 1 = 11$$

(단, 등호는 $5^x = 5^{2-x}$, 즉 $x=1$ 일 때 성립한다.)

따라서 함수 $y = \frac{5^{2x} + 5^x + 25}{5^x}$ 의 최솟값은 11이다.

09-3 ㉔ 25

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 a 의 값 구하기

$$y = 4 \times 3^x + \frac{36}{3^x} = 4\left(3^x + \frac{9}{3^x}\right)$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $3^x > 0$, $\frac{9}{3^x} > 0$ 이므로 산술평

균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4\left(3^x + \frac{9}{3^x}\right) \geq 4 \times 2\sqrt{3^x \times \frac{9}{3^x}} = 4 \times 2\sqrt{9} = 24$$

등호가 성립할 때 y 의 값이 최소이므로

$$3^x = \frac{9}{3^x}, (3^x)^2 = 9, 3^x = 3 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore a = 1$$

STEP2 b 의 값 구하기

즉, 주어진 함수는 $x=1$ 에서 최솟값 24를 갖는다.

$$\therefore b = 24$$

STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b = 1+24 = 25$$

09-4 ㉔ 2

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 주어진 함수가 최소가 되는 경우 알기

$$y = 7^{x+a} + \left(\frac{1}{7}\right)^{x-a} = 7^{x+a} + 7^{a-x}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $7^{x+a} > 0$, $7^{a-x} > 0$ 이므로 산

술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$7^{x+a} + 7^{a-x} \geq 2\sqrt{7^{x+a} \times 7^{a-x}} = 2\sqrt{7^{2a}} = 2 \times 7^a$$

(단, 등호는 $7^{x+a} = 7^{a-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

STEP2 a 의 값 구하기

따라서 함수 $y = 7^{x+a} + \left(\frac{1}{7}\right)^{x-a}$ 의 최솟값은 2×7^a 이고,

이 값이 98이므로

$$2 \times 7^a = 98, 7^a = 49$$

$$\therefore a = 2$$

09-5 ㉔ 10

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 모든 실수 x 에 대하여 $2^x > 0$,

$2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 t 의 값의 범위는 $t \geq 2$ 이다.

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

$$y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + k \text{에서}$$

$$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 - 2t + k = (t-1)^2 + k - 3$$

따라서 $t=2$ 일 때 함수 $y = (t-1)^2 + k - 3$ 은 최소이고,

최솟값은 $k-2$

STEP 3 k 의 값 구하기

이때 주어진 조건에서 최솟값이 8이므로

$$k-2=8 \quad \therefore k=10$$

09-6 ㉡ 8

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 주어진 식 변형하기

$$2x + 3y = 4 \text{에서}$$

$$3y = -2x + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$4^x + 8^y = 2^{2x} + 2^{3y} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 2^{2x} + 2^{3y} = 2^{2x} + 2^{-2x+4}$$

STEP 2 최솟값 구하기

모든 실수 x 에 대하여 $2^{2x} > 0$, $2^{-2x+4} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2x} + 2^{-2x+4} \geq 2\sqrt{2^{2x} \times 2^{-2x+4}} = 8$$

(단, 등호는 $2^{2x} = 2^{-2x+4}$, 즉 $x=1$ 일 때 성립한다.)

따라서 $4^x + 8^y$ 의 최솟값은 8이다. $\rightarrow 2^{2x} = 2^{-2x+4}$ 에서
 $2x = -2x + 4, 4x = 4$
 $\therefore x = 1$

실전 연습 문제

98~100쪽

01 ②	02 ⑤	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 2	07 ⑤	08 5	09 ①	10 ④
11 ③	12 1	13 ②	14 ④	15 ④
16 ②	17 3			

01

해결전략 | 지수함수에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 증가하기 위한 밑의 조건을 식으로 나타낸다.

STEP 1 a 에 대한 부등식 나타내기

$f(x) = (3a^2 - 2a)^x$ 이 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족시키는 것은 $f(x)$ 가 증가하는 함수임을 나타낸다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 밑 $3a^2 - 2a$ 가 1보다 커야 하므로

$$3a^2 - 2a > 1$$

STEP 2 부등식의 해 구하기

$$3a^2 - 2a - 1 > 0, (3a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a > 1$$

STEP 3 자연수 a 의 최솟값 구하기

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 2이다.

02

해결전략 | 주어진 지수함수의 그래프를 이용하여 함수의 밑의 범위를 파악한다.

STEP 1 a, b 의 값의 범위를 구하여 a, b 의 대소 비교하기

두 함수 $y = a^x, y = b^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $a > 1, b > 1$

이때 밑이 1보다 큰 지수함수의 그래프는 $x > 0$ 에서 밑이 커질수록 y 축에 가까워지므로

$$b > a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 b, c 의 값의 범위를 구하여 b, c 의 대소 비교하기

두 함수 $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x, y = \left(\frac{1}{c}\right)^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$0 < \frac{1}{b} < 1, 0 < \frac{1}{c} < 1$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작은 지수함수의 그래프는 $x < 0$ 에서 밑이 작을수록 y 축에 가까워지므로

$$0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < 1$$

$$\therefore c > b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP 3 a, b, c 의 대소 비교하기

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $c > b > a$

03

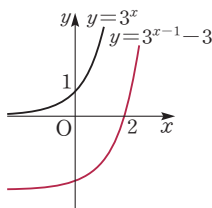
해결전략 | 주어진 함수식을 $y = 3^{x-m} + n$ 꼴로 정리한 후 함수의 그래프를 그려 보기의 참, 거짓을 파악한다.

STEP 1 함수 $y = \frac{1}{9} \times 3^{x+1} - 3$ 의 그래프 그리기

$$y = \frac{1}{9} \times 3^{x+1} - 3 = 3^{-2} \times 3^{x+1} - 3 = 3^{x-1} - 3$$

$\therefore y = 3^{x-1} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이

동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프는 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다. (거짓)

STEP2 함수 $y = -\frac{1}{3} \times 3^{-x} + 3$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 식 구하기

ㄴ. $y = -\frac{1}{3} \times 3^{-x} + 3$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\frac{1}{3} \times 3^{-(-x)} + 3$$

$$y = \frac{1}{3} \times 3^x - 3 \quad \therefore y = 3^{x-1} - 3 \text{ (참)}$$

STEP3 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 평행이동한 식 구하기

ㄷ. $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - (-3) = 3^{x-1} \quad \therefore y = 3^{x-1} - 3 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04

해결전략 | 대칭이동과 평행이동을 한 그래프의 식에 주어진 점의 좌표를 대입한다.

STEP1 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = a^{-x}$

$y = a^{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = a^{-(x-3)} + 2$$

$$\therefore y = a^{-x+3} + 2$$

STEP2 a 의 값 구하기

이 함수의 그래프가 점 (1, 4)를 지나므로

$$4 = a^{-1+3} + 2, \quad a^2 = 2$$

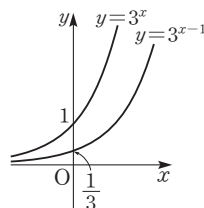
$$\therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

05

해결전략 | 평행이동과 대칭이동을 이용하여 주어진 함수의 그래프를 그린다.

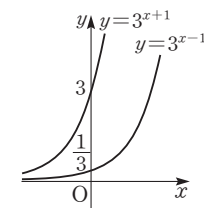
STEP1 함수 $y = 3^{x-1}$ 의 그래프 그리기

함수 $y = 3^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



STEP2 각 보기의 함수의 그래프를 그려 만나는지 파악하기

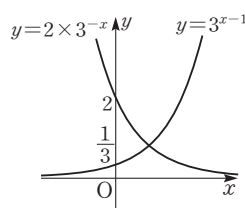
ㄱ. 함수 $y = 3^{x+1}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y = 3^{x-1}$,

$y = 3^{x+1}$ 의 그래프는 서로 만나지 않는다.

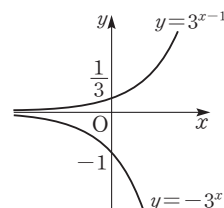
ㄴ. 함수 $y = 2 \times 3^{-x}$ 의 그래프 또는 $y = 2 \times 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y = 3^{x-1}$,

$y = 2 \times 3^{-x}$ 의 그래프는 만난다.

ㄷ. 함수 $y = -3^x$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

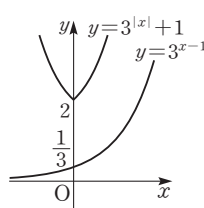


따라서 두 함수 $y = 3^{x-1}$,

$y = -3^x$ 의 그래프는 서로 만나지 않는다.

$$\text{ㄹ. } y = 3^{|x|} = \begin{cases} 3^x & (x \geq 0) \\ 3^{-x} & (x < 0) \end{cases} \text{이고}$$

함수 $y = 3^{|x|} + 1$ 의 그래프는 $y = 3^{|x|}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y = 3^{x-1}$,

$y = 3^{|x|} + 1$ 의 그래프는 서로 만나지 않는다.

STEP3 만나지 않는 그래프 고르기

따라서 함수 $y = 3^{x-1}$ 의 그래프와 만나지 않는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

06

해결전략 | 그래프의 점근선과 지나는 점을 이용한다.

STEP1 $y=2^{a-x}+b$ 의 그래프 개형 파악하기

$$y=2^{a-x}+b=2^{-(x-a)}+b=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+b$$

이므로 $y=2^{a-x}+b$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다. ①

STEP2 그래프의 점근선 이용하기

이때 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이므로 $y=2^{a-x}+b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$ 이다.
 $\therefore b=2$ → 문제의 그림에서 점근선이 직선 $y=2$ 이므로 $b=2$ ②

STEP3 지나는 점의 좌표 이용하기

또, $y=2^{a-x}+2$ 의 그래프가 점 $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$4=2^{a+1}+2, 2^{a+1}=2$$

$$a+1=1 \quad \therefore a=0$$

STEP4 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b=0+2=2$$

채점 요소	배점
① 어떤 지수함수의 그래프를 평행이동한 것인지 유추하기	20 %
② b 의 값 구하기	30 %
③ a 의 값 구하기	30 %
④ $a+b$ 의 값 구하기	20 %

07

해결전략 | 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한 다음 주어진 길이의 비를 이용하여 점 Q의 좌표를 구한다.

STEP1 점 P의 좌표 구하기

두 함수 $f(x)=a^{-x}$ 과 $h(x)=a^x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 서로 대칭이므로 $h(2)=2$ 이면 $f(-2)=2$

즉, R(2, 2)이고 P(-2, 2)

STEP2 점 Q의 x 좌표 구하기

점 Q의 x 좌표를 p 라고 하면 $\overline{PQ}=p+2$, $\overline{QR}=2-p$ 이고 $\overline{PQ} : \overline{QR}=2 : 1$ 이므로

$$(p+2) : (2-p)=2 : 1$$

$$4-2p=p+2$$

$$3p=2 \quad \therefore p=\frac{2}{3}$$

STEP3 $g(4)$ 의 값 구하기

따라서 $Q\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ 이고 점 Q는 함수 $g(x)=b^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b^{\frac{2}{3}}=2 \quad \therefore b=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore g(4)=b^4=(2^{\frac{3}{2}})^4=2^6=64$$

08

해결전략 | 점 A의 x 좌표 a 를 이용하여 B, C의 좌표를 구한다.

STEP1 두 점 B, C의 좌표를 a 를 사용하여 나타내기

함수 $y=2^{x-a}$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 $a>0$ 이다.

점 A의 좌표는 $(a, 0)$ 이므로 점 B의 x 좌표는 a 이고 y 좌표는 2^a 이므로 점 B의 좌표는 $(a, 2^a)$

점 C의 y 좌표는 2^a 이고 x 좌표는 $2^{x-a}=2^a$ 에서 $x=2a$ 이므로 점 C의 좌표는 $(2a, 2^a)$ → 점 C는 함수 $y=2^{x-a}$ 의 그래프 위의 점이다.

STEP2 직사각형의 넓이를 이용하여 a 의 값 구하기

이때 $\overline{AB}=2^a$, $\overline{BC}=2a-a=a$ 이므로

직사각형 ABCD의 넓이는 $a \times 2^a = 160$

따라서 $160=5 \times 2^5$ 이므로

$$a=5$$

09

해결전략 | 점 A의 x 좌표를 k 로 놓고 조건을 이용하여 k 의 값을 구한다.

STEP1 삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기

y 축과 평행한 한 직선을 $x=k$ (k 는 실수)라 하고, 직선 $x=k$ 와 x 축이 만나는 점을 C라고 하자.

$A(k, 2^k)$, $B(k, -4^{k-2})$, $C(k, 0)$ 이고 삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 에서

$$2^k=4^{k-2}, 2^k=2^{2k-4}$$

$$k=2k-4 \quad \therefore k=4$$

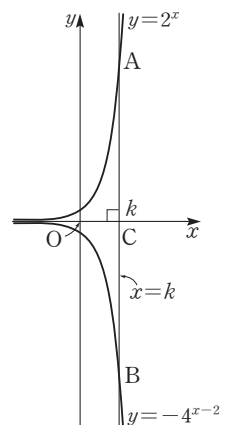
$$\therefore \overline{OC}=4,$$

$$\overline{AB}=2\overline{AC}=2 \times 16=32$$

STEP2 삼각형 AOB의 넓이 구하기

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times 32 \times 4 = 64$$



10

해결전략 | 지수함수에서 (밑)>1이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가한다는 성질을 이용하여 크기를 비교한다.

STEP1 밑을 2로 나타내기

$$A = 0.5^{-\frac{7}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{8}} = (2^{-1})^{-\frac{7}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$$

$$B = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$C = 0.25^{-\frac{3}{8}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{8}} = (2^{-2})^{-\frac{3}{8}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

STEP2 지수함수의 성질을 이용하여 대소 비교하기

이때 $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ 이고, 함수 $y = 2^x$ 은 x 의 값이 증가하면

y 의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{7}{8}} \quad \therefore B < C < A$$

11

해결전략 | 지수함수에서 (밑)>1인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최소, x 가 최대일 때 최대가 되고, $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우 y 의 값은 x 가 최소일 때 최대, x 가 최대일 때 최소가 된다.

STEP1 α 의 값 구하기

$f(x) = 3^x$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $3^2=9$ 이다.
 $\therefore \alpha=9$

STEP2 β 의 값 구하기

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값은 감소한다.

함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \text{이다.} \quad \therefore \beta=2$$

STEP3 $\alpha\beta$ 의 값 구하기

$$\therefore \alpha\beta = 9 \times 2 = 18$$

12

해결전략 | (밑)>1인 경우와 $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우로 나누어 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP1 $0 < a < 1$ 일 때 a 의 값 구하기

(i) $0 < a < 1$ 일 때 $\rightarrow$ x 의 값이 최소일 때 $f(x)$ 의 값은 최대
 x 의 값이 최대일 때 $f(x)$ 의 값은 최소
 최댓값은 $f(-2)$, 최솟값은 $f(3)$ 이므로

$$f(-2) = 27f(3) \text{에서 } a^{-2} = 27a^3$$

$$a^5 = \frac{1}{27} \quad \therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 $a > 1$ 일 때 a 의 값 구하기

(ii) $a > 1$ 일 때 $\rightarrow$ x 의 값이 최소일 때 $f(x)$ 의 값도 최소
 x 의 값이 최대일 때 $f(x)$ 의 값도 최대
 최댓값은 $f(3)$, 최솟값은 $f(-2)$ 이므로
 $f(3) = 27f(-2)$ 에서 $a^3 = 27a^{-2}$

$$a^5 = 27 \quad \therefore a = 3^{\frac{3}{5}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

STEP3 조건을 만족시키는 a 의 값의 곱 구하기

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{3}{5}} = 3^0 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① $0 < a < 1$ 일 때 a 의 값 구하기	40 %
② $a > 1$ 일 때 a 의 값 구하기	40 %
③ a 의 값의 곱 구하기	20 %

13

해결전략 | 지수함수 $f(g(x))$ 의 밑이 1보다 크므로 $g(x)$ 가 최대일 때 $f(g(x))$ 도 최대가 된다.

STEP1 $f(g(x))$ 가 최댓값을 가질 때 $g(x)$ 의 값 구하기

$f(g(x)) = 3^{-x^2+2ax+1}$ 에서 $f(g(x))$ 의 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $g(x)$ 가 최대일 때, $f(g(x))$ 도 최댓값을 갖는다.

$$g(x) = -x^2 + 2ax + 1 = -(x-a)^2 + 1 + a^2$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $a^2 + 1$ 이다.

STEP2 α 의 값 구하기

이때 주어진 조건에서 최댓값이 9이므로

$$3^{a^2+1} = 9, \quad 3^{a^2+1} = 3^2$$

$$a^2 + 1 = 2, \quad a^2 = 1$$

$$a > 0 \text{이므로 } a=1$$

14

해결전략 | 지수를 $f(x)$ 로 놓고 $f(x)$ 의 값의 범위를 구한다.

$0 < (\text{밑}) < 1$ 경우 y 의 값은 $f(x)$ 가 최소일 때 최대이고,
 $f(x)$ 가 최대일 때 최소이다.

STEP1 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2 - 2x - 1$ 의 값의 범위 구하기

$y = a^{x^2-2x-1}$ 에서 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 로 놓으면

$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 2 \text{이므로}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } -2 \leq f(x) \leq 2$$

STEP2 α 의 값 구하기

$0 < a < 1$ 이므로 $f(x) = -2$ 일 때 y 는 최대이다.

이때 주어진 함수의 최댓값이 $\frac{4}{3}$ 이므로

$$a^{-2} = \frac{4}{3}, a^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

STEP 3 최솟값 구하기

따라서 주어진 함수는 $f(x)=2$ 일 때 y 가 최소이고, 이때 구하는 최솟값은

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

15

해결전략 $2^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP 1 $2^x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$\begin{aligned} y &= 4^x - 2^{x+2} + 5 = (2^x)^2 - 2^2 \times 2^x + 5 \\ &= (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 5 \end{aligned}$$

$$2^x=t \text{로 놓으면 } -2 \leq x \leq 2 \text{에서 } 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^2$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 4$$

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 M, m 의 값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1$$

$$\frac{1}{4} \leq t \leq 4 \text{에서 함수 } f(t) = t^2 - 4t + 5 \text{라고 하면}$$

$$t=2 \text{일 때 최소이고, 최솟값은 } f(2)=1$$

$$t=4 \text{일 때 최대이고, 최댓값은 } f(4)=5$$

STEP 3 $M-m$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } M=5, m=1 \text{이므로 } M-m=4$$

16

해결전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 주어진 함수의 최솟값 구하기

모든 실수 x 에 대하여 $4^{a+x} > 0, 4^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4^{a+x} + 4^{a-x} &\geq 2\sqrt{4^{a+x} \times 4^{a-x}} \\ &= 2\sqrt{4^{2a}} = 2\sqrt{(2^{2a})^2} = 2^{2a+1} \end{aligned}$$

STEP 2 a 의 값 구하기

이때 주어진 함수의 최솟값이 32이므로

$$2^{2a+1} = 32 = 2^5$$

$$2a+1=5 \quad \therefore a=2$$

17

해결전략 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 $5^x+5^{-x}=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$5^x+5^{-x}=t \text{로 놓으면 모든 실수 } x \text{에 대하여 } 5^x > 0,$$

$$5^{-x} > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$5^x+5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $5^x=5^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립한다.)

따라서 t 의 값의 범위는 $t \geq 2$ 이다. ①

STEP 2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최솟값 구하기

$$y = 25^x + 25^{-x} - 6(5^x + 5^{-x}) + 14 \text{에서}$$

$$25^x + 25^{-x} = (5^x)^2 + (5^{-x})^2 = (5^x + 5^{-x})^2 - 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 - 6t + 14 = t^2 - 6t + 12$$

$$= (t-3)^2 + 3 \quad \dots\dots ②$$

따라서 $t=3$ 일 때 함수 $y=(t-3)^2+3$ 은 최소이고, 최솟값은 3이다. ③

채점 요소	배점
① $5^x+5^{-x}=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	40 %
② 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내기	40 %
③ 최솟값 구하기	20 %

상위권 도약 문제

101~102쪽

01 27	02 ④	03 ①	04 9	05 68
06 5	07 9			

01

해결전략 점 B의 x 좌표를 k 로 놓고, 점 A의 좌표를 설정한 다음 y 좌표가 같음을 이용하여 k 의 값을 구한다.

STEP 1 점 B의 x 좌표 구하기

점 B의 x 좌표를 k 라고 하면 점 A의 x 좌표는 $k-2$ 이다.

$$\text{즉, } A(k-2, 2^{-k+2}), B(k, 4^k)$$

두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로

$$2^{-k+2} = 4^k, 2^{-k+2} = 2^{2k}$$

$$-k+2=2k \quad \therefore k=\frac{2}{3}$$

STEP 2 l 의 값 구하기

$$\text{따라서 } B\left(\frac{2}{3}, 4^{\frac{2}{3}}\right), C\left(\frac{2}{3}, 2^{-\frac{2}{3}}\right) \text{이므로}$$

$$l = 4^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}$$

STEP3 $4l^3$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore 4l^3 &= 4 \times \left(2^{\frac{4}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}\right)^3 \\ &= 4 \times \left\{2^4 - 3 \times 2^{\frac{8}{3} - \frac{2}{3}} + 3 \times 2^{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}} - 2^{-2}\right\} \\ &= 4 \times \left(16 - 12 + 3 - \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{27}{4} = 27\end{aligned}$$

02

해결전략 | 두 점 A, B의 좌표는 (x좌표)=(y좌표)임을 이용하여 구한다.

STEP1 두 점 A, B의 좌표 구하기

두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$A(\alpha, \alpha)$, $B(\beta, \beta)$ ($\alpha < \beta$)로 놓으면

$\overline{AC}=\alpha$, $\overline{BD}=\beta$, $\overline{CD}=\beta-\alpha$

이때 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=30 \quad \rightarrow \frac{1}{2} \times (\overline{AC}+\overline{BD}) \times \overline{CD}$$

$$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, $\overline{AB}=6\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=6\sqrt{2}$$

$$\therefore \beta-\alpha=6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\beta+\alpha=10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ③을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=8$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 (2, 2), (8, 8)이다.

STEP2 $a+b$ 의 값 구하기

두 점 A(2, 2), B(8, 8)은 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위의 점이므로

$$2^{2a+b}=2 \text{에서 } 2a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$2^{8a+b}=8 \text{에서 } 8a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{2}{3}$$

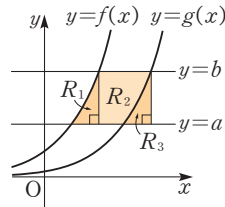
03

해결전략 | 두 함수 $f(x)$, $f(x-a)$ 에 대하여 함수

$y=f(x-a)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

STEP1 조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 찾기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 그림과 같이 세 영역을 R_1, R_2, R_3 이라 하고 각 영역의 넓이를 S_1, S_2, S_3 이라고 하면 $S_1=S_3$ 이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $y=a$, $y=b$ 로 둘러싸인 부분인 R_1, R_2 의 넓이의 합 S_1+S_2 는 두 영역 R_2, R_3 의 넓이의 합 S_2+S_3 과 같다.

한편, 두 영역 R_2, R_3 의 넓이의 합 S_2+S_3 은 이웃하는 두 변의 길이가 각각 2, $b-a$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로 조건 (가)에 의하여

$$2(b-a)=6, b-a=3$$

$$\therefore b=a+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 찾기

$f^{-1}(a)=k_1$ 이라고 하면 $f(k_1)=a$ 에서 $2^{k_1}=a$ 이므로

$$k_1=\log_2 a$$

$$\therefore f^{-1}(a)=\log_2 a$$

또, $g^{-1}(b)=k_2$ 라고 하면 $g(k_2)=b$ 에서 $2^{k_2-2}=b$ 이므로

$$k_2-2=\log_2 b \quad \therefore k_2=\log_2 b+2=\log_2 4b$$

$$\therefore g^{-1}(b)=\log_2 4b$$

따라서 조건 (나)의 $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$ 에 의하여

$$\log_2 4b-\log_2 a=\log_2 6 \text{에서}$$

$$\log_2 \frac{4b}{a}=\log_2 6, \frac{4b}{a}=6$$

$$\therefore b=\frac{3}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

①, ②을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

$$\therefore a+b=15$$

04

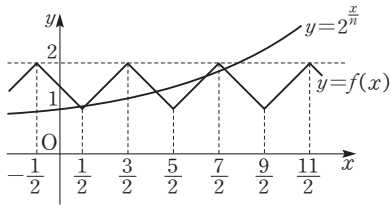
해결전략 | $y=f(x)$ 와 $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프의 개형을 그려 교점이 생기는 n 의 값을 유추한다.

STEP1 함수 $f(x)$ 파악하기

주어진 조건에서 $1 \leq f(x) \leq 2$ 이고 $f(x+2)=f(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 는 주기가 2인 함수이다.

STEP2 그래프 개형을 그려 교점의 개수 파악하기

$y=2^{\frac{x}{n}}$ 에서 $x < 0$ 일 때 $0 < y=2^{\frac{x}{n}} < 1$ 이므로 다음 그림과 같이 $x < 0$ 에서는 함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 교점이 생기지 않는다.



STEP 3 n 의 값의 범위 구하기

$x > 0$ 에서 $y = 2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 5이려면 $y = 2^{\frac{x}{n}}$ 의 값이 $x = \frac{7}{2}$ 일 때 2보다

작고, $x = \frac{11}{2}$ 일 때 2보다 커야 한다.

즉, $x = \frac{7}{2}$ 일 때 $2^{\frac{7}{2n}} < 2$ 에서 $n > \frac{7}{2}$, $x = \frac{11}{2}$ 일 때

$2^{\frac{11}{2n}} > 2$ 에서 $n < \frac{11}{2}$ 이므로 $\frac{7}{2} < n < \frac{11}{2}$ 이어야 한다.

STEP 4 정수 n 의 값의 합 구하기

따라서 $n = 4$ 또는 $n = 5$ 이므로 구하는 n 의 값의 합은 $4 + 5 = 9$

05

해결전략 | (밑) >1 인 경우 $f(x)$ 의 값은 x 가 최대일 때 최대이고, x 가 최소일 때 최소이다.

STEP 1 지수 식 정리하기

$y = |x+1| + |x| + |x-1|$ 로 놓으면

(i) $x < -1$ 일 때 $\rightarrow$ 절댓값 기호 안의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

$$y = -(x+1) - x - (x-1) = -3x$$

(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때

$$y = (x+1) - x - (x-1) = -x + 2$$

(iii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$y = (x+1) + x - (x-1) = x + 2$$

(iv) $x \geq 1$ 일 때

$$y = (x+1) + x + (x-1) = 3x$$

STEP 2 M, m 의 값 구하기

함수 $f(x) = 2^{|x+1| + |x| + |x-1|}$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $y = |x+1| + |x| + |x-1|$ 이 최대일 때, $f(x)$ 가 최대가 되고, $y = |x+1| + |x| + |x-1|$ 이 최소일 때, $f(x)$ 가 최소가 된다.

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $2 \leq y \leq 6$ 이므로

$$f(x) = 2^{|x+1| + |x| + |x-1|} \text{은}$$

$x = -2$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$f(-2) = 2^6 = 64 \quad \therefore M = 64$$

$x = 0$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(0) = 2^2 = 4 \quad \therefore m = 4$$

STEP 3 $M+m$ 의 값 구하기

$$\therefore M + m = 64 + 4 = 68$$

>참고 $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$ ($a < b < c$)의 최솟값은 $f(b)$ 이다.

06

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 식 정리하기

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + k$$

$$= 2^{-2x} + 2^{2x} - 2(2^x + 2^{-x}) + k$$

$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 - 2(2^x + 2^{-x}) + k$$

$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2(2^x + 2^{-x}) + k - 2$$

STEP 2 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 치환하기

$$2^x + 2^{-x} = t \text{로 놓으면 } y = t^2 - 2t + k - 2 = (t-1)^2 + k - 3$$

STEP 3 t 의 값의 범위 구하기

이때 모든 실수 x 에 대하여 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore t \geq 2$$

STEP 4 k 의 값 구하기

따라서 y 는 $t = 2$ 일 때, 최솟값 $k - 2$ 를 가지므로

$$k - 2 = 3 \quad \therefore k = 5$$

07

해결전략 | 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 주어진 식 변형하기

$$y = \frac{3^{x+3}}{3^{2x} + 3^x + 1} \text{에서 } y > 0 \text{이므로 } \frac{1}{y} \text{이 최소일 때, } y \text{는}$$

최대이다.

$$\frac{1}{y} = \frac{3^{2x} + 3^x + 1}{3^{x+3}} = \frac{1}{27} \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) + \frac{1}{27}$$

STEP 2 최솟값 구하기

이때 모든 실수 x 에 대하여 $3^x > 0$, $\frac{1}{3^x} > 0$ 이므로 산술

평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2\sqrt{3^x \times \frac{1}{3^x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = \frac{1}{3^x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{27} \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) + \frac{1}{27} \geq \frac{1}{27} \times 2 + \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$$

따라서 $\frac{1}{y}$ 의 최솟값은 $\frac{1}{9}$ 이므로 y 의 최댓값은 9이다.

01 답 (1) $y = \log_5 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

02 답 (1) 양의 실수, 실수 (2) < (3) >

03 답 (1) 풀이 참조, 정의역: $\{x | x < 0\}$,

점근선의 방정식: $x = 0$

(2) 풀이 참조, 정의역: $\{x | x > 1\}$,

점근선의 방정식: $x = 1$

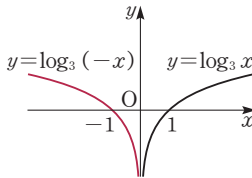
(3) 풀이 참조, 정의역: $\{x | x > 0\}$,

점근선의 방정식: $x = 0$

(4) 풀이 참조, 정의역: $\{x | x > 2\}$,

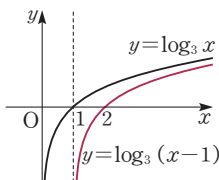
점근선의 방정식: $x = 2$

(1) $y = \log_3(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x < 0\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.

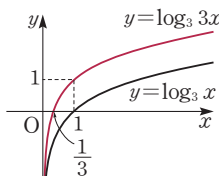
(2) $y = \log_3(x-1)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x > 1\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = 1$ 이다.

(3) $y = \log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$

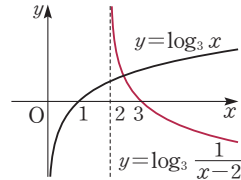
즉, $y = \log_3 3x$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x > 0\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.

$$(4) y = \log_3 \frac{1}{x-2} = \log_3 (x-2)^{-1} \\ = -\log_3 (x-2)$$

즉, $y = \log_3 \frac{1}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x > 2\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

04 답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: 2

(2) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(1) 함수 $y = \log_2 x$ 에서 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $4 \leq x \leq 64$ 에서 함수 $y = \log_2 x$ 는

$x = 64$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$y = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

$x = 4$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 는 밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 주

어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값이 감소한다.

따라서 $4 \leq x \leq 64$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 는

$x = 4$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$y = \log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$$

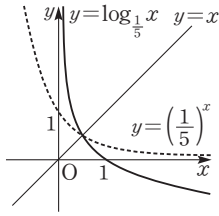
$x = 64$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$y = \log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{4^{-1}} 4^3 = -3$$

01-1 답 ①, ⑤

해결전략 | 로그함수의 그래프를 그려 옳지 않은 것을 찾는다.

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- ① 그래프의 점근선은 직선 $x=0$ 이다.
 - ② 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.
 - ③ x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 - ④ $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 역함수는 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 이므로 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 - ⑤ 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.
- 따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

01-2 답 ④

해결전략 먼저 로그함수의 식을 변형한다.

$$y = \log_{\frac{1}{a}} x = \log_{a^{-1}} x^{-1} = \log_a x \quad (a > 1)$$

- ① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
 - ② 그래프의 점근선은 y 축이다.
 - ③ 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.
 - ④ x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 - ⑤ $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ 은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
- 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

01-3 답 $a < 2$

해결전략 로그함수에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하면 밑이 1보다 커야 함을 이용한다.

함수 $y = \log_{5-2a} x$ 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면 밑이 1보다 커야 한다.

$$\text{즉, } 5-2a > 1 \text{ 이므로 } -2a > -4 \quad \therefore a < 2$$

01-4 답 $c < d < a < b$

해결전략 주어진 로그함수의 그래프를 이용하여 함수의 밑의 범위를 파악한다.

STEP1 a, b 의 값의 범위를 구하여 a, b 의 대소 비교하기

$y = \log_a x, y = \log_b x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$a > 1, b > 1$$

이때 밑이 1보다 큰 로그함수의 그래프는 $x > 1$ 에서는 밑이 커질수록 x 축에 가까워지므로

$$b > a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 c, d 의 값의 범위를 구하여 c, d 의 대소 비교하기

$y = \log_c x, y = \log_d x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값이 감소하므로

$$0 < c < 1, 0 < d < 1$$

이때 밑이 0보다 크고 1보다 작은 로그함수의 그래프는 $x > 1$ 에서는 밑이 작아질수록 x 축에 가까워지므로

$$0 < c < d < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 a, b, c, d 의 대소 비교하기

①, ②에서

$$c < d < a < b$$

01-5 답 ㄴ

해결전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 등식이 성립하는지 알아본다.

$$\neg. 3f(p) = 3\log_3 p = \log_3 p^3$$

$$f(3p) = \log_3 3p$$

$$\therefore 3f(p) \neq f(3p) \text{ (거짓)}$$

$$\neg. f(pq) = \log_3 pq$$

$$= \log_3 p + \log_3 q = f(p) + f(q) \text{ (참)}$$

$$\neg. f(p-q) = \log_3 (p-q)$$

$$f(p) - f(q) = \log_3 p - \log_3 q = \log_3 \frac{p}{q}$$

$$\therefore f(p-q) \neq f(p) - f(q) \text{ (거짓)}$$

$$\neg. f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = \log_3 p + \log_3 \frac{1}{p}$$

$$= \log_3 p - \log_3 p = 0 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

🔗 풀법의 비법

로그함수 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)에 대하여 다음 성질이 성립한다. (단, $p > 0, q > 0$)

$$(1) f(1) = 0, f(a) = 1$$

$$(2) f(pq) = f(p) + f(q)$$

$$(3) f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) - f(q)$$

$$(4) f(p^n) = nf(p) \text{ (단, } n \text{은 실수이다.)}$$

02-1 ㉮ (1) 풀이 참조, 정의역: $\{x|x>-1\}$,

점근선의 방정식: $x=-1$

(2) 풀이 참조, 정의역: $\{x|x<0\}$,

점근선의 방정식: $x=0$

(3) 풀이 참조, 정의역: $\{x|x>3\}$,

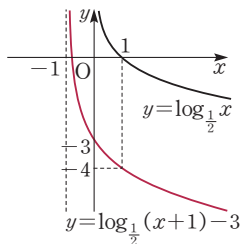
점근선의 방정식: $x=3$

(4) 풀이 참조, 정의역: $\{x|x>-2\}$,

점근선의 방정식: $x=-2$

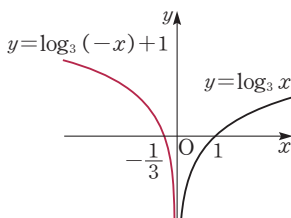
해결전략 | 주어진 함수의 그래프는 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동한 것이다.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-3$ 의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

(2) $y=\log_3(-x)+1$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

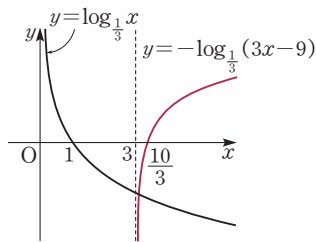


따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

$$\begin{aligned} (3) y &= -\log_{\frac{1}{3}}(3x-9) = -\log_{\frac{1}{3}} 3(x-3) \\ &= -\{\log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}}(x-3)\} \\ &= -\{-1 + \log_{\frac{1}{3}}(x-3)\} \\ &= -\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 1 \end{aligned}$$

즉, $y=-\log_{\frac{1}{3}}(3x-9)$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로

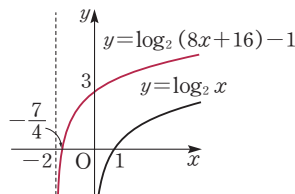
3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>3\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x=3$ 이다.

$$\begin{aligned} (4) y &= \log_2(8x+16) - 1 = \log_2 8(x+2) - 1 \\ &= \log_2 8 + \log_2(x+2) - 1 = 3 + \log_2(x+2) - 1 \\ &= \log_2(x+2) + 2 \end{aligned}$$

즉, $y=\log_2(8x+16)-1$ 의 그래프는 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$ 이고 점근선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

02-2 ㉮ 6

해결전략 | 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식을 구한 후, 그 그래프의 점근선과 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용한다.

STEP 1 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2 x$$

$y=-\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2(x-m) + n \quad \leftarrow \text{점근선의 방정식은 } x=m$$

STEP 2 그래프의 점근선을 이용하여 m 의 값 구하기

이때 점근선은 직선 $x=-2$ 이므로

$$m = -2$$

STEP 3 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용하여 n 의 값 구하기

$y=-\log_2(x+2)+n$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = -\log_2(0+2) + n$$

$$-4 = -1 + n \quad \therefore n = -3$$

$$\therefore mn = (-2) \times (-3) = 6$$

02-3 ㉡ 70

해결전략 $y = \log_a x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \log_a(x-m) + n$ 임을 이용한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 $y = \log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$ 변형하기

$$y = \log_3\left(\frac{x}{9}-1\right) = \log_3 \frac{x-9}{9}$$

$$= \log_3(x-9) - \log_3 9$$

$$= \log_3(x-9) - 2$$

STEP2 m, n 의 값 구하기

즉, $y = \log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 9만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=9, n=-2$ 이므로

$$10(m+n) = 10 \times 7 = 70$$

02-4 ㉡ 19

해결전략 $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$ 이고 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=f(x-k)$ 임을 이용한다.

STEP1 대칭이동과 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = \log_5 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_5(-x)$$

$y = -\log_5(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_5\{-(x-k)\}$$

즉, $y = -\log_5(-x+k)$ ㉠

STEP2 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용하여 k 의 값 구하기

㉠의 그래프가 점 $(-6, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -\log_5(6+k)$$

$$\log_5(6+k) = 2$$

$$6+k=25$$

$$\therefore k=19$$

02-5 ㉡ 7, ㉡, ㉡

해결전략 $\log$ 의 식을 변형하여 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동을 할 수 있는지 파악한다.

$$\neg. y = \log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = \log_3 x + 2$$

이므로 $y = \log_3 9x$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\neg. y = \log_3 x^2 = 2 \log_3 |x|$$

이므로 $y = \log_3 x^2$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

$$\neg. y = \log_{\frac{1}{3}}(6-3x) = \log_{\frac{1}{3}} 3(2-x)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}}(2-x)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}\{- (x-2)\} - 1$$

$$= -\log_3\{-(x-2)\} - 1$$

$$y = -\log_3(-x) \quad \leftarrow$$

이므로 $y = \log_{\frac{1}{3}}(6-3x)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의

그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$$\neg. y = \log_3 \frac{3}{x} + 2 = \log_3 3 - \log_3 x + 2$$

$$= -\log_3 x + 3$$

이므로 $y = \log_3 \frac{3}{x} + 2$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래

프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. $\rightarrow y = -\log_3 x$

따라서 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

02-6 ㉡ 6

해결전략 평행이동하면 두 함수의 그래프가 겹쳐지므로 구하는 부분과 넓이가 같은 도형을 찾아본다.

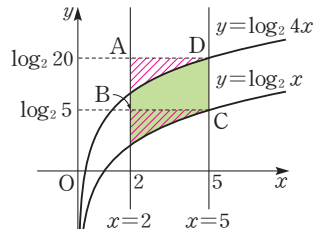
STEP1 두 함수의 그래프의 y 축에 대한 평행이동 파악하기

$$y = \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 x + 2$$

이므로 함수 $y = \log_2 4x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

STEP2 구하는 부분의 일부분을 옮겨 넓이 구하기

다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$(5-2) \times (\log_2 20 - \log_2 5) = 3 \times \log_2 4 = 3 \times 2 = 6$$

03-1 ㉡ (1) $y = -\log_3(x+1) + 2$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$

해결전략 | 지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계임을 알고 로그의 정의를 이용한다.

(1) STEP1 지수함수가 일대일대응임을 이해하기

함수 $y = 3^{-x+2} - 1$ 은 실수 전체의 집합에서 집합 $\{y | y > -1\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

STEP2 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

$$y = 3^{-x+2} - 1 \text{에서 } y+1 = 3^{-x+2}$$

로그의 정의에 의하여 $-x+2 = \log_3(y+1)$

$$\therefore x = -\log_3(y+1) + 2$$

STEP3 x 와 y 를 서로 바꾸기

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\log_3(x+1) + 2$$

(2) STEP1 로그함수가 일대일대응임을 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4) + 3$ 은 집합 $\{x | x > 4\}$ 에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

STEP2 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4) + 3 \text{에서 } y-3 = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

로그의 정의에 의하여 $x-4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3}$

$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3} + 4$$

STEP3 x 와 y 를 서로 바꾸기

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$$

03-2 ㉡ (1) $y = \log_3(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

해결전략 | 지수함수와 로그함수가 서로 역함수 관계임을 알고 로그의 정의를 이용한다.

(1) STEP1 지수함수가 일대일대응임을 이해하기

함수 $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ 은 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

STEP2 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

$$y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \text{에서 } 2y = 3^x - 3^{-x}$$

양변에 3^x 을 곱하면

$$2y \times 3^x = (3^x)^2 - 1$$

$$\therefore (3^x)^2 - 2y \times 3^x - 1 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)으로 놓으면

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$\therefore t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

로그의 정의에 의하여

$$x = \log_3(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

STEP3 x 와 y 를 서로 바꾸기

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(2) STEP1 로그함수가 일대일대응임을 이해하기

함수 $y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 은 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

STEP2 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

함수 $y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 은 로그의 정의에 의하여

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 2^y \quad \therefore \sqrt{x^2 + 1} = 2^y - x$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 1 = 2^{2y} - 2 \times 2^y x + x^2$$

$$2 \times 2^y x = 2^{2y} - 1$$

$$\therefore x = \frac{2^{2y} - 1}{2 \times 2^y} = \frac{2^y - 2^{-y}}{2}$$

STEP3 x 와 y 를 서로 바꾸기

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

03-3 ㉡ (1) 10 (2) 5

해결전략 | 지수함수와 로그함수가 서로 역함수 관계임을 알고 로그의 정의를 이용한다.

(1) STEP1 $y=f(x)$ 를 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

$$y = 2^{ax} \text{에서 로그의 정의에 의하여 } ax = \log_2 y$$

$$\therefore x = \frac{1}{a} \log_2 y$$

STEP2 x 와 y 를 서로 바꾸어 양수 a 의 값 구하기

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{1}{a} \log_2 x \quad \leftarrow y = \frac{a}{100} \log_2 x \text{와 같다.}$$

따라서 $\frac{a}{100} = \frac{1}{a}$ 이므로 $a^2 = 100$

$a > 0$ 이므로 $a = 10$

(2) STEP1 $y=f(x)$ 를 x 에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형하기

$$y = \log_4(x+a) - 2 \text{에서 } y+2 = \log_4(x+a)$$

로그의 정의에 의하여 $x+a = 4^{y+2}$

$$\therefore x = 4^{y+2} - a$$

STEP2 x 와 y 를 서로 바꾸어 a, b 의 값 구하기

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 4^{x+2} - a \quad \leftarrow y = 4^{x+b} - 3 \text{과 같다.}$$

따라서 $a=3, b=2$ 이므로

$$a+b=5$$

03-4 ㉡ 2

해결전략 | 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때,

$$f(p)=q \iff g(q)=p \text{이다.}$$

STEP1 $f(4)$ 의 값을 구하여 k 의 값 구하기

함수 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + k$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고

$$g(4)=7 \text{이므로}$$

$$f(7)=4, \text{ 즉 } \log_{\frac{1}{2}}(7-3) + k = 4$$

$$-2 + k = 4 \quad \therefore k = 6$$

STEP2 $f(19)$ 의 값 구하기

따라서 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 6$ 이므로

$$f(19) = \log_{\frac{1}{2}}(19-3) + 6 = -4 + 6 = 2$$

03-5 ㉡ 16

해결전략 | $(g \circ f)(x) = x$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계임을 이용한다.

STEP1 $(g \circ f)(x) = x$ 의 의미 파악하기

$(g \circ f)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

STEP2 $g(13)$ 의 값 구하기

$$g(13)=k \text{로 놓으면 } f(k)=13 \text{이므로}$$

$$1 + 3\log_2 k = 13, \log_2 k = 4$$

$$\therefore k = 16$$

$$\therefore g(13) = 16$$

03-6 ㉡ 3

해결전략 | $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 와 $f(x+1)$ 의 역함수를 각각 구한다.

STEP1 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 구하기

$$y = \log_3 x - 4 \text{로 놓으면 } y+4 = \log_3 x$$

로그의 정의에 의하여

$$x = 3^{y+4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 3^{x+4}$

$$\therefore g(x) = 3^{x+4}$$

..... ㉠

STEP2 함수 $f(x)$ 의 식에 x 대신 $x+1$ 을 대입한 후

$f(x+1)$ 의 역함수 구하기

$f(x) = \log_3 x - 4$ 에서 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x+1) = \log_3(x+1) - 4$$

이때 $y = \log_3(x+1) - 4$ 로 놓으면

$$y+4 = \log_3(x+1)$$

로그의 정의에 의하여 $x+1 = 3^{y+4}$

$$\therefore x = 3^{y+4} - 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 3^{x+4} - 1$

STEP3 $f(x+1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타내기

㉠에 의하여 함수 $f(x+1)$ 의 역함수는 $g(x) - 1$ 이다.

●→ 다른 풀이

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라고 하면

$$f^{-1}(x) = g(x)$$

$$y = f(x+1) \text{로 놓으면 } x+1 = f^{-1}(y) \text{이므로}$$

$$x+1 = g(y) \quad \therefore x = g(y) - 1$$

따라서 함수 $f(x+1)$ 의 역함수는 $g(x) - 1$ 이다.

필수유형 04

113쪽

04-1 ㉡ (27, 3)

해결전략 | 두 함수 $y=a^x, y=\log_a x$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

STEP1 점 A의 좌표 구하기

$y=3^x$ 의 그래프는 점 (0, 1)을 지나므로

$$A(0, 1)$$

STEP2 점 B의 좌표 구하기

점 A와 점 B의 y 좌표는 1로 같으므로 점 B의 좌표를 $(b, 1)$ 이라고 하면

$$1 = \log_3 b \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore B(3, 1)$$

STEP3 점 C의 좌표 구하기

두 함수 $y=3^x, y=\log_3 x$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 점 C는 점 B(3, 1)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동한 점이므로

$$C(1, 3)$$

STEP4 점 D의 좌표 구하기

점 C와 점 D의 y 좌표는 3으로 같으므로 점 D의 좌표를 $(d, 3)$ 이라고 하면
 $3 = \log_3 d \quad \therefore d = 3^3 = 27$
 $\therefore D(27, 3)$

04-2 ㉡ 2

해결전략 | 두 함수 $y = a^x, y = \log_a x$ 는 서로 역함수 관계임을 이용한다.

STEP1 역함수 관계임을 이용하여 두 점 A, B의 좌표 구하기
 두 함수 $y = a^x, y = \log_a x$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 점 A는 직선 $y = -x + 6$ 위의 점이므로
 $A(k, 6-k)$ 라고 하면 $B(6-k, k)$

STEP2 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 를 이용하여 a 의 값 구하기

$$\overline{AB} = \sqrt{(6-2k)^2 + (2k-6)^2} = 2\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$2(2k-6)^2 = 8, \quad k^2 - 6k + 8 = 0,$$

$$(k-2)(k-4) = 0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=4$$

(i) $k=2$ 일 때, $A(2, 4), B(4, 2)$

점 $A(2, 4)$ 가 함수 $y = a^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$4 = a^2 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>1)$$

(ii) $k=4$ 일 때, $A(4, 2), B(2, 4)$

점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 크므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

04-3 ㉡ 38

해결전략 | 주어진 두 함수가 서로 역함수 관계임을 이용하여 함수 $g(x)$ 의 식을 구한다.

STEP1 함수 $g(x)$ 구하기

$y = g(x)$ 의 그래프와 $y = \log_2(x-1)$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y = g(x),$

$y = \log_2(x-1)$ 은 서로 역함수 관계이다.

즉, $y = \log_2(x-1)$ 에서 $x-1=2^y$

$$\therefore x = 2^y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2^x + 1$

$$\therefore g(x) = 2^x + 1$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

$y = g(x)$ 의 그래프가 점 $P(2, b)$ 를 지나므로

$$b = 2^2 + 1 = 5$$

따라서 $y = \log_2(x-1)$ 의 그래프가 점 $Q(a, 5)$ 를 지나므로

$$5 = \log_2(a-1)$$

$$a-1 = 2^5 \quad \therefore a=33$$

$$\therefore a+b = 33+5 = 38$$

04-4 ㉡ 2

해결전략 | 역함수 관계인 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

STEP1 함수 $y = \log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 $y = (\sqrt{2})^x + a$ 가 역함수 관계임을 이해하기

$$y = \log_{\sqrt{2}}(x-a) \text{에서 } x-a = (\sqrt{2})^y$$

$$\therefore x = (\sqrt{2})^y + a$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = (\sqrt{2})^x + a$$

따라서 두 곡선 $y = \log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 $y = (\sqrt{2})^x + a$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고 직선 AB는 직선 $y = x$ 에 수직이다.

STEP2 두 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 두 점 A, B와 선분 AB의 중점의 좌표 구하기

점 A는 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를

$(2t, t) \quad (t>0)$ 이라고 하면 점 B의 좌표는 $(t, 2t)$ 이다.

선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{2t+t}{2}, \frac{t+2t}{2}\right), \text{ 즉 } M\left(\frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t\right)$$

STEP3 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, a 의 값 구하기

삼각형 OAB는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(t-2t)^2 + (2t-t)^2} = \sqrt{2}t$$

$$\overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}t$$

이고, 삼각형 OAB의 넓이는 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OM} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \frac{3\sqrt{2}}{2}t = 6$$

$$\frac{3}{2}t^2 = 6, \quad t^2 = 4 \quad \therefore t=2 \quad (\because t>0)$$

즉, $A(4, 2)$ 가 곡선 $y = \log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$$2 = \log_{\sqrt{2}}(4-a), \quad 4-a = (\sqrt{2})^2$$

$$\therefore a=2$$

㉡ 풀법의 비법

두 함수 $y = a^{x-m} + n, y = \log_a(x-n) + m$ 은 서로 역함수 관계이므로 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

05-1 ㉔ 29

해결전략 직선 $y=x$ 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 같음을 이용하여 a, b, c 의 값을 차례로 구한다.

STEP1 a, b, c 의 값 구하기

오른쪽 그림에서

$$\log_3 b = a$$

$$\log_3 c = b$$

$y = \log_3 x$ 의 그래프는

점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$a = 1$$

$y = \log_3 x$ 의 그래프는 점 $(b, 1)$ 을 지나므로

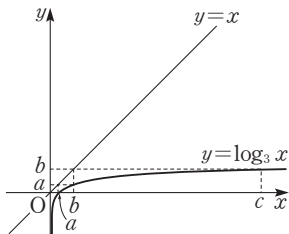
$$1 = \log_3 b \text{에서 } b = 3$$

$y = \log_3 x$ 의 그래프는 점 $(c, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \log_3 c \text{에서 } c = 3^3 = 27$$

STEP2 로그의 성질을 이용하여 $\log_3 b^2 + c$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 b^2 + c &= 2 \log_3 b + c = 2a + c \\ &= 2 \times 1 + 27 = 29 \end{aligned}$$



05-2 ㉔ 4

해결전략 점 A의 좌표와 $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ 를 이용하여 두 점 B, C의 x 좌표 또는 y 좌표를 구한다.

STEP1 주어진 조건을 만족시키는 a, b 에 대한 식 세우기

점 A의 x 좌표가 2이고 $\overline{AB} = 2$ 이므로 점 B의 x 좌표는 $2 + 2 = 4$

즉, 점 B와 점 C의 x 좌표는 4이고 $\overline{BC} = 2$ 이므로

$$\overline{BC} = \log_a 4 - \log_b 4 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또, 점 A와 점 B의 y 좌표가 같으므로

$$\log_a 2 = \log_b 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

②을 ①에 대입하면

$$\log_a 4 - \log_a 2 = 2, \log_a 2 = 2$$

$$a^2 = 2 \quad \therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 1)$$

$a = \sqrt{2}$ 를 ②에 대입하면

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_b 4, 2 = \log_b 4$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > a > 1)$$

$$\therefore a^2 b = 2 \times 2 = 4$$

05-3 ㉔ 16

해결전략 두 점 C, D와 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

STEP1 점 B의 좌표를 구하여 삼각형 BCD의 넓이 구하기

점 B의 x 좌표는 점 D의 x 좌표와 같고, 점 B는

$y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$B(2p, \log_2 2p)$$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2p - p) \times \log_2 2p = \frac{p}{2} \log_2 2p$$

STEP2 점 A의 좌표를 구하여 삼각형 ACB의 넓이 구하기

점 A의 x 좌표는 점 C의 x 좌표와 같고, 점 A는

$y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$A(p, \log_2 p)$$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2p - p) \times \log_2 p = \frac{p}{2} \log_2 p$$

STEP3 두 삼각형의 넓이의 차가 8임을 이용하여 실수 p 의 값 구하기

삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 넓이의 차이가 8이므로

$$\frac{p}{2} \log_2 2p - \frac{p}{2} \log_2 p = 8$$

$$\frac{p}{2} (\log_2 2p - \log_2 p) = 8, \frac{p}{2} \log_2 2 = 8$$

$$\frac{p}{2} = 8 \quad \therefore p = 16$$

05-4 ㉔ 2

해결전략 먼저 네 점 A, B, C, D의 좌표를 a 로 나타낸다.

STEP1 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 의 길이를 a 로 나타내기

$$A(a, \log_4 a), B(a, \log_{\frac{1}{4}} a),$$

$$C(a+2, \log_4 (a+2)), D(a+2, \log_{\frac{1}{4}} (a+2)) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \log_4 a - \log_{\frac{1}{4}} a$$

$$= \log_4 a - (-\log_4 a) = 2 \log_4 a$$

$$\overline{CD} = \log_4 (a+2) - \log_{\frac{1}{4}} (a+2)$$

$$= \log_4 (a+2) - \{-\log_4 (a+2)\} = 2 \log_4 (a+2)$$

STEP2 사각형 ABDC의 넓이가 3임을 이용하여 상수 a 의 값 구하기

사각형 ABDC의 넓이는 3이므로

$$\frac{1}{2} \times \{2 \log_4 a + 2 \log_4 (a+2)\} \times \{(a+2) - a\} = 3$$

$$2 \log_4 a(a+2) = 3, \log_4 (a^2 + 2a) = \frac{3}{2}$$

$$a^2 + 2a = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0, (a+4)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

06-1 **답** (1) $\log_3 \sqrt{15} < 2\log_3 2 < -\log_9 \frac{1}{27}$

(2) $\frac{\log 3}{\log 5} < \frac{1}{2}\log_5 10 < \log_{\sqrt{5}} 2$

해결전략 | 로그의 밑을 통일한 후 진수를 비교한다. 이때 (밑) > 1이면 진수가 클수록 큰 수이다.

$$(1) -\log_9 \frac{1}{27} = -\log_{3^2} \frac{1}{27} = -\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{27} \\ = \log_3 \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{27}$$

$$2\log_3 2 = \log_3 2^2 = \log_3 4$$

이때 $\sqrt{15} < 4 < \sqrt{27}$ 이고, 함수 $y = \log_3 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 \sqrt{15} < \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27}$$

$$\therefore \log_3 \sqrt{15} < 2\log_3 2 < -\log_9 \frac{1}{27}$$

(2) $\log_{\sqrt{5}} 2 = \log_{(\sqrt{5})^2} 2^2 = \log_5 4$

$$\frac{\log 3}{\log 5} = \log_5 3$$

$$\frac{1}{2}\log_5 10 = \log_5 10^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{10}$$

이때 $3 < \sqrt{10} < 4$ 이고, 함수 $y = \log_5 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_5 3 < \log_5 \sqrt{10} < \log_5 4$$

$$\therefore \frac{\log 3}{\log 5} < \frac{1}{2}\log_5 10 < \log_{\sqrt{5}} 2$$

06-2 **답** (1) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < -2 < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

(2) $\log_{0.1} 50 < 2\log_{0.1} 4\sqrt{3} < \log \frac{1}{45}$

해결전략 | 로그의 밑을 통일한 후 진수를 비교한다. 이때 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이면 진수가 클수록 작은 수이다.

$$(1) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-2 = -2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$$

이때 $\sqrt{\frac{1}{2}} < 4 < 5$ 이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 < -2 < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$$

(2) $2\log_{0.1} 4\sqrt{3} = \log_{0.1} (4\sqrt{3})^2 = \log_{0.1} 48$

$$\log \frac{1}{45} = \log 45^{-1} = -\log 45 = \log_{0.1} 45$$

이때 $45 < 48 < 50$ 이고, 함수 $y = \log_{0.1} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{0.1} 50 < \log_{0.1} 48 < \log_{0.1} 45$$

$$\therefore \log_{0.1} 50 < 2\log_{0.1} 4\sqrt{3} < \log \frac{1}{45}$$

06-3 **답** B, A, C

해결전략 | 로그함수의 성질을 이용하여 세 수의 대소를 비교한다.

STEP1 A의 값의 범위 구하기

함수 $y = \log_3 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $1 < a < 3$ 에서 $\log_3 1 < \log_3 a < \log_3 3$

$$0 < \log_3 a < 1 \quad \therefore 0 < A < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 B의 값의 범위 구하기

$$B = \log_3 \frac{1}{a} = \log_3 a^{-1} = -\log_3 a \text{이고 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$-1 < B < 0$$

STEP3 C의 값의 범위 구하기

$$\log_a 3 = \frac{1}{\log_3 a} \text{이므로 } \frac{1}{\log_3 a} > 1$$

$$\therefore C > 1$$

따라서 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 B, A, C이다.

06-4 **답** $\log_b a$

해결전략 | 로그함수의 성질을 이용하여 네 수의 대소를 비교한다.

STEP1 $\log_a b$ 의 값의 범위 구하기

$0 < a < 1$ 이므로 함수 $y = \log_a x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $0 < a < b < 1$ 에서 $\log_a a > \log_a b > \log_a 1$ ↙ $0 < a < 1$ 이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\therefore 0 < \log_a b < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 $\log_b a$ 의 값의 범위 구하기

$0 < b < 1$ 이므로 함수 $y = \log_b x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $0 < a < b < 1$ 에서 $\log_b a > \log_b b > \log_b 1$ ↙ $0 < b < 1$ 이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\therefore 1 < \log_b a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

STEP3 $\log_a \frac{a}{b}$ 의 값의 범위 구하기

$$\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b \text{이고 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$-1 < -\log_a b < 0, 0 < 1 - \log_a b < 1$$

$$\therefore 0 < \log_a \frac{a}{b} < 1$$

STEP4 $\log_b \frac{b}{a}$ 의 값의 범위 구하기

$$\log_b \frac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a \text{이고 } \textcircled{A} \text{에서}$$

$$-\log_b a < -1, 1 - \log_b a < 0$$

$$\therefore \log_b \frac{b}{a} < 0$$

따라서 가장 큰 수는 $\log_b a$ 이다.

06-5 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | 로그함수의 성질과 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 두 수의 대소를 비교한다.

STEP1 로그함수의 성질을 이용하여 $\log_2 n, \log_2(n+1)$ 의 대소 비교하기

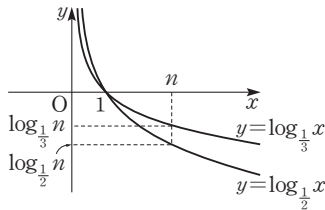
ㄱ. $f(x) = \log_2 x$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$f(n) < f(n+1)$$

$$\therefore \log_2 n < \log_2(n+1) \text{ (참)}$$

STEP2 로그함수의 그래프를 그린 후 $\log_{\frac{1}{2}} n, \log_{\frac{1}{3}} n$ 의 대소 비교하기

ㄴ. $y = \log_{\frac{1}{2}} x, y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



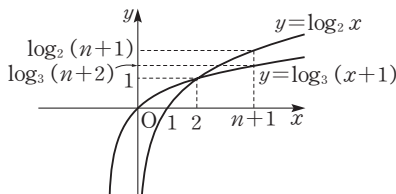
$x > 1$ 일 때, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있으므로

$\log_{\frac{1}{2}} n < \log_{\frac{1}{3}} n$ (거짓)

STEP3 로그함수의 그래프를 그린 후 $\log_2(n+1),$

$\log_3(n+2)$ 의 대소 비교하기

ㄷ. $y = \log_2 x, y = \log_3(x+1)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x > 2$ 일 때, $y = \log_2 x$ 의 그래프는 $y = \log_3(x+1)$ 의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$$\log_2(n+1) > \log_3(n+2) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06-6 답 $C < B < A$

해결전략 | 두 수의 차의 부호를 조사하여 두 수의 대소를 비교한다.

STEP1 $\log_3 x$ 의 값의 범위 구하기

$1 < x < 9$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 1 < \log_3 x < \log_3 9$$

$$\therefore 0 < \log_3 x < 2$$

STEP2 $A - B$ 의 부호를 조사하여 A, B 의 대소 비교하기

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A - B &= \log_3 x^2 - (\log_3 x)^2 \\ &= 2\log_3 x - (\log_3 x)^2 \\ &= \log_3 x(2 - \log_3 x) \end{aligned}$$

$$\log_3 x > 0, 2 - \log_3 x > 0 \text{이므로}$$

$$A - B > 0$$

$$\therefore A > B$$

STEP3 B, C 의 대소 비교하기

(ii) $0 < \log_3 x \leq 1$ 일 때

$$\log_3(\log_3 x) \leq 0, 0 < (\log_3 x)^2 \leq 1$$

$$\therefore \log_3(\log_3 x) < (\log_3 x)^2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또, $1 < \log_3 x < 2$ 일 때

$$0 < \log_3(\log_3 x) < 1, 1 < (\log_3 x)^2 < 4$$

$$\therefore \log_3(\log_3 x) < (\log_3 x)^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $B > C$

(i), (ii)에 의하여 $C < B < A$

필수유형 07

119쪽

07-1 답 (1) 최댓값: -2, 최솟값: -4

(2) 최댓값: 6, 최솟값: 5

(3) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(4) 최댓값: 0, 최솟값: -2

해결전략 | 주어진 로그함수의 밑의 범위에 주의하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) STEP1 주어진 함수가 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

$2 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$ 는

$x=2$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(6-2) = \log_{2^{-1}} 2^2 = -2$$

$x=6$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(18-2) = \log_{2^{-1}} 2^4 = -4$$

(2) STEP1 주어진 함수가 증가하는 함수임을 이해하기

함수 $y = \log_3(x+2) + 4$ 에서 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

$1 \leq x \leq 7$ 에서 함수 $y = \log_3(x+2) + 4$ 는

$x=7$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\log_3(7+2) + 4 = \log_3 3^2 + 4 = 6$$

$x=1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_3(1+2) + 4 = \log_3 3 + 4 = 5$$

(3) STEP1 $f(x) = x^2 + 6x + 13$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 값의 범위 구하기

$f(x) = x^2 + 6x + 13$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x+3)^2 + 4$$

$$f(-5) = 8, f(-3) = 4, f(-1) = 8 \text{이므로}$$

$$-5 \leq x \leq -1 \text{에서 } 4 \leq f(x) \leq 8$$

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

함수 $y = \log_2 f(x)$ 는 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 도 최대, $f(x)$ 가 최소일 때 y 도 최소가 된다.

따라서 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는

$f(x) = 8$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

$f(x) = 4$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

(4) STEP1 $f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 로 놓고 $f(x)$ 의 값의 범위 구하기

$f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 10$$

$$2 \leq x \leq 4 \text{에서 } f(2) = 9, f(4) = 1 \text{이므로}$$

$$1 \leq f(x) \leq 9$$

STEP2 주어진 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소, $f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대가 된다.

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는

$f(x) = 1$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

$f(x) = 9$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{3^{-1}} 3^2 = -2$$

07-2 ㉮ 6

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 최댓값을 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x-1 > 0, 7-x > 0$

$$\therefore 1 < x < 7$$

STEP2 로그의 성질을 이용하여 식 변형하기

$$y = \log_3(x-1) + \log_3(7-x)$$

$$= \log_3(x-1)(7-x)$$

$$= \log_3(-x^2 + 8x - 7)$$

STEP3 a, M 의 값 구하기

이때 $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-4)^2 + 9$$

$1 < x < 7$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최대이고 최댓값은 9이다.

$$\therefore a = 4$$

함수 $y = \log_3 f(x)$ 는 밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 도 최대가 된다.

따라서 함수 $y = \log_3 f(x)$ 는 $f(x) = 9$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \quad \therefore M = 2$$

$$\therefore a + M = 4 + 2 = 6$$

07-3 ㉮ 9

해결전략 | (밑) > 1 인 로그함수의 성질을 이용한다.

STEP1 로그의 밑이 1보다 크므로 진수가 최소일 때 함수

$f(x)$ 는 최솟값을 가짐을 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + a)$ 는 밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로 $x^2 - 2x + a$ 가 최소일 때 $f(x)$ 도 최소가 된다.

STEP2 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 3임을 이용하여 a 의 값 구하기

$f(x) = \log_2(x^2 - 2x + a) = \log_2\{(x-1)^2 - 1 + a\}$ 이고 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 3을 가지므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \log_2(-1+a) = 3 \\ -1+a &= 2^3 = 8 \\ \therefore a &= 9 \end{aligned}$$

07-4 ㉔ 22

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 로그함수의 성질을 이용한다.

STEP1 주어진 함수가 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+k)$ 에서 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

STEP2 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+k)$ 의 최댓값이 -3 임을 이용하여 k 의 값 구하기

$5 \leq x \leq 9$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+k)$ 는 $x=5$ 일 때

최댓값 -3 을 가지므로

$$\log_{\frac{1}{3}}(5+k) = -3, \quad 5+k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

$$\therefore k = 22$$

07-5 ㉔ -1

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 로그함수의 성질을 이용한다.

STEP1 $x^2+6x+14$ 가 최소일 때 $(f \circ g)(x)$ 가 최대임을 알기

함수 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2+6x+14)$ 는

밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로 $x^2+6x+14$ 가 최소일 때

$(f \circ g)(x)$ 는 최대가 된다.

STEP2 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값 구하기

$x^2+6x+14 = (x+3)^2+5$ 이므로 $x^2+6x+14$ 는

$x=-3$ 일 때 최솟값이 5이다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=-3$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$$

07-6 ㉔ $-\frac{2}{3}$

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 로그함수의 성질을 이용한다.

STEP1 $f(x) = x^2-4x+8$ 로 놓고 $f(x)$ 의 값의 범위 구하기

$f(x) = x^2-4x+8$ 로 놓으면

$$f(x) = (x-2)^2+4$$

$$f(0)=8, f(2)=4, f(3)=5 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } 4 \leq f(x) \leq 8$$

STEP2 $0 < a < 1$ 일 때 함수 $y = \log_a f(x)$ 의 최솟값이 -1 임을 이용하여 a 의 값 구하기

함수 $y = \log_a f(x)$ 는 밑이 a 이고 $0 < a < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소가 된다.

함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)=8$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$\log_a 8 = -1, \quad a^{-1} = 8 \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

STEP3 최댓값 구하기

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{8}} f(x)$ 는 $f(x)=4$ 일 때 최대이고,

최댓값은

$$\log_{\frac{1}{8}} 4 = \log_{2^{-3}} 2^2 = -\frac{2}{3}$$

필수유형 08

121쪽

08-1 ㉔ (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -6

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후

$\log_a x = t$ 로 치환한다.

(1) **STEP1** $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x^4 + 2$$

$$= (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 4 \log_{\frac{1}{3}} x + 2$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\therefore -3 \leq t \leq 0$$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값과 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 + 4t + 2 = (t+2)^2 - 2$$

따라서 $-3 \leq t \leq 0$ 에서 함수 $y = (t+2)^2 - 2$ 는

$t=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$(0+2)^2 - 2 = 2$$

$t=-2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$(-2+2)^2 - 2 = -2$$

(2) **STEP1** $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{2}\right) \left(\log_2 \frac{4}{x}\right)$$

$$= (\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 4 - \log_2 x)$$

$$= (\log_2 x - 1)(2 - \log_2 x)$$

$$= -(\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x - 2$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ 에서

$$\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값과 최솟값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 3t - 2 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 은

$t = \frac{3}{2}$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$-\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$t = -1$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$-\left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -6$$

08-2 ㉮ 13

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_3 x = t$ 로 치환한다.

STEP1 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$\begin{aligned} y &= (\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x) + 2\log_3 x + 10 \\ &= (\log_3 x)(-\log_3 x) + 2\log_3 x + 10 \\ &= -(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x + 10 \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 81$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 81$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 4$$

STEP2 주어진 함수의 최댓값 M 과 최솟값 m 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + 10 = -(t-1)^2 + 11$$

따라서 $0 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = -(t-1)^2 + 11$ 은

$t = 1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$M = -(1-1)^2 + 11 = 11$$

$t = 4$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$m = -(4-1)^2 + 11 = 2$$

$$\therefore M + m = 11 + 2 = 13$$

08-3 ㉮ 9

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_2 x = t$ 로 치환한다.

STEP1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 주어진 식을 t 에 대한 식으로 변형하기

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 x)^2 + a\log_8 x^2 + b \\ &= (\log_2 x)^2 + a\log_{2^3} x^2 + b \\ &= (\log_2 x)^2 + \frac{2}{3}a\log_2 x + b \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 + \frac{2}{3}at + b$$

STEP2 주어진 조건을 만족시키는 t 에 대한 이차함수 구하기

이때 $x = \frac{1}{4}$, 즉 $t = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ 에서 최솟값 -1 을 갖는

t 에 대한 이차함수는

$$y = (t+2)^2 - 1 = t^2 + 4t + 3$$

STEP3 a, b 의 값 구하기

따라서 $\frac{2}{3}a = 4$, $b = 3$ 이므로 $a = 6$, $b = 3$

$$\therefore a + b = 9$$

08-4 ㉮ -4

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_5 x = t$ 로 치환한다.

STEP1 $\log_5 x = t$ 로 놓고 주어진 식을 t 에 대한 식으로 변형하기

$$\begin{aligned} y &= (\log_5 5x)\left(\log_5 \frac{25}{x}\right) + a \\ &= (\log_5 5 + \log_5 x)(\log_5 25 - \log_5 x) + a \\ &= (1 + \log_5 x)(2 - \log_5 x) + a \\ &= -(\log_5 x)^2 + \log_5 x + a + 2 \end{aligned}$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = -t^2 + t + a + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + a + \frac{9}{4}$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

따라서 함수 $y = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + a + \frac{9}{4}$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서

최댓값 1을 가지므로

$$a + \frac{9}{4} = 1 \quad \therefore a = -\frac{5}{4}$$

한편, $\log_5 x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$$\therefore b = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a} = \frac{(\sqrt{5})^2}{-\frac{5}{4}} = -4$$

08-5 ㉮ 4

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $3^{\log x} = t$ 로 치환한다.

STEP1 $3^{\log x} = t$ 로 놓고 주어진 식을 t 에 대한 식으로 변형하기

$$\begin{aligned} y &= 3^{2\log x} - (x^{\log 3} + 3^{\log x}) + 6 \\ &= 3^{2\log x} - (3^{\log x} + 3^{\log x}) + 6 \\ &= (3^{\log x})^2 - 2 \times 3^{\log x} + 6 \end{aligned}$$

$3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 6 = (t-1)^2 + 5$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

따라서 함수 $y = (t-1)^2 + 5$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 5를 가지므로 $b=5$

한편, $3^{\log x} = 1$ 에서 $\log x = 0$, 즉 $x=1$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore b-a=5-1=4$$

08-6 ㉠ $\frac{1}{2}$

해결전략 | 지수에 밑이 2인 로그가 있으므로 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

STEP1 주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 식 정리하기

$y = x^{4-\log_2 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_2 y &= \log_2 x^{4-\log_2 x} \\ &= (4-\log_2 x) \log_2 x \\ &= -(\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x \end{aligned}$$

STEP2 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ 에서

$$\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

STEP3 주어진 함수의 최대값 M 과 최소값 m 구하기

이때 주어진 함수는

$$\log_2 y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$$

따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 $\log_2 y = -(t-2)^2 + 4$ 는

$t=2$ 일 때 최대이고 최댓값은 4,

$t=-1$ 일 때 최소이고 최솟값은 -5 이므로

$$\log_2 y = 4 \text{에서 } y = 2^4 = 16 \quad \therefore M = 16$$

$$\log_2 y = -5 \text{에서 } y = 2^{-5} = \frac{1}{32} \quad \therefore m = \frac{1}{32}$$

$$\therefore Mm = 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

㉠ 풀법의 비법

$y = x^{f(x)}$ 꼴의 함수의 최대·최소는 양변에 로그를 취하여 구한다.

발전유형 09

123쪽

09-1 ㉠ 2

해결전략 | 공통부분이 나오도록 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\begin{aligned} \log_5 \left(x + \frac{1}{y} \right) + \log_5 \left(y + \frac{16}{x} \right) \\ &= \log_5 \left(x + \frac{1}{y} \right) \left(y + \frac{16}{x} \right) \\ &= \log_5 \left(xy + \frac{16}{xy} + 17 \right) \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

STEP2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} xy + \frac{16}{xy} + 17 &\geq 2\sqrt{xy \times \frac{16}{xy}} + 17 \\ &= 2\sqrt{16} + 17 = 25 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $xy = \frac{16}{xy}$, 즉 $xy = 4$ 일 때 성립한다.)

이때 밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로 ㉠은 $xy + \frac{16}{xy} + 17$ 이 최소일 때 최소가 된다.

㉠에서

$$\log_5 \left(xy + \frac{16}{xy} + 17 \right) \geq \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

09-2 ㉠ -2

해결전략 | 공통부분이 나오도록 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \left(2x + \frac{1}{y} \right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(y + \frac{2}{x} \right) \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left(2x + \frac{1}{y} \right) \left(y + \frac{2}{x} \right) \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left(2xy + \frac{2}{xy} + 5 \right) \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

STEP2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최댓값 구하기

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2xy + \frac{2}{xy} + 5 &\geq 2\sqrt{2xy \times \frac{2}{xy}} + 5 \\ &= 2\sqrt{4} + 5 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $2xy = \frac{2}{xy}$, 즉 $xy = 1$ 일 때 성립한다.)

이때 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $\ominus$ 은 $2xy + \frac{2}{xy} + 5$ 가 최소일 때 최대가 된다.

$\ominus$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(2xy + \frac{2}{xy} + 5\right) \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{3^{-1}} 3^2 = -2$$

따라서 구하는 최댓값은 -2 이다.

09-3 ㉮ 4

해결전략 | 공통부분이 나오도록 주어진 식을 변형하여 산술 평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x + \log_x 81 = \log_3 x + \frac{1}{\log_{81} x} \\ &= \log_3 x + \frac{1}{\log_{3^4} x} = \log_3 x + \frac{4}{\log_3 x} \end{aligned}$$

STEP 2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기

$x > 1$ 에서 $\log_3 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_3 x + \frac{4}{\log_3 x} &\geq 2\sqrt{\log_3 x \times \frac{4}{\log_3 x}} \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\log_3 x = \frac{4}{\log_3 x}$, 즉 $x=9$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 4 이다.

09-4 ㉮ 50

해결전략 | xy 의 값을 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 로그의 성질을 이용하여 xy 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \log_5 x + \log_5 y &= 3 \text{에서 } \log_5 xy = 3 \\ \therefore xy &= 5^3 \end{aligned}$$

STEP 2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기

$5x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 5x + y &\geq 2\sqrt{5xy} = 2\sqrt{5 \times 5^3} = 2 \times 5^2 = 50 \\ &\text{(단, 등호는 } 5x = y \text{일 때 성립한다.)} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 50 이다.

09-5 ㉮ 3

해결전략 | 먼저 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 xy 의 값의 범위 구하기

$\log_4 x + \log_4 y = \log_4 xy$ 에서 밑이 4 이고 $4 > 1$ 이므로 $\log_4 xy$ 는 xy 가 최대일 때 최대가 된다.

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립한다.})$$

$$16 \geq 2\sqrt{xy}, \sqrt{xy} \leq 8$$

$$\therefore xy \leq 64$$

STEP 2 $\log_4 xy$ 의 최댓값 구하기

따라서 xy 의 최댓값이 64 이므로 $\log_4 xy$ 의 최댓값은

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

● → 다른 풀이

STEP 1 구하는 식을 한 문자에 대한 식으로 나타내기

$x + y = 16$ 에서 $y = 16 - x$ ($0 < x < 16$)이므로

$$\begin{aligned} \log_4 x + \log_4 y &= \log_4 xy \\ &= \log_4 x(16 - x) \\ &= \log_4 (-x^2 + 16x) \\ &= \log_4 \{-(x - 8)^2 + 64\} \end{aligned}$$

STEP 2 $\log_4 x + \log_4 y$ 의 최댓값 구하기

밑이 4 이고 $4 > 1$ 이므로 $-(x - 8)^2 + 64$ 의 값이 최대일 때 $\log_4 \{-(x - 8)^2 + 64\}$ 도 최댓값을 갖는다.

따라서 $-(x - 8)^2 + 64$ 는 $x = 8$ 일 때 최댓값 64 를 가지므로 구하는 최댓값은

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

09-6 ㉮ 3

해결전략 | 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 M 의 값 구하기

$$\frac{1}{5} \leq x \leq 20 \text{에서 } \log 5x > 0, \log \frac{20}{x} > 0 \text{이므로 산술평}$$

균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log 5x + \log \frac{20}{x} \geq 2\sqrt{\log 5x \times \log \frac{20}{x}}$$

이때

$$\begin{aligned} \log 5x + \log \frac{20}{x} &= \log \left(5x \times \frac{20}{x}\right) = \log 100 \\ &= \log 10^2 = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$2 \geq 2\sqrt{\log 5x \times \log \frac{20}{x}}, \sqrt{\log 5x \times \log \frac{20}{x}} \leq 1$$

$$\therefore 0 < \log 5x \times \log \frac{20}{x} \leq 1$$

즉, $\log 5x \times \log \frac{20}{x}$ 의 최댓값은 1 이므로 $M = 1$

STEP2 a 의 값 구하기

등호는 $\log 5x = \log \frac{20}{x}$, 즉 $5x = \frac{20}{x}$ 일 때 성립하므로 $x^2 = 4$

그런데 $\frac{1}{5} \leq x \leq 20$ 이므로 $x = 2 \quad \therefore a = 2$

$\therefore a + M = 2 + 1 = 3$

실전 연습 문제

124~126쪽

01 ②	02 ③	03 1	04 10	05 ②
06 ④	07 ③	08 ⑤	09 16	10 ①
11 $\frac{1}{2}$	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 7
16 ⑤	17 ②			

01

해결전략 | 로그의 진수의 조건을 이용하여 로그함수의 정의역을 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 집합 A 구하기

$y = \log_2(-x^2 + 5x + 6)$ 에서 진수의 조건에 의하여

$$-x^2 + 5x + 6 > 0, \quad x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$(x+1)(x-6) < 0 \quad \therefore -1 < x < 6$$

$$\therefore A = \{x \mid -1 < x < 6\}$$

STEP2 진수의 조건을 이용하여 집합 B 구하기

$y = \log_3(x-2)$ 에서 진수의 조건에 의하여

$$x-2 > 0 \quad \therefore x > 2$$

$$\therefore B = \{x \mid x > 2\}$$

STEP3 집합 $A \cap B$ 의 원소 중 정수의 합 구하기

따라서 $A \cap B = \{x \mid 2 < x < 6\}$ 이므로 원소 중 정수의 합은

$$3 + 4 + 5 = 12$$

02

해결전략 | 로그함수의 성질을 알고 지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 이해한다.

① $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$ 에 $x=5$ 를 대입하면

$$y = \log_{\frac{1}{2}} 2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$ 의 그래프는

점 $(5, 1)$ 을 지난다.

②, ⑤ 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 정의역은 $\{x \mid x > 3\}$ 이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

③ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$ 에서 $y-2 = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

$$x-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2} + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$ 의 역

$$\text{함수는 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 3$$

④ 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 x 의 값이 증가할 때,

y 의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

03

해결전략 | $y = \log_a(x-m) + n$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=m$ 임을 이용한다.

STEP1 점근선을 이용하여 a 의 값 구하기

$y = \log_3(x+a) + b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = -a$ 이므로

$$a = 2$$

STEP2 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용하여 b 의 값 구하기

$y = \log_3(x+2) + b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \log_3(1+2) + b$$

$$0 = 1 + b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$$

04

해결전략 | $y = \log_a x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = \log_a x + n$ 이고, x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = -\log_a x$ 임을 이용한다.

STEP1 y 축의 방향으로 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = \log_2 kx$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2 kx - 4 = \log_2 kx - \log_2 16$$

$$\therefore y = \log_2 \frac{kx}{16}$$

..... ①

STEP2 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 구하기

$y = \log_2 \frac{kx}{16}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2 \frac{kx}{16}$$

$$\therefore y = \log_2 \frac{16}{kx} \quad \dots\dots ②$$

STEP 3 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \frac{16}{k} = \frac{8}{5} \text{ 이므로 } k = 10 \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① 평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
② 대칭이동한 그래프의 식 구하기	40 %
③ k 의 값 구하기	20 %

05

해결전략 | 보기의 식을 변형하여 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동을 할 수 있는지 파악한다.

$$\neg. y = \log_{\frac{1}{2}} 5x = -\log_2 5x = -\log_2 x - \log_2 5$$

즉, $y = \log_{\frac{1}{2}} 5x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 $-\log_2 5$ 만큼 평행이동한 것이다. $\rightarrow y = -\log_2 x$

$$\neg. y = 3 \times 2^x - 1 = 2^{x+\log_2 3} - 1 \quad \rightarrow y = 2^x$$

즉, $y = 3 \times 2^x - 1$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $-\log_2 3$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\neg. y = \log_4 (4x+1) = \log_4 4 \left(x + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \log_4 \left(x + \frac{1}{4} \right) + 1$$

즉, $y = \log_4 (4x+1)$ 의 그래프는 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\neg. y = \log_4 x^2 - 3 = \log_2 |x| - 3$$

즉, $y = \log_4 x^2 - 3$ 의 그래프는 $y = \log_2 |x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

$$\neg. y = -2\log_2 x + 6 = -\log_{\sqrt{2}} x + 6$$

즉, $y = -2\log_2 x + 6$ 의 그래프는 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 것이다. $\rightarrow y = -\log_{\sqrt{2}} x$

$$\neg. y = 2\log_2 \sqrt{x-4} = \log_2 (x-4)$$

즉, $y = 2\log_2 \sqrt{x-4}$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프를 나타내는 함수는 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 의 3개이다.

06

해결전략 | 평행이동한 함수 $y = f(x)$ 를 x 에 대하여 쏜 다음 x 와 y 를 서로 바꾼다.

STEP 1 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식 $f(x)$ 구하기

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_3 (x-a) + 2 \quad \therefore f(x) = \log_3 (x-a) + 2$$

STEP 2 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구한 후 a 의 값 구하기

$$y = \log_3 (x-a) + 2 \text{에서 } y-2 = \log_3 (x-a)$$

$$x-a = 3^{y-2}, x = 3^{y-2} + a$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = 3^{x-2} + a$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(x) = 3^{x-2} + a \text{이므로 } a = 4$$

07

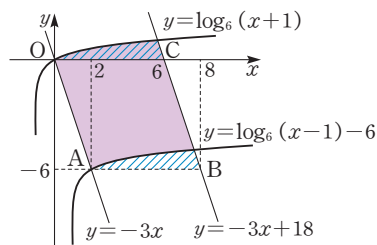
해결전략 | 평행이동하면 두 함수의 그래프가 겹쳐지므로 구하는 부분과 넓이와 같은 도형을 찾아본다.

STEP 1 두 함수의 그래프의 평행이동 파악하기

$y = \log_6 (x-1) - 6$ 의 그래프는 $y = \log_6 (x+1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이다.

STEP 2 구하는 부분의 일부분을 옮겨 넓이 구하기

다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.

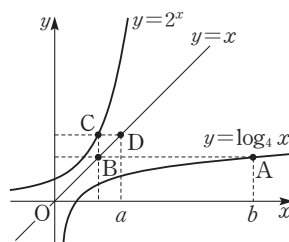


따라서 구하는 넓이는 $(8-2) \times 6 = 36$

08

해결전략 | 점선을 따라가면서 주어진 그래프 위의 점의 좌표를 구한다.

STEP 1 점의 좌표를 구하여 a, b 사이의 관계식 구하기



앞의 그림에서 $A(b, \log_4 b)$ 이고, 점 B는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $B(\log_4 b, \log_4 b)$

점 B와 점 C는 x 좌표가 같고, 점 C는 $y=2^x$ 의 그래프 위에 있으므로 $C(\log_4 b, 2^{\log_4 b})$

점 C와 점 D는 y 좌표가 같으므로 $D(a, 2^{\log_4 b})$

점 D는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $a=2^{\log_4 b}=b^{\log_4 2}=b^{\frac{1}{2}}$
즉, $a^2=b$ ㉠

STEP2 a, b 의 값 구하기

㉠을 $b-a=6$ 에 대입하면 $a^2-a=6$

$$a^2-a-6=0, (a+2)(a-3)=0$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=3$

$$\therefore b=3^2=9$$

$$\therefore ab=3 \times 9=27$$

09

해결전략 | 먼저 정사각형의 한 변의 길이를 이용하여 $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점 D의 좌표를 구한다.

STEP1 점 D의 좌표를 (m, n) 으로 놓고, n 의 값 구하기

점 D의 좌표를 (m, n) 이라고 하면 정사각형의 한 변의 길이가 4이므로

$$n=4$$

STEP2 점 D의 좌표를 $y=\log_2 x$ 에 대입하여 m 의 값을 구하기

$y=\log_2 x$ 의 그래프는 점 $D(m, 4)$ 를 지나므로

$$4=\log_2 m \quad \therefore m=2^4=16$$

$$\therefore D(16, 4) \quad \text{..... ㉠}$$

STEP3 점 A의 좌표를 구하여 a, b 의 값 구하기

점 A와 점 D의 y 좌표가 같고, $\overline{AD}=4$ 이므로

$$A(12, 4) \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{따라서 } a=12, b=4 \text{이므로 } a+b=16 \quad \text{..... ㉢}$$

채점 요소	배점
㉠ 점 D의 좌표 구하기	60 %
㉡ 점 A의 좌표 구하기	30 %
㉢ $a+b$ 의 값 구하기	10 %

10

해결전략 | 내분하는 점이 x 축 위에 있으므로 내분하는 점의 y 좌표가 0임을 이용한다.

STEP1 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표 구하기

$f(x)=\log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 $A(a, \log_2 a)$,

$B(b, \log_2 b)$ 를 이은 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{2\log_2 a+\log_2 b}{3} \right)$$

STEP2 내분하는 점의 y 좌표가 0임을 이용하여 a^2b 의 값 구하기

내분하는 점이 x 축 위에 있으므로

$$\frac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}=0, 2\log_2 a+\log_2 b=0$$

$$\log_2 a^2b=0 \quad \therefore a^2b=1$$

11

해결전략 | 주어진 세 함수의 그래프 위의 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

STEP1 세 점 A, B, C의 좌표 구하기

세 점 A, B, C는 세 함수 $f(x)=\log_a x, g(x)=\log_b x, h(x)=-\log_a x$ 의 그래프와 직선 $x=4$ 의 교점이므로

$$A(4, \log_a 4), B(4, \log_b 4), C(4, -\log_a 4)$$

STEP2 $\overline{AB} : \overline{BC}=1 : 3$ 과 로그의 성질을 이용하여 $g(a)$ 의 값 구하기

$$\overline{AB} : \overline{BC}=1 : 3 \text{에서 } 3\overline{AB}=\overline{BC} \text{이므로}$$

$$3(\log_a 4 - \log_b 4) = \log_b 4 + \log_a 4$$

$$2\log_a 4 = 4\log_b 4$$

$$\frac{2}{\log_a 4} = \frac{4}{\log_b 4}, \frac{\log_a 4}{\log_b 4} = \frac{1}{2}$$

$$\log_b a = \frac{1}{2} \quad \therefore g(a) = \frac{1}{2}$$

12

해결전략 | 먼저 로그함수의 성질을 이용하여 $\log_5 a$ 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 $\log_5 a$ 의 값의 범위 구하기

$1 < a < 5$ 이고, 함수 $y=\log_5 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_5 1 < \log_5 a < \log_5 5$$

$$\therefore 0 < \log_5 a < 1$$

STEP2 A, C의 대소 비교하기

(i) $0 < \log_5 a < 1$ 의 각 변에 $\log_5 a$ 를 곱하면 $\log_5 a > 0$ 이므로

$$0 < (\log_5 a)^2 < \log_5 a \quad \therefore C < A$$

STEP3 A, B의 대소 비교하기

(ii) $B=\log_a 5 = \frac{1}{\log_5 a}$ 이고 $0 < \log_5 a < 1$ 에서

$$\frac{1}{\log_5 a} > 1$$

$$\text{즉, } \log_5 a < 1 < \frac{1}{\log_5 a} \text{이므로 } A < B$$

(i), (ii)에 의하여 $C < A < B$

13

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 로그함수의 성질을 이용한다.

STEP1 주어진 함수가 감소하는 함수임을 이해하기

함수 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 주어진 함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

STEP2 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 -4 임을 이용하여 k 의 값 구하기

$0 \leq x \leq 12$ 에서 함수 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 -4 를 가지므로
 $f(0) = 2\log_{\frac{1}{2}}(0+k) = -4, \log_{\frac{1}{2}} k = -2$

$$\therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

STEP3 m 의 값 구하기

함수 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ 는 $x=12$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(12) = 2\log_{\frac{1}{2}} 16 = 2\log_{2^{-1}} 2^4 = 2 \times (-4) = -8$$

$$\therefore m = -8$$

$$\therefore k+m = 4+(-8) = -4$$

14

해결전략 | 먼저 주어진 함수의 최댓값이 존재하기 위한 a 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 a 의 값의 범위 구하기

함수 $y = \log_a(x^2 - 6x + 13)$ 은 $a > 1$ 이면 $x^2 - 6x + 13$ 이 최대일 때 최대가 된다.

그런데 $x^2 - 6x + 13$ 의 최댓값은 존재하지 않으므로 $\log_a(x^2 - 6x + 13)$ 의 최댓값도 존재하지 않는다.
 즉, $0 < a < 1$ 이므로 함수 $y = \log_a(x^2 - 6x + 13)$ 은 $x^2 - 6x + 13$ 이 최소일 때 y 는 최대가 된다.

STEP2 함수의 최댓값이 -2 임을 이용하여 a 의 값 구하기

$f(x) = x^2 - 6x + 13$ 으로 놓으면 $f(x) = (x-3)^2 + 4$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값이 4이다.

따라서 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)=4$ 일 때 최댓값 -2 를 가지므로

$$\log_a 4 = -2, a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } 0 < a < 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

15

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후

$\log_3 x = t$ 로 치환한다.

STEP1 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_3 \frac{x}{3}\right) \left(\log_3 \frac{x}{27}\right) \\ &= (\log_3 x - \log_3 3)(\log_3 x - \log_3 27) \\ &= (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) \\ &= (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{3} \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 \frac{1}{3} \leq \log_3 x \leq \log_3 27$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내고 최댓값 M 과 최솟값 m 의 값 구하기

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1$$

따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = (t-2)^2 - 1$ 은

$t = -1$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$M = (-1-2)^2 - 1 = 8$$

$t = 2$ 일 때 최소이고, 최솟값은

$$m = (2-2)^2 - 1 = -1 \quad \dots\dots ②$$

STEP3 $M+m$ 의 값 구하기

$$\therefore M+m = 8+(-1) = 7 \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① 주어진 함수의 식을 정리한 후 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	40 %
② M, m 의 값 구하기	40 %
③ $M+m$ 의 값 구하기	20 %

16

해결전략 | 지수에 상용로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취한다.

STEP1 주어진 식의 양변에 상용로그를 취하여 식 정리하기

$$\begin{aligned} y &= (100x)^{6-\log x} \text{의 양변에 상용로그를 취하면} \\ \log y &= \log (100x)^{6-\log x} = (6-\log x)\log 100x \\ &= (6-\log x)(2+\log x) \\ &= -(\log x)^2 + 4\log x + 12 \end{aligned}$$

STEP2 $\log x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$\log x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 1000$ 에서

$$\log 1 \leq \log x \leq \log 10^3$$

$$0 \leq t \leq 3$$

STEP 3 주어진 함수의 최댓값과 그때의 x 의 값 구하기

$$\log y = -t^2 + 4t + 12 = -(t-2)^2 + 16$$

따라서 $0 \leq t \leq 3$ 에서 $\log y = -(t-2)^2 + 16$ 은

$t=2$ 일 때 최댓값 16을 가지므로

$$t = \log x = 2 \text{에서 } x = 10^2 \quad \therefore a = 10^2$$

$$\log y = 16 \text{에서 } y = 10^{16} \quad \therefore b = 10^{16}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{10^{16}}{10^2} = 10^{14}$$

17

해결전략 | 공통부분이 나오도록 주어진 식을 변형하여 산술 평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP 1 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+y) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}(2x+y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 5\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최댓값 구하기

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{2x}{y} \times \frac{2y}{x}} + 5 = 9$$

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립한다.)

이때 밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 5 \text{가 최소일 때 최대가 된다.}$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} + 5\right) \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{3^{-1}} 3^2 = -2$$

따라서 구하는 최댓값은 -2 이다.

상위권 도약 문제

127~128쪽

- 01 $\frac{1}{2}$ 02 ③ 03 32 04 ③ 05 ③
06 162 07 ④

01

해결전략 | 함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용한다.

STEP 1 함수 $y=f(x)$ 구하기

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2(x+1)$$

$y=\log_2(x+1)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2(-x+1)$$

$$\therefore f(x) = \log_2(-x+1)$$

STEP 2 삼각형 OAB가 이등변삼각형임을 이용하여 점 B의 좌표 구하기

한편, 두 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ 에 대하여 삼각형 OAB가 $\overline{OB} = \overline{AB}$ 인 이등변삼각형이므로 점 B는 선분 OA의 수직이등분선 위의 점이다.

선분 OA의 수직이등분선은 직선 $x = \frac{1}{2}$ 이므로 점 B의

x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

점 B는 $f(x) = \log_2(-x+1)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

STEP 3 삼각형 OAB의 넓이 구하기

삼각형 OAB의 밑변의 길이가 $\overline{OA} = 1 - 0 = 1$, 높이가 (점 B의 y 좌표) $= |-1| = 1$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

02

해결전략 | 선분 PQ의 중점이 원의 중심과 일치하고, 선분 PQ의 길이가 원의 지름과 같음을 이용한다.

STEP 1 선분 PQ의 중점이 원 C의 중심과 일치함을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표 구하기

$P(p, \log_a p)$, $Q(q, \log_a q)$ ($p > q$)라고 하면 선분 PQ

의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 과 일치하므로

$$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{4}, \frac{\log_a p + \log_a q}{2} = 0 \text{에서}$$

$$p+q = \frac{5}{2}, \log_a pq = 0$$

$$\text{즉, } p+q = \frac{5}{2}, pq = 1$$

p, q 를 두 실근으로 갖는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0, 2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad \rightarrow t^2 - (p+q)t + pq = 0$$

$$(2t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉, } p=2, q=\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$P(2, \log_a 2), Q\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$$

STEP2 선분 PQ의 길이가 원의 지름의 길이와 같음을 이용하여 a 의 값 구하기

선분 PQ의 길이가 원 C의 지름의 길이 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 과 같으므로

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \{\log_a 2 - (-\log_a 2)\}^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

위의 식을 정리하면

$$4(\log_a 2)^2 = 1, (\log_a 2)^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \log_a 2 = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } a > 1 \text{ 이므로 } \log_a 2 = \frac{1}{2}, \sqrt{a} = 2$$

$$\therefore a = 4$$

03

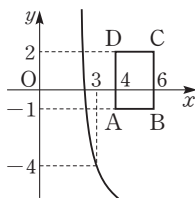
해결전략 먼저 주어진 함수의 그래프가 직사각형과 만나기 위한 a 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 a 의 값의 범위 구하기

$y = \log_a(x-2) - 4$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, -4)$ 를 지난다.

$0 < a < 1$ 일 때, 오른쪽 그림과 같이 $y = \log_a(x-2) - 4$ 의 그래프와 직사각형 ABCD는 만나지 않는다.

즉, 함수 $y = \log_a(x-2) - 4$ 에서 $a > 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.



STEP2 a 의 최댓값 M 과 최솟값 m 구하기

$a > 1$ 일 때, 오른쪽 그림에서

(i) $y = \log_a(x-2) - 4$ 의 그래프가 점 $B(6, -1)$ 을 지날 때, a 가 최대이므로

$$-1 = \log_a(6-2) - 4$$

$$\log_a 4 = 3, a^3 = 4$$

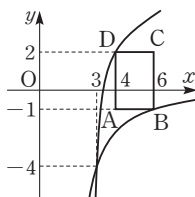
$$\therefore a = 4^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

따라서 a 의 최댓값은 $M = 2^{\frac{2}{3}}$

(ii) $y = \log_a(x-2) - 4$ 의 그래프가 점 $D(4, 2)$ 를 지날 때, a 가 최소이므로

$$2 = \log_a(4-2) - 4, \log_a 2 = 6, a^6 = 2$$

$$\therefore a = 2^{\frac{1}{6}}$$



따라서 a 의 최솟값은 $m = 2^{\frac{1}{6}}$

(i), (ii)에 의하여

$$(Mm)^6 = (2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}})^6 = (2^{\frac{5}{6}})^6 = 2^5 = 32$$

04

해결전략 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구해 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 두 점 A, B의 좌표를 a 에 대하여 나타내고 외분하는 점의 좌표 구하기

ㄱ. 점 A는 곡선 $y = \log_a x$ 와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점이므로 점 A의 x 좌표는 $\log_a x = 1$ 에서 $x = a$

$$\therefore A(a, 1)$$

점 B는 곡선 $y = \log_{4a} x$ 와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점이므로 점 B의 x 좌표는 $\log_{4a} x = 1$ 에서 $x = 4a$

$$\therefore B(4a, 1)$$

따라서 선분 AB를 1 : 4로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4a - 4 \times a}{1 - 4}, \frac{1 \times 1 - 4 \times 1}{1 - 4}\right), \text{ 즉 } (0, 1) \text{ (참)}$$

STEP2 두 점 A, D의 x 좌표가 같음을 이용하여 a 의 값 구하기

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x 축과 평행하므로 두 점 A, D의 x 좌표는 같아야 한다.

점 D는 곡선 $y = \log_{4a} x$ 와 직선 $y = -1$ 이 만나는 점이므로 점 D의 x 좌표는 $\log_{4a} x = -1$ 에서 $x = \frac{1}{4a}$

$$\therefore D\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$$

이때 점 A의 x 좌표는 a 이므로

$$a = \frac{1}{4a}, a^2 = \frac{1}{4}$$

주어진 조건에서 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ (참)

STEP3 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하여 a 의 값의 범위 구하기

ㄷ. ㄱ에서 $A(a, 1)$, $B(4a, 1)$ 이므로

$$\overline{AB} = 4a - a = 3a$$

점 C는 곡선 $y = \log_a x$ 와 직선 $y = -1$ 이 만나는 점

이므로 점 C의 x 좌표는 $\log_a x = -1$ 에서 $x = \frac{1}{a}$

$$\therefore C\left(\frac{1}{a}, -1\right)$$

ㄴ에서 $D\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$ 이므로 $\overline{CD} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a}$

한편, $\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면 $3a < \frac{3}{4a}, a^2 < \frac{1}{4}$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

주어진 조건에서 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05

해결전략 | 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 는 서로 역함수 관계임을 이용한다.

STEP1 역함수 관계를 이용하여 선분의 길이의 비 구하기

점 C는 직선 $y=-x+a$ 가 x 축과 만나는 점이므로 $C(a, 0)$ 이고, 직선 $y=-x+a$ 가 y 축과 만나는 점을 D라고 하면 $D(0, a)$ 이다.

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\overline{BC} = \overline{AD}$$

또, 조건 (가)에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{DC} : \overline{BC} = 5 : 1$$

STEP2 삼각형의 넓이의 비를 이용하여 a 의 값 구하기

두 삼각형 OCD와 OBC는 각각 $\overline{DC}$ 와 $\overline{BC}$ 를 밑변으로 하고 높이가 같으므로

$$\triangle OCD : \triangle OBC = \overline{DC} : \overline{BC} = 5 : 1$$

$$\text{즉, } \triangle OCD = 5\triangle OBC$$

$$\text{이때 } \triangle OBC = \frac{1}{5}\triangle OCD = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2} \times a^2\right) = \frac{1}{10}a^2 \text{이고}$$

조건 (나)에서 삼각형 OBC의 넓이는 40이므로

$$\frac{1}{10}a^2 = 40, a^2 = 400 \quad \therefore a = 20 \quad (\because a > 0)$$

STEP3 $p+q$ 의 값 구하기

점 $A(p, q)$ 는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이므로

$$q = -p + a$$

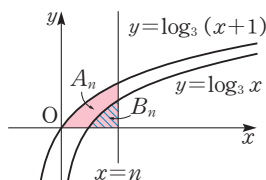
$$\therefore p + q = a = 20$$

06

해결전략 | 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$ 는 서로 역함수 관계임을 이용하여 도형 B_n 과 넓이가 같은 도형을 찾아본다.

STEP1 역함수 관계를 이용하여 도형 B_n 과 넓이가 같은 도형 찾기

함수 $y=3^x$ 의 역함수는 $y=\log_3 x$ 이므로 도형 B_n 은 다음 그림에서 빗금 친 부분과 넓이가 같다.



STEP2 $f(n)-g(n)=5$ 를 $g(n)$ 에 대한 식으로 나타내어 n 의 값의 범위 구하기

$y=\log_3 x$ 의 그래프는 $y=\log_3(x+1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$f(n) = g(n+1)$$

$$f(n) - g(n) = 5 \text{에서 } g(n+1) - g(n) = 5 \text{이므로}$$

$$4 \leq \log_3(n+1) < 5$$

정수인 점의 y좌표가
0, 1, 2, 3, 4의 5개이므로
 $4 \leq \log_3(n+1) < 5$

$$3^4 \leq n+1 < 3^5$$

$$\therefore 80 \leq n < 242$$

STEP3 자연수 n 의 개수 구하기

따라서 자연수 n 의 개수는

$$242 - 80 = 162$$

07

해결전략 | 공통부분이 나오도록 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 3 + \log_y 3}{\log_{xy} 3} &= \frac{\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y}}{\frac{1}{\log_3 xy}} \\ &= \frac{\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y}}{\frac{1}{\log_3 x + \log_3 y}} \end{aligned}$$

STEP2 치환하여 정리한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기

이때 $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 3 + \log_y 3}{\log_{xy} 3} &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a+b}} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1}{a+b}} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x > 1$, $y > 1$ 이므로 $a > 0$, $b > 0$

$\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} + 2$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 $\textcircled{1}$ 에서

$$2 + 2 = 4$$

01 답 (1) $x = -6$ (2) $x = \frac{4}{5}$

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^6, \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \quad \therefore x = -6$$

(2) $9^{x+1} = 27^{2-x}$ 에서

$$(3^2)^{x+1} = (3^3)^{2-x}$$

$$3^{2x+2} = 3^{6-3x}$$

$$\text{즉, } 2x+2 = 6-3x \text{이므로}$$

$$5x = 4 \quad \therefore x = \frac{4}{5}$$

02 답 (1) $x \leq 2$ (2) $x < -8$

(1) $5^{x+1} \leq 125$ 에서

$$5^{x+1} \leq 5^3$$

$$\text{밑이 5이고 } 5 > 1 \text{이므로}$$

$$x+1 \leq 3 \quad \therefore x \leq 2$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} > \left(\frac{1}{16}\right)^{x-2}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} > \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{x-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{5x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-8}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$5x < 4x-8 \quad \therefore x < -8$$

01-1 답 (1) $x = -4$ 또는 $x = -1$

(2) $x = 1$

(3) $x = -\frac{4}{3}$ 또는 $x = 2$

(4) $x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 1$

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한다.

(1) STEP1 양변의 밑을 3으로 같게 하여 식 변형하기

$$9^{x^2+2} = 3^{x^2-5x} \text{에서}$$

$$3^{2(x^2+2)} = 3^{x^2-5x}, 3^{2x^2+4} = 3^{x^2-5x}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 방정식 풀기

$$2x^2+4 = x^2-5x, x^2+5x+4 = 0$$

$$(x+4)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -1$$

(2) STEP1 양변의 밑을 2로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{4-x} = 8^{x-6} \text{에서}$$

$$2^{-5(4-x)} = 2^{3(x-6)}, 2^{-20+5x} = 2^{3x-18}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 방정식 풀기

$$-20+5x = 3x-18, 2x = 2$$

$$\therefore x = 1$$

(3) STEP1 양변의 밑을 5로 같게 하여 식 변형하기

$$(5\sqrt{5})^{x^2-2} = 5^{x+1} \text{에서} \rightarrow (5\sqrt{5}) = 5 \times 5^{\frac{1}{2}}$$

$$(5^{\frac{3}{2}})^{x^2-2} = 5^{x+1}, 5^{\frac{3}{2}x^2-3} = 5^{x+1} = 5^{1+\frac{1}{2}}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 풀기

$$\frac{3}{2}x^2-3 = x+1, 3x^2-6 = 2x+2$$

$$3x^2-2x-8 = 0, (3x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

(4) STEP1 양변의 밑을 $\frac{5}{6}$ 로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2x^2+4} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-7} \text{에서}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2x^2+4} = \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\right\}^{x-7}, \left(\frac{5}{6}\right)^{2x^2+4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-x+7}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 방정식 풀기

$$2x^2+4 = -x+7, 2x^2+x-3 = 0$$

$$(2x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

01-2 답 10

해결전략 | 먼저 $AB=0$ 이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 임을 이용하여 식을 변형한다.

STEP1 지수방정식 풀기

$$(2^x-8)(3^{2x}-9)=0 \text{에서}$$

$$2^x-8=0 \text{ 또는 } 3^{2x}-9=0$$

$$2^x=8 \text{ 또는 } 3^{2x}=9$$

$$2^x=8 \text{에서 } 2^x=2^3 \quad \therefore x=3$$

$$3^{2x}=9 \text{에서 } 9^x=9 \quad \therefore x=1$$

STEP2 $\alpha^2+\beta^2$ 의 값 구하기

따라서 주어진 방정식의 두 실근은 1, 3이므로

$$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$$

01-3 답 2

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한다.

STEP1 양변의 밑을 3으로 같게 하여 식 변형하기

$$\frac{9^{x^2+1}}{3^{-x+8}}=81\text{에서}$$

$$\frac{3^{2(x^2+1)}}{3^{-x+8}}=3^4, 3^{2x^2+2}=3^{-x+12}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 방정식을 풀고 정수 x 의 값 구하기

$$2x^2+2=-x+12, 2x^2+x-10=0$$

$$(2x+5)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{5}{2} \text{ 또는 } x=2$$

따라서 정수 x 의 값은 2이다.

01-4 답 ④

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 2^a 의 값을 구한다.

STEP1 2^a 의 값 구하기

$$2^{x+3}=1000\text{의 근이 } a\text{이므로}$$

$$2^{a+3}=2^x \times 8=1000$$

$$2^a=125$$

STEP2 a 의 값의 범위 구하기

$$\text{이때 } 2^6=64, 2^7=128\text{이므로}$$

$$64 < 125 < 128$$

$$\text{즉, } 2^6 < 2^a < 2^7\text{이므로}$$

$$6 < a < 7$$

01-5 답 6

해결전략 | 주어진 방정식의 밑을 같게 변형하여 지수끼리 비교한 후 $x=-2$ 를 대입하여 k 의 값을 구한다.

STEP1 양변의 밑을 2로 같게 하여 식을 변형한 후 양변의 지수 비교하기

$$2^{x^2-10x}-8^{-2x+k}=0\text{에서}$$

$$2^{x^2-10x}-(2^3)^{-2x+k}=0$$

$$2^{x^2-10x}=2^{-6x+3k}$$

$$\text{즉, } x^2-10x=-6x+3k\text{에서}$$

$$x^2-4x-3k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 한 근이 -2 임을 이용하여 k 의 값 구하기

방정식 ①의 한 근이 -2 이므로

$$4+8-3k=0 \quad \therefore k=4$$

STEP3 다른 한 근 구하기

$$\textcircled{1}\text{에서 } x^2-4x-12=0\text{이므로}$$

$$(x+2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 다른 한 근은 6이다.

01-6 답 -1

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한 후 $x^2=|x|^2$ 임을 이용한다.

STEP1 양변의 밑을 5로 같게 하여 식 변형하기

$$125^{|x|}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4}\text{에서}$$

$$5^{3|x|}=(5^{-1})^{x^2-4}, 5^{3|x|}=5^{-x^2+4}$$

STEP2 양변의 지수를 비교하여 방정식 풀기

$$3|x|=-x^2+4\text{이므로 } x^2+3|x|-4=0$$

$$x^2=|x|^2\text{이므로}$$

$$|x|^2+3|x|-4=0, (|x|+4)(|x|-1)=0$$

$$\text{이때 } |x|+4 \neq 0\text{이므로 } |x|=1$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

STEP3 모든 실근의 곱 구하기

따라서 모든 실근의 곱은

$$(-1) \times 1 = -1$$

필수유형 02

135쪽

02-1 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=2$

(3) $x=-2$ 또는 $x=0$ (4) $x=-3$

해결전략 | $a^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

(1) **STEP1** 3^x 꼴이 반복되는 방정식으로 변형하기

$$9^x-4 \times 3^{x+1}+27=0\text{에서}$$

$$(3^x)^2-12 \times 3^x+27=0$$

STEP2 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$3^x=t$$
 ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-12t+27=0, (t-3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

STEP3 구한 해에 t 대신 3^x 를 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } 3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=9\text{이므로}$$

$$3^x=3^1 \text{ 또는 } 3^x=3^2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(2) **STEP1** 2^x 꼴이 반복되는 방정식으로 변형하기

$$4^x+2^{x+1}-24=0\text{에서}$$

$$(2^x)^2+2 \times 2^x-24=0$$

STEP2 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$2^x=t$$
 ($t>0$)로 놓으면

$$t^2+2t-24=0, (t+6)(t-4)=0$$

$$\therefore t=-6 \text{ 또는 } t=4$$

$$\text{그런데 } t>0\text{이므로 } t=4$$

STEP3 구한 해에 t 대신 2^x 을 대입하여 x 의 값 구하기

즉, $2^x=4$ 이므로 $2^x=2^2$

$\therefore x=2$

(3) **STEP1** 3^x 꼴이 반복되는 방정식으로 변형하기

$3^{x+2}+3^{-x}=10$ 의 양변에 3^x 을 곱하면

$$9 \times (3^x)^2 + 1 = 10 \times 3^x$$

$$9 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 1 = 0$$

STEP2 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$9t^2 - 10t + 1 = 0, (9t-1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{9} \text{ 또는 } t = 1$$

STEP3 구한 해에 t 대신 3^x 을 대입하여 x 의 값 구하기

즉, $3^x = \frac{1}{9}$ 또는 $3^x = 1$ 이므로

$$3^x = 3^{-2} \text{ 또는 } 3^x = 3^0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

(4) **STEP1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 꼴이 반복되는 방정식으로 변형하기

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x \text{ 에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^3 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = 7 \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^3 - 7 \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

STEP2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 삼차방정식 풀기

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^3 - 7t^2 - 8t = 0, t(t+1)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1 \text{ 또는 } t = 8$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=8$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 을 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \text{ 이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\therefore x = -3$$

02-2 **답** (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ (2) $x=0$

해결전략 | 먼저 공통인 부분이 나타나도록 식을 변형한 후 공통인 부분을 t 로 치환한다.

(1) **STEP1** 공통인 부분이 나타나도록 식 변형하기

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \text{ 이므로}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x = 6 \text{ 에서}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x + \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 6$$

STEP2 $(3+2\sqrt{2})^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차방

정식 풀기

이때 $(3+2\sqrt{2})^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t + \frac{1}{t} = 6$$

양변에 t 를 곱하면

$$t^2 + 1 = 6t, t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$\therefore t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $(3+2\sqrt{2})^x$ 을 대입하여 x 의 값 구하기

즉, $(3+2\sqrt{2})^x = 3+2\sqrt{2}$ 또는

$$(3+2\sqrt{2})^x = 3-2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

(2) **STEP1** $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2$ 임을 이용하여 공통인

부분이 나타나도록 식 변형하기

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \text{ 이므로}$$

$$4^x + 4^{-x} + (2^x + 2^{-x}) - 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(2^x + 2^{-x})^2 + (2^x + 2^{-x}) - 6 = 0$$

STEP2 $2^x+2^{-x}=t$ ($t \geq 2$)로 놓고 t 의 값 구하기

$2^x+2^{-x}=t$ ($t \geq 2$)로 놓으면

$$t^2 + t - 6 = 0, (t+3)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 2$$

그런데 $t \geq 2$ 이므로 $t=2$

STEP3 x 의 값 구하기

따라서 $2^x+2^{-x}=2$ 이므로 $x=0$

→ $2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면
 $t^2-2t+1=0$
 $(t-1)^2=0 \therefore t=1$
 즉, $2^x=1$ 에서 $x=0$

☞ 품셈의 비법

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)

02-3 **답** 2

해결전략 | $2^x=X$, $5^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 치환하여 주어진 연립방정식을 X , Y 에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

STEP1 $2^x=X$, $5^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓고 X , Y 에 대한 연립방정식 세우기

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 5^y = 7 \\ 2^{x+2} - 5^{y-1} = 15 \end{cases} \text{ 에서}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times 2^x + 5^y = 7 \\ 4 \times 2^x - \frac{1}{5} \times 5^y = 15 \end{cases}$$

$2^x = X, 5^y = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + Y = 7 & \dots\dots \textcircled{A} \\ 4X - \frac{1}{5}Y = 15 & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases}$$

STEP2 X, Y 에 대한 연립방정식 풀기

$\textcircled{A} \times 8$ 을 하면

$$4X + 8Y = 56 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\frac{41}{5}Y = 41 \quad \therefore Y = 5$$

$Y = 5$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}X + 5 = 7, \quad \frac{1}{2}X = 2 \quad \therefore X = 4$$

STEP3 $\alpha\beta$ 의 값 구하기

즉, $2^x = 4, 5^y = 5$ 이므로

$$x = 2, y = 1$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha\beta = 2$$

🔗 풀법의 비법

$a^x = X, b^y = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 치환하면 X, Y 에 대한 연립방정식이 된다.

02-4 ㉡ 16

해결전략 $|a^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

STEP1 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$a^{2x} - 3 \times a^x + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(a^x)^2 - 3 \times a^x + 2 = 0$$

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

STEP2 한 근이 $\frac{1}{4}$ 임을 이용하여 a 의 값 구하기

즉, $a^x = 1$ 또는 $a^x = 2$ 이므로

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \log_a 2$$

이때 한 근이 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$\log_a 2 = \frac{1}{4}, \quad a^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\therefore a = 2^4 = 16 \quad \xrightarrow{\text{양변을 4제곱하면}} (a^{\frac{1}{4}})^4 = 2^4 \quad \therefore a = 2^4$$

02-5 ㉡ 65

해결전략 $|3^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식의 두 근이 $3^\alpha, 3^\beta$ 임을 이용한다.

STEP1 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기

$$9^x - 11 \times 3^x + 28 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 11 \times 3^x + 28 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 11t + 28 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

STEP2 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $9^\alpha + 9^\beta$ 의 값 구하기

방정식 $\textcircled{A}$ 의 두 근이 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\rightarrow$ 주어진 방정식의 실근이 α, β 이므로 $3^\alpha = t$ 로 치환한 방정식의 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이다.

$$3^\alpha + 3^\beta = 11, \quad 3^\alpha \times 3^\beta = 28$$

$$\therefore 9^\alpha + 9^\beta = 3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$$

$$= (3^\alpha + 3^\beta)^2 - 2 \times 3^\alpha \times 3^\beta$$

$$= 11^2 - 2 \times 28 = 65$$

02-6 ㉡ 3

해결전략 두 점 A, B의 좌표를 k 를 이용하여 나타낸 다음 거리를 이용하여 방정식을 세운다.

STEP1 두 점 A, B 사이의 거리가 32임을 이용하여 지수방정식 세우기

두 함수 $y = 4^x, y = 2^{x+2}$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$(k, 4^k), (k, 2^{k+2}) \text{이고}$$

$$\overline{AB} = 32 \text{이므로}$$

$$|4^k - 2^{k+2}| = 32$$

STEP2 $k > 2, k < 2$ 인 경우로 나

누어 k 의 값 구하기

(i) $k > 2$ 일 때, $4^k - 2^{k+2} = 32$ 이므로

$$(2^x)^2 - 4 \times 2^x - 32 = 0 \quad \xrightarrow{\text{그래프에서}} 4^k > 2^{k+2}$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 4t - 32 = 0, (t+4)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 8$$

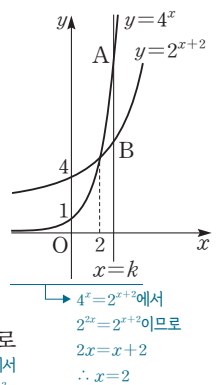
그런데 $t > 0$ 이므로 $t = 8$

$$\text{즉, } 2^k = 8 \text{이므로 } 2^k = 2^3$$

$$\therefore k = 3$$

(ii) $k < 2$ 일 때, $2^{k+2} - 4^k = 32$ 이므로

$$(2^x)^2 - 4 \times 2^x + 32 = 0 \quad \xrightarrow{\text{그래프에서}} 2^{k+2} > 4^k$$



$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 4t + 32 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times 32 = -28 < 0$$

이므로 방정식 ⑦은 실근을 갖지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k=3$

필수유형 03

137쪽

03-1 ㉠ (1) $x = \frac{2}{5}$ 또는 $x = 1$

(2) $x = -4$ 또는 $x = 2$

(3) $x = 4$ 또는 $x = 5$

(4) $x = 1$ 또는 $x = 3$

해결전략 | 주어진 지수방정식의 밑이 같은지 지수가 같은지 확인한다.

(1) 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) $x=1$ 일 때

주어진 방정식은 $1^5 = 1^2$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x \neq 1$ 일 때

$$x^{4x+1} = x^{-x+3} \text{에서}$$

$$4x+1 = -x+3, 5x=2 \quad \therefore x = \frac{2}{5}$$

(i), (ii)에 의하여 $x = \frac{2}{5}$ 또는 $x = 1$

(2) 지수가 같으므로 지수가 0이거나 밑이 같아야 한다.

(i) $x-2=0$, 즉 $x=2$ 일 때

주어진 방정식은 $9^0 = 3^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-2 \neq 0$, 즉 $x \neq 2$ 일 때

$$(x+7)^{x-2} = 3^{x-2} \text{에서}$$

$$x+7=3 \quad \therefore x = -4$$

(i), (ii)에 의하여 $x = -4$ 또는 $x = 2$

(3) 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) $x-3=1$, 즉 $x=4$ 일 때

주어진 방정식은 $1^{16} = 1^{10}$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-3 \neq 1$, 즉 $x \neq 4$ 일 때

$$(x-3)^{3x+4} = (x-3)^{x^2-6} \text{에서}$$

$$3x+4 = x^2-6, x^2-3x-10=0$$

$$(x+2)(x-5)=0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x > 3$ 이므로 $x=5$

(i), (ii)에 의하여 $x=4$ 또는 $x=5$

(4) 지수가 같으므로 지수가 0이거나 밑이 같아야 한다.

(i) $x-1=0$, 즉 $x=1$ 일 때

주어진 방정식은 $5^0 = 7^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-1 \neq 0$, 즉 $x \neq 1$ 일 때

$$(3x+2)^{x-1} = (2x+5)^{x-1} \text{에서}$$

$$3x+2 = 2x+5 \quad \therefore x = 3$$

(i), (ii)에 의하여 $x=1$ 또는 $x=3$

03-2 ㉡ 7

해결전략 | 지수방정식의 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같을 때 등식이 성립한다.

STEP1 지수방정식의 해 구하기

(i) $x=1$ 일 때

주어진 방정식은 $1^{-4} = 1^{11}$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x \neq 1$ 일 때

$$x^{x^2-5} = x^{4x+7} \text{에서}$$

$$x^2-5 = 4x+7, x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=6$

STEP2 모든 근의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 모든 근의 합은

$$1+6=7$$

03-3 ㉢ 8

해결전략 | 지수방정식의 밑과 지수를 각각 비교하여 두 집합 A, B 를 구한다.

STEP1 집합 A 구하기

$(x-2)^{x+5} = (x-2)^{2x+3}$ 에서 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) $x-2=1$, 즉 $x=3$ 일 때

주어진 방정식은 $1^8 = 1^9$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-2 \neq 1$, 즉 $x \neq 3$ 일 때

$$x+5 = 2x+3 \text{이므로 } x=2$$

그런데 $x > 2$ 인 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $A = \{3\}$

STEP2 집합 B 구하기

$(x+1)^{2x-1} = 3^{2x-1}$ 에서 지수가 같으므로 지수가 0이거나 밑이 같아야 한다.

(iii) $2x-1=0$, 즉 $x = \frac{1}{2}$ 일 때

주어진 방정식은 $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 3^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(iv) $2x-1 \neq 0$, 즉 $x \neq \frac{1}{2}$ 일 때

$$x+1=3 \text{이므로 } x=2$$

(iii), (iv)에 의하여 $B = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$

STEP3 집합 $A \cup B$ 의 부분집합의 개수 구하기

따라서 $A \cup B = \left\{ \frac{1}{2}, 2, 3 \right\}$ 이므로 집합 $A \cup B$ 의 부분집합의 개수는
 $2^3=8$

🔗 풀법의 비법

부분집합의 개수

원소의 개수가 n 인 집합 A 의 부분집합의 개수

$$\rightarrow 2^n$$

03-4 답 13

해결전략 | 지수방정식의 밑과 지수를 각각 비교한다.

STEP1 a 의 값 구하기

$(x-1)^{x^2-2} = (x-1)^{x+4}$ 에서 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) $x-1=1$, 즉 $x=2$ 일 때

주어진 방정식은 $1^2=1^6$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-1 \neq 1$, 즉 $x \neq 2$ 일 때

$$x^2-2=x+4 \text{에서}$$

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

그런데 $x > \frac{3}{2}$ 이므로 $x=3$

(i), (ii)에 의하여 모든 근의 곱은

$$a=2 \times 3=6$$

STEP2 b 의 값 구하기

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^{5-2x} = 3^{5-2x}$ 에서 지수가 같으므로 지수가 0이거나 밑이 같아야 한다.

(iii) $5-2x=0$, 즉 $x=\frac{5}{2}$ 일 때

주어진 방정식은 $1^0=3^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(iv) $5-2x \neq 0$, 즉 $x \neq \frac{5}{2}$ 일 때

$$x-\frac{3}{2}=3 \text{이므로 } x=\frac{9}{2}$$

(iii), (iv)에 의하여 모든 근의 합은

$$b=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=7$$

STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b=6+7=13$$

03-5 답 $x=2$

해결전략 | 먼저 지수법칙을 이용하여 $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ 꼴로 변형한다.

STEP1 지수법칙을 이용하여 주어진 식 변형하기

$$x \times x^{x+2} = (3x-4)^3(3x-4)^x \text{에서}$$

$$x^{x+3} = (3x-4)^{x+3}$$

STEP2 지수방정식의 해 구하기

지수가 같으므로 지수가 0이거나 밑이 같아야 한다.

(i) $x+3=0$, 즉 $x=-3$ 일 때

$$x > \frac{4}{3} \text{이므로 해가 없다.}$$

(ii) $x+3 \neq 0$, 즉 $x \neq -3$ 일 때

$$x^{x+3} = (3x-4)^{x+3} \text{에서}$$

$$x=3x-4, 2x=4 \quad \therefore x=2$$

(i), (ii)에 의하여 $x=2$

03-6 답 3

해결전략 | 방정식 $(x^2-x+1)^{x+2}=1$ 을 만족시키려면 지수가 0이거나 밑이 1이어야 한다.

STEP1 지수가 0일 때 주어진 방정식을 만족시키는지 확인하기

(i) $x+2=0$, 즉 $x=-2$ 일 때

주어진 방정식은 $7^0=1$ 이므로 등식이 성립한다.

STEP2 밑이 1일 때의 x 의 값 구하기

(ii) $x^2-x+1=1$ 일 때

$$x^2-x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

STEP3 정수 x 의 개수 구하기

(i), (ii)에 의하여 정수 x 는 $-2, 0, 1$ 의 3개이다.

▶참고 $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 이므로

$$x^2-x+1 > 0$$

필수유형 04

139쪽

04-1 답 $1 < k < 5$

해결전략 | $2^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가짐을 이용한다.

STEP1 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓고 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건 구하기

$$4^x - 2^{x+2} + k - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 4 \times 2^x + k - 1 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 4t + k - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 방정식 ⑦은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

STEP2 k 의 값의 범위 구하기

(i) 이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (k-1) > 0$$

$$5 - k > 0 \quad \therefore k < 5$$

(ii) (이차방정식 ⑦의 두 근의 합) $= 4 > 0$

(iii) (이차방정식 ⑦의 두 근의 곱) $= k - 1 > 0$

$$\therefore k > 1$$

(i)~(iii)에 의하여 $1 < k < 5$

04-2 **답** $a > 5$

해결전략 $5^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가짐을 이용한다.

STEP1 $5^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건 구하기

$$25^x - (a+1) \times 5^x + a + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2 - (a+1) \times 5^x + a + 4 = 0$$

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - (a+1)t + a + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 방정식 ⑦은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

STEP2 a 의 값의 범위 구하기

(i) 이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(a+1)\}^2 - 4(a+4) > 0$$

$$a^2 - 2a - 15 > 0, (a+3)(a-5) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 5$$

(ii) (이차방정식 ⑦의 두 근의 합) $= a + 1 > 0$

$$\therefore a > -1$$

(iii) (이차방정식 ⑦의 두 근의 곱) $= a + 4 > 0$

$$\therefore a > -4$$

(i)~(iii)에 의하여 $a > 5$

04-3 **답** $\frac{1}{2}$

해결전략 $4^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 방정식의 두 근이 $4^\alpha, 4^\beta$ 임을 이용한다.

STEP1 $4^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 방정식의 두 근을 α, β 로 나타내기

$$2 \times 16^x - 5 \times 4^x + k = 0 \text{에서}$$

$$2 \times (4^x)^2 - 5 \times 4^x + k = 0$$

$4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$2t^2 - 5t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ⑦의 두 근은 $4^\alpha, 4^\beta$ 이다.

STEP2 k 의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4^\alpha \times 4^\beta = \frac{k}{2} \text{이므로 } 4^{\alpha+\beta} = \frac{k}{2}$$

이때 $\alpha + \beta = -1$ 이므로

$$4^{-1} = \frac{k}{2}, \frac{1}{4} = \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

04-4 **답** 6

해결전략 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식이 양수인 중근을 가짐을 이용한다.

STEP1 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 방정식이 오직 하나의 실근을 가질 조건 구하기

$$4^x - k \times 2^{x+1} + 16 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 2k \times 2^x + 16 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$t > 0$ 이고 두 근의 곱이 양수이므로 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 방정식 ⑦은 양수인 중근을 가져야 한다.

STEP2 판별식을 이용하여 k 의 값 구하기

이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 16 = 0$$

$$k^2 - 16 = 0, (k+4)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

STEP3 $k + \alpha$ 의 값 구하기

(i) $k = -4$ 를 ⑦에 대입하면

$$t^2 + 8t + 16 = 0, (t+4)^2 = 0 \quad \therefore t = -4$$

$t > 0$ 인 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k = 4$ 를 ⑦에 대입하면

$$t^2 - 8t + 16 = 0, (t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

즉, $2^x = 4$ 이므로 $x = 2$

(i), (ii)에 의하여 $k = 4, \alpha = 2$ 이므로

$$k + \alpha = 6$$

04-5 ㉔ 2

해결전략 | $2^x=t$ 로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식의 두 근이 모두 2보다 크다는 것을 이용한다.

STEP 1 $2^x=t$ 로 놓고 방정식의 두 근이 1보다 클 조건 구하기

$$2^{2x} - (k-4) \times 2^{x+1} + 2k = 0 \text{에서}$$

$$2^{2x} - 2(k-4) \times 2^x + 2k = 0$$

$$2^x=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(k-4)t + 2k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크면 $x > 1$ 이

$$\text{므로 } t = 2^x > 2^1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

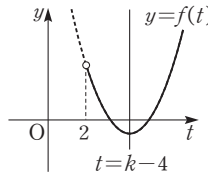
즉, t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의

두 근은 2보다 크다.

$f(t) = t^2 - 2(k-4)t + 2k$ 로

놓으면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프

가 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 k 의 값의 범위를 구하여 정수 k 의 개수 구하기

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k-4)\}^2 - 2k \geq 0$$

$$k^2 - 10k + 16 \geq 0, (k-2)(k-8) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 2 \text{ 또는 } k \geq 8$$

(ii) 함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$t = k-4 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서}$$

$$k-4 > 2 \quad \therefore k > 6$$

(iii) $f(2) > 0$ 이므로

$$4 - 4(k-4) + 2k > 0$$

$$-2k + 20 > 0 \quad \therefore k < 10$$

(i)~(iii)에 의하여 $8 \leq k < 10$

따라서 정수 k 는 8, 9의 2개이다.

04-6 ㉔ -4

해결전략 | 두 실근의 비가 1 : 2이므로 두 근을 $m, 2m$ ($m \neq 0$)으로 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP 1 $3^x=t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기

$$9^x + a \times 3^{x+1} + 15 - 3a = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 + 3a \times 3^x + 15 - 3a = 0$$

$$3^x=t \text{ ($t > 0$)로 놓으면}$$

$$t^2 + 3at + 15 - 3a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 두 근의 비와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 합과 곱 구하기

주어진 방정식의 두 근을 $m, 2m$ ($m \neq 0$)이라고 하면

방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $3^m, 3^{2m}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^m + 3^{2m} = -3a, 3^m \times 3^{2m} = 15 - 3a$$

STEP 3 a 의 값 구하기

$$3^m = k \text{ ($k > 0$)로 놓으면}$$

$$k + k^2 = -3a, k^3 = 15 - 3a$$

$$k^3 = 15 + k + k^2 \text{이므로}$$

$$k^3 - k^2 - k - 15 = 0$$

$$(k-3)(k^2 + 2k + 5) = 0$$

$$k^2 + 2k + 5 > 0 \text{이므로 } k-3=0 \quad \therefore k=3$$

따라서 $k + k^2 = -3a$ 에서

$$-3a = 3 + 3^2 = 12$$

$$\therefore a = -4$$

필수유형 05

141 쪽

05-1 ㉔ (1) $x \leq -\frac{1}{3}$

(2) $x > -2$

(3) $x < -3$ 또는 $x > \frac{1}{2}$ (4) $-4 \leq x \leq 2$

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한다.

이때 밑의 범위에 주의하여 부등식의 해를 구한다.

(1) **STEP 1** 양변의 밑을 7로 같게 하여 식 변형하기

$$7^{x-2} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-4x} \text{에서}$$

$$7^{x-2} \geq \{(7)^{-1}\}^{1-4x}, 7^{x-2} \geq 7^{4x-1}$$

STEP 2 양변의 지수의 크기를 비교하여 부등식 풀기

밑이 7이고 $7 > 1$ 이므로

$$x-2 \geq 4x-1, -3x \geq 1$$

$$\therefore x \leq -\frac{1}{3}$$

(2) **STEP 1** 양변의 밑을 $\frac{1}{3}$ 로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-x} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} < \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-x}, \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}x}$$

STEP 2 양변의 지수의 크기를 비교하여 부등식 풀기

밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$2x+5 > -\frac{1}{2}x, \frac{5}{2}x > -5$$

$$\therefore x > -2$$

(3) **STEP 1** 양변의 밑을 $\frac{3}{2}$ 으로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{5x} \text{에서}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3} > \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}^{5x}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-5x}$$

STEP2 양변의 지수의 크기를 비교하여 부등식 풀기

밑이 $\frac{3}{2}$ 이고 $\frac{3}{2} > 1$ 이므로

$$2x^2-3 > -5x, 2x^2+5x-3 > 0$$

$$(x+3)(2x-1) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > \frac{1}{2}$$

(4) STEP1 양변의 밑을 $\frac{1}{4}$ 로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2+x-4} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \leq \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{x^2+x-4}, \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2+2x-8}$$

STEP2 양변의 지수의 크기를 비교하여 부등식 풀기

밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로

$$x^2 \geq 2x^2+2x-8, x^2+2x-8 \leq 0$$

$$(x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

05-2 ㉮ 4

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한다.

STEP1 양변의 밑을 3으로 같게 하여 식 변형하기

$$\frac{27}{9^x} \geq 3^{x-9} \text{에서}$$

$$\frac{3^3}{(3^2)^x} \geq 3^{x-9}, 3^{3-2x} \geq 3^{x-9}$$

STEP2 지수부등식을 풀어 자연수 x 의 개수 구하기

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$3-2x \geq x-9, -3x \geq -12$$

$$\therefore x \leq 4$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

05-3 ㉮ 3

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 밑을 같게 변형한다.

STEP1 밑을 0.6으로 같게 하여 식 변형하기

$$0.6^{x^2-1} - 0.36^{x+1} > 0 \text{에서}$$

$$0.6^{x^2-1} - (0.6^2)^{x+1} > 0, 0.6^{x^2-1} > 0.6^{2x+2}$$

STEP2 지수부등식을 풀어 정수 x 의 값의 합 구하기

밑이 0.6이고 $0 < 0.6 < 1$ 이므로

$$x^2-1 < 2x+2, x^2-2x-3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2이므로 그 합은

$$0+1+2=3$$

05-4 ㉮ -2

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 각 변의 밑을 같게 변형한다.

STEP1 밑을 5로 같게 하여 식 변형하기

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} \leq 625 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-12} \text{에서}$$

$$(5^{-2})^{3x+1} \leq 5^4 \leq (5^{-1})^{4x-12}, 5^{-6x-2} \leq 5^4 \leq 5^{-4x+12}$$

STEP2 지수부등식의 해 구하기

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$-6x-2 \leq 4 \leq -4x+12$$

$$(i) -6x-2 \leq 4 \text{에서 } -6x \leq 6$$

$$\therefore x \geq -1$$

$$(ii) 4 \leq -4x+12 \text{에서 } 4x \leq 8$$

$$\therefore x \leq 2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$-1 \leq x \leq 2$$

STEP3 Mm 의 값 구하기

따라서 정수 x 의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로

$$M=2, m=-1$$

$$\therefore Mm=2 \times (-1)=-2$$

㉮ 뽕뽕의 비법

부등식 $A < B < C$ 꼴인 경우 $A < B$ 와 $B < C$ 로 나누어 본다.

05-5 ㉮ 33

해결전략 | 지수부등식을 푼 후 정수 x 의 개수가 30이 되도록 a 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 지수부등식 풀기

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} > 2^{ax} \text{에서 } 2^{-3x^2} > 2^{ax}$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$-3x^2 > ax, 3x^2+ax < 0$$

$$x(3x+a) < 0$$

이때 a 는 자연수이므로

$$-\frac{a}{3} < x < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

STEP2 정수 x 의 개수가 30이 되도록 하는 자연수 a 의 값의 합 구하기

㉠을 만족시키는 정수 x 의 개수가 30이므로 정수 x 는

-3, -2, -1이다. 즉,

$$-4 \leq -\frac{a}{3} < -3$$

$$\therefore 9 < a \leq 12$$

따라서 자연수 a 는 10, 11, 12이므로 그 합은

$$10 + 11 + 12 = 33$$

05-6 ㉮ 28

해결전략 $f(-6)=0$ 과 주어진 그래프를 이용하면

$f(x)=a(x+6)$ ($a>0$)으로 놓을 수 있다.

STEP1 일차함수 $f(x)$ 에 대한 식을 세우고 부등식의 해 구하기

$f(-6)=0$ 이므로 일차함수의 식은

$$f(x)=a(x+6) \quad (a>0 \text{인 상수})$$

으로 놓을 수 있다.

$$3^{f(x)} \leq 81 \text{에서 } 3^{f(x)} \leq 3^4$$

밑이 3이고 $3>1$ 이므로

$$f(x) \leq 4$$

STEP2 해가 $x \leq -5$ 일 때, $f(1)$ 의 값 구하기

즉, $a(x+6) \leq 4$ 이고 $a>0$ 이므로

$$x+6 \leq \frac{4}{a} \quad \therefore x \leq \frac{4}{a} - 6$$

주어진 부등식의 해가 $x \leq -5$ 이므로

$$\frac{4}{a} - 6 = -5, \quad \frac{4}{a} = 1 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f(x)=4(x+6)$ 이므로

$$f(1)=4 \times 7 = 28$$

●→ 다른 풀이

STEP1 일차함수 $f(x)$ 를 $f(x)=ax+b$ 로 놓고 a, b 의 값 구하기

$y=f(x)$ 는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하자.

$f(-6)=0$ 이므로

$$-6a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$3^{f(x)} \leq 81=3^4$ 에서 밑이 3이고 $3>1$ 이므로

$$f(x) \leq 4$$

부등식 $f(x) \leq 4$ 의 해가 $x \leq -5$ 이

므로 오른쪽 그림과 같이

$$f(-5)=4 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } -5a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

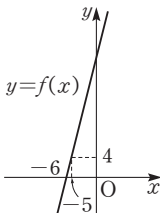
⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=4, b=24$$

STEP2 $f(1)$ 의 값 구하기

따라서 $f(x)=4x+24$ 이므로

$$f(1)=4+24=28$$



→ $x \leq -5$ 일 때 $f(x)$ 의 최댓값이 4이고, $f(x)$ 는 일차함수이므로 $f(-5)=4$

필수유형 06

143쪽

06-1 ㉮ (1) $1 < x < 7$

$$(2) 0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3$$

$$(3) 1 < x < 3$$

해결전략 $0 < (\text{밑}) < 1$, $(\text{밑}) = 1$, $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

(1) (i) $0 < x < 1$ 일 때

$$2x-5 > 9, 2x > 14 \quad \therefore x > 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$ 일 때

$$1^{-3} < 1^9 \text{이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$2x-5 < 9, 2x < 14 \quad \therefore x < 7$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 7$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 7$$

(2) (i) $0 < x < 1$ 일 때

$$8x-3 \leq 5x+6, 3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때

$$1^5 \leq 1^{11} \text{이므로 주어진 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$8x-3 \geq 5x+6, 3x \geq 9 \quad \therefore x \geq 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 3$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3$$

(3) (i) $0 < x < 1$ 일 때

$$x^2+4x > 3x+12, x^2+x-12 > 0$$

$$(x+4)(x-3) > 0 \quad \therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$ 일 때

$$1^5 > 1^{15} \text{이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$x^2+4x < 3x+12, x^2+x-12 < 0$$

$$(x+4)(x-3) < 0 \quad \therefore -4 < x < 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 3$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 3$$

06-2 ㉮ 9

해결전략 $0 < (\text{밑}) < 1$, $(\text{밑}) = 1$, $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP1 $0 < x < 1$, $x=1$, $x > 1$ 인 경우로 나눈 후 지수끼리 비교하여 풀기

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$x^2 - 3 > 4x + 2, x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x+1)(x-5) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$ 일 때

$1^{-2} < 1^6$ 이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$x^2 - 3 < 4x + 2, x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 5$

STEP2 주어진 부등식의 해를 구하여 정수 x 의 값의 합 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 5$$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4이므로 그 합은

$$2+3+4=9$$

06-3 ㉠ 0

해결전략 $0 < (\text{밀}) < 1$, $(\text{밀})=1$, $(\text{밀}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP1 $0 < x+1 < 1$, $x+1=1$, $x+1 > 1$ 인 경우로 나눈 후 지수끼리 비교하여 풀기

(i) $0 < x+1 < 1$, 즉 $-1 < x < 0$ 일 때

$$-2x+3 \geq 7, -2x \geq 4 \quad \therefore x \leq -2$$

그런데 $-1 < x < 0$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때

$$1^3 \leq 1^7 \text{이므로 주어진 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x+1 > 1$, 즉 $x > 0$ 일 때

$$-2x+3 \leq 7, -2x \leq 4 \quad \therefore x \geq -2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x > 0$

STEP2 주어진 부등식의 해를 구하여 정수 x 의 최솟값 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x \geq 0$$

따라서 실수 x 의 최솟값은 0이다.

06-4 ㉠ 3

해결전략 $0 < (\text{밀}) < 1$, $(\text{밀})=1$, $(\text{밀}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP1 $0 < x < 1$, $x=1$, $x > 1$ 인 경우로 나눈 후 지수끼리 비교하여 풀기

$$x^{2x^2-9x} > \frac{1}{x^4} \text{에서 } x^{2x^2-9x} > x^{-4}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$2x^2 - 9x < -4, 2x^2 - 9x + 4 < 0$$

$$(2x-1)(x-4) < 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < x < 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때

$1^{-7} > 1^{-4}$ 이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$2x^2 - 9x > -4, 2x^2 - 9x + 4 > 0$$

$$(2x-1)(x-4) > 0 \quad \therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 4$

STEP2 주어진 부등식의 해를 구하여 α, β, γ 의 값 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$\frac{1}{2} < x < 1 \text{ 또는 } x > 4$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = 4$ 이므로

$$\alpha\gamma + \beta = \frac{1}{2} \times 4 + 1 = 3$$

06-5 ㉠ 5

해결전략 $0 < (\text{밀}) < 1$, $(\text{밀})=1$, $(\text{밀}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP1 $0 < x-1 < 1$, $x-1=1$, $x-1 > 1$ 인 경우로 나눈 후 지수끼리 비교하여 풀기

(i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때

$$-x^2 + 5x \leq x - 12, x^2 - 4x - 12 \geq 0$$

$$(x+2)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 6$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x-1=1$, 즉 $x=2$ 일 때

$$1^6 \leq 1^{-10} \text{이므로 주어진 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때

$$-x^2 + 5x \geq x - 12, x^2 - 4x - 12 \leq 0$$

$$(x+2)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $2 < x \leq 6$

STEP2 주어진 부등식의 해를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$2 \leq x \leq 6$$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

06-6 ㉓ ③

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$, $(\text{밑}) = 1$, $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP1 $0 < x^2 - 6x + 9 < 1$, $x^2 - 6x + 9 = 1$,

$x^2 - 6x + 9 > 1$ 인 경우로 나누어 후 지수끼리 비교하여 풀기

(i) $0 < x^2 - 6x + 9 < 1$ 일 때

$$0 < (x-3)^2 < 1 \text{에서}$$

$$-1 < x-3 < 0 \text{ 또는 } 0 < x-3 < 1$$

$$\therefore 2 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

부등식 $(x^2 - 6x + 9)^{x-3} < 1$ 에서

$$(x^2 - 6x + 9)^{x-3} < (x^2 - 6x + 9)^0$$

밑이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x-3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에 의하여 $3 < x < 4$

(ii) $x^2 - 6x + 9 = 1$ 일 때

$1 < 1$ 이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x^2 - 6x + 9 > 1$ 일 때

$$x^2 - 6x + 8 > 0, (x-2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

부등식 $(x^2 - 6x + 9)^{x-3} < 1$ 에서

$$(x^2 - 6x + 9)^{x-3} < (x^2 - 6x + 9)^0$$

밑이 1보다 크므로

$$x-3 < 0 \quad \therefore x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔에 의하여 $x < 2$

STEP2 주어진 부등식의 해를 구하여 집합 A 의 원소가 아닌 것 찾기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x < 2 \text{ 또는 } 3 < x < 4$$

따라서 $A = \{x \mid x < 2 \text{ 또는 } 3 < x < 4\}$ 이므로

집합 A 의 원소가 아닌 것은 ㉓ $\frac{5}{2}$ 이다.

필수유형 07

145쪽

07-1 ㉓ (1) $x < -2$

(2) $x < 0$

(3) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ (4) $0 \leq x \leq 1$

해결전략 | $a^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

(1) **STEP1** 2^x 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$$4^{x+1} + 3 \times 2^x - 1 < 0 \text{에서}$$

$$4 \times (2^x)^2 + 3 \times 2^x - 1 < 0$$

STEP2 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$4t^2 + 3t - 1 < 0, (t+1)(4t-1) < 0$$

$$\therefore -1 < t < \frac{1}{4}$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < \frac{1}{4}$

STEP3 구한 해에 t 대신 2^x 을 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{즉, } 0 < 2^x < \frac{1}{4} \text{이므로 } 0 < 2^x < 2^{-2}$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x < -2$$

(2) **STEP1** $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x + 5 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2x} - 6 > 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 + 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - 6 > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

STEP2 $\left(\frac{1}{5}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식

풀기

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 5t - 6 > 0, (t+6)(t-1) > 0$$

$$\therefore t < -6 \text{ 또는 } t > 1$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t > 1$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 을 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

위 구하기

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{5}\right)^x > 1 \text{이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^0$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{5} \text{이고 } 0 < \frac{1}{5} < 1 \text{이므로}$$

$$x < 0$$

(3) **STEP1** 3^x 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$$3^{2x+1} - 10 \times 3^x + 3 \geq 0 \text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 3 \geq 0$$

STEP2 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$3t^2 - 10t + 3 \geq 0, (3t-1)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } t \geq 3$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq \frac{1}{3}$ 또는 $t \geq 3$

STEP3 구한 해에 t 대신 3^x 을 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

즉, $0 < 3^x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $3^x \geq 3$ 이므로

$0 < 3^x \leq 3^{-1}$ 또는 $3^x \geq 3^1$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$

(4) **STEP1** 7^x 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$7^x + 7^{-x+1} \leq 8$ 에서

$7^x + \frac{7}{7^x} - 8 \leq 0$

STEP2 $7^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$7^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t + \frac{7}{t} - 8 \leq 0$

양변에 t 를 곱하여 정리하면

$t^2 - 8t + 7 \leq 0$, $(t-1)(t-7) \leq 0$

$\therefore 1 \leq t \leq 7$

STEP3 구한 해에 t 대신 7^x 을 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

즉, $1 \leq 7^x \leq 7$ 이므로 $7^0 \leq 7^x \leq 7^1$

밑이 7이고 $7 > 1$ 이므로

$0 \leq x \leq 1$

07-2 ㉮ 6

해결전략 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 2^x 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$4^x - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$ 에서

$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$

STEP2 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 - 10t + 16 \leq 0$, $(t-2)(t-8) \leq 0$

$\therefore 2 \leq t \leq 8$

STEP3 x 의 값의 범위를 구하여 모든 자연수 x 의 값의 합 구하기

즉, $2 \leq 2^x \leq 8$ 이므로 $2^1 \leq 2^x \leq 2^3$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$1 \leq x \leq 3$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

07-3 ㉮ 3

해결전략 $3^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 3^x 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 \leq 0$ 에서

$3 \times (3^x)^2 - 28 \times 3^x + 9 \leq 0$

STEP2 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$3t^2 - 28t + 9 \leq 0$, $(3t-1)(t-9) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$

STEP3 x 의 값의 범위를 구하여 최댓값 M , 최솟값 m 의 값 구하기

즉, $\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9$ 이므로 $3^{-1} \leq 3^x \leq 3^2$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$-1 \leq x \leq 2$

따라서 최댓값은 2이고 최솟값은 -1이므로

$M=2$, $m=-1$

$\therefore M-m=2-(-1)=3$

07-4 ㉮ 5

해결전략 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 꼴이 반복되는 부등식으로 변형하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

STEP2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 - \frac{1}{8}t < 8t - 1$, $t^2 - \frac{65}{8}t + 1 < 0$

$8t^2 - 65t + 8 < 0$, $(8t-1)(t-8) < 0$

$\therefore \frac{1}{8} < t < 8$

STEP3 x 의 값의 범위를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

즉, $\frac{1}{8} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$-3 < x < 3$

따라서 정수 x 는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

07-5 ㉮ 1

해결전략 반복되는 a^x 꼴을 치환하여 만든 두 이차부등식을 각각 푼다.

STEP1 $5^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식을 풀 후 x 의 값의 범위 구하기

$$5^x+5^{1-x}\leq 6 \text{에서}$$

$$5^x+\frac{5}{5^x}-6\leq 0$$

$5^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t+\frac{5}{t}-6\leq 0$$

양변에 t 를 곱하여 정리하면

$$t^2-6t+5\leq 0, (t-1)(t-5)\leq 0$$

$$\therefore 1\leq t\leq 5$$

$$\text{즉, } 1\leq 5^x\leq 5 \text{이므로 } 5^0\leq 5^x\leq 5^1$$

밑이 5이고 $5>1$ 이므로

$$0\leq x\leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\left(\frac{1}{4}\right)^x=s$ ($s>0$)로 놓고 s 에 대한 이차부등식을 풀

후 x 의 값의 범위 구하기

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x-14\times\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\leq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2-14\times\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\leq 0$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x=s$$
 ($s>0$)로 놓으면

$$s^2-14s-32\leq 0, (s+2)(s-16)\leq 0$$

$$\therefore -2\leq s\leq 16$$

그런데 $s>0$ 이므로 $0<s\leq 16$

$$\text{즉, } 0<\left(\frac{1}{4}\right)^x\leq 16, 0<\left(\frac{1}{4}\right)^x\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0<\frac{1}{4}<1$ 이므로

$$x\geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 $\alpha+\beta$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $0\leq x\leq 1$

따라서 $\alpha=0, \beta=1$ 이므로

$$\alpha+\beta=1$$

07-6 답 12

해결전략 $a^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 $a^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식으로 나타내기

$$a^{2x}-10\times a^x+b<0 \text{에서 } a^x=t$$
 ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-10t+b<0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 주어진 부등식의 해를 이용하여 t 에 대한 이차부등식 세우기

주어진 부등식의 해가 $0<x<2$ 이고 $a>1$ 이므로

$$a^0<a^x<a^2, \text{ 즉 } 1<t<a^2$$

부등식 $\textcircled{1}$ 의 해가 $1<t<a^2$ 이므로

$$(t-1)(t-a^2)<0, t^2-(a^2+1)t+a^2<0$$

STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $10=a^2+1, b=a^2$ 이므로

$$a^2=9=3^2 \text{에서 } a=3$$
 ($\because a>1$)

$$\therefore b=3^2=9$$

$$\therefore a+b=3+9=12$$

발전유형 08

147쪽

08-1 답 $k\geq 13$

해결전략 $5^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 t 에 대한 부등식이 $t>0$ 에서 항상 성립함을 이용한다.

STEP1 $5^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$25^x-2\times 5^{x+1}+2k-1\geq 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2-10\times 5^x+2k-1\geq 0$$

$$5^x=t$$
 ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-10t+2k-1\geq 0$$

STEP2 $t>0$ 인 범위에서 부등식이 항상 성립함을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

$$f(t)=t^2-10t+2k-1$$
로 놓으면

$$f(t)=(t-5)^2+2k-26$$

$t>0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

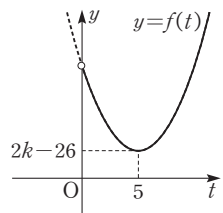
부등식 $f(t)\geq 0$ 이 항상 성립하

려면 오른쪽 그림과 같이

$$f(5)\geq 0$$
이어야 한다.

$$\text{즉, } 2k-26\geq 0 \text{이므로}$$

$$2k\geq 26 \quad \therefore k\geq 13$$



08-2 답 $a\geq -1$

해결전략 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 t 에 대한 부등식이 $t>0$ 에서 항상 성립함을 이용한다.

STEP1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a+1>0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+a+1>0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$$
 ($t>0$)로 놓으면

$$t^2 + 6t + a + 1 > 0$$

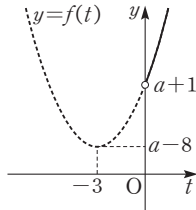
STEP 2 $t > 0$ 인 범위에서 부등식이 항상 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

$$f(t) = t^2 + 6t + a + 1 \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = (t+3)^2 + a - 8$$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $f(t) > 0$ 이 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a + 1 \geq 0 \text{이므로} \\ a \geq -1$$



08-3 ㉡ 8

해결전략 $2^{\frac{x}{2}} = t$ ($t > 0$)로 치환하여 t 에 대한 부등식이 $t > 0$ 에서 항상 성립함을 이용한다.

STEP 1 $2^{\frac{x}{2}} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$2^{\frac{x}{2}} = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$2^{x+1} = 2^x \times 2 = (2^{\frac{x}{2}})^2 \times 2 = 2t^2$$

$$2^{\frac{x+6}{2}} = 2^{\frac{x}{2}} \times 2^3 = 8t$$

이므로 주어진 부등식은

$$2t^2 - 8t + a \geq 0$$

STEP 2 $t > 0$ 인 범위에서 부등식이 항상 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

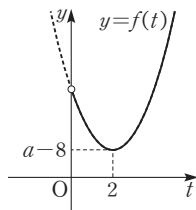
$$f(t) = 2t^2 - 8t + a \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = 2(t-2)^2 + a - 8$$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a - 8 \geq 0 \text{이므로} \\ a \geq 8$$

따라서 a 의 최솟값은 8이다.



08-4 ㉡ -5

해결전략 $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t$ 로 치환하여 t 의 값의 범위를 생각한다.

STEP 1 $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{36}\right)^x + 2a \leq 0 \text{에서}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x - \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^x \right\}^2 + 2a \leq 0$$

$$x \leq 0 \text{이므로 } \left(\frac{1}{6}\right)^x = t$$
 ($t \geq 1$)로 놓으면

$$6t - t^2 + 2a \leq 0$$

STEP 2 $t \geq 1$ 인 범위에서 부등식이 항상 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

$$f(t) = 6t - t^2 + 2a \text{로 놓으면}$$

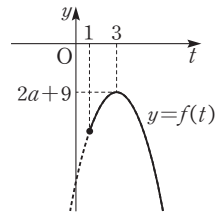
$$f(t) = -(t-3)^2 + 2a + 9$$

$t \geq 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $f(t) \leq 0$ 이 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 2a + 9 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a \leq -\frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -5이다.



08-5 ㉡ 3

해결전략 $7^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 t 에 대한 이차함수의 그래프의 대칭축의 위치를 생각한다.

STEP 1 $7^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$49^x - 14k \times 7^{x-1} + 9 \geq 0 \text{에서}$$

$$(7^x)^2 - 2k \times 7^x + 9 \geq 0$$

$$7^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 9 \geq 0$$

STEP 2 $t > 0$ 인 범위에서 그래프의 대칭축의 위치에 따라 k 의 값의 범위 구하기

$$f(t) = t^2 - 2kt + 9 \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = (t-k)^2 - k^2 + 9$$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립해야 한다.

(i) $k > 0$ 일 때

$$f(k) \geq 0, \text{ 즉 } -k^2 + 9 \geq 0 \text{이}$$

므로

$$(k+3)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 3$$

그런데 $k > 0$ 이므로

$$0 < k \leq 3$$

(ii) $k \leq 0$ 일 때

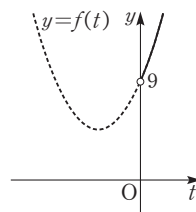
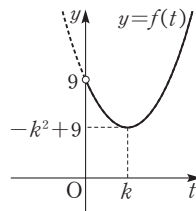
$$f(0) = 9 > 0 \text{이므로 } t > 0 \text{인}$$

모든 실수 t 에 대하여 부등식

$$f(t) \geq 0 \text{이 항상 성립한다.}$$

(i), (ii)에 의하여 $k \leq 3$

따라서 k 의 최댓값은 3이다.



08-6 답 $-1 < k < \frac{1}{2}$

해결전략 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $f(x) > 0$ 이 성립할 조건을 구하려면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 이용한다.

STEP1 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 조건 구하기

$$x^2 - (4^{k+1} - 6)x - 3 \times 4^k + 7 > 0 \text{에서}$$

$$x^2 - 2(2 \times 4^k - 3)x - 3 \times 4^k + 7 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차부등식 $\textcircled{1}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2 - 2(2 \times 4^k - 3)x - 3 \times 4^k + 7 = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (2 \times 4^k - 3)^2 - (-3 \times 4^k + 7) < 0$$

$$4 \times (4^k)^2 - 9 \times 4^k + 2 < 0$$

STEP2 $4^k = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$4^k = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$4t^2 - 9t + 2 < 0, (4t - 1)(t - 2) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} < t < 2$$

즉, $4^{-1} < 4^k < 4^{\frac{1}{2}}$ 이고, 밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로

$$-1 < k < \frac{1}{2}$$

🎯 품셈의 비법

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

발전유형 09

149쪽

09-1 답 (1) 24 m (2) 8 m

해결전략 주어진 조건을 식으로 나타내어 지수방정식과 지수부등식을 푼다.

(1) 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{64}$ 이 되는 곳의 수심을 x m

$$\text{라고 하면 } I_0 \times 2^{-\frac{x}{4}} = \frac{1}{64} I_0 \text{에서}$$

$$2^{-\frac{x}{4}} = \frac{1}{64}, 2^{-\frac{x}{4}} = 2^{-6}$$

$$-\frac{x}{4} = -6 \quad \therefore x = 24$$

따라서 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{64}$ 이 되는 곳의 수심은 24 m이다.

(2) 수심이 x m부터 수면에서 빛의 세기의 25 % 이하가

$$\text{된다고 하면 } I_0 \times 2^{-\frac{x}{4}} \leq \frac{25}{100} I_0 \text{에서}$$

$$2^{-\frac{x}{4}} \leq \frac{1}{4}, 2^{-\frac{x}{4}} \leq 2^{-2}$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$-\frac{x}{4} \leq -2 \quad \therefore x \geq 8$$

따라서 수면에서 빛의 세기의 25 % 이하가 되려면 수심은 최소 8 m이어야 한다.

09-2 답 2

해결전략 주어진 식의 t 에 2, 4를 각각 대입하여 $\frac{Q(4)}{Q(2)}$ 를

a 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\frac{Q(4)}{Q(2)}$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기

$$a > 0 \text{에서 } 0 < 2^{-\frac{2}{a}} < 1 \text{이므로}$$

$$1 - 2^{-\frac{2}{a}} > 0 \quad \rightarrow \text{함수 } y = 2^x \text{에서 } x < 0 \text{이면 } 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} \frac{Q(4)}{Q(2)} &= \frac{Q_0(1 - 2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1 - 2^{-\frac{2}{a}})} = \frac{1 - (2^{-\frac{2}{a}})^2}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}} \\ &= \frac{(1 - 2^{-\frac{2}{a}})(1 + 2^{-\frac{2}{a}})}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}} \\ &= 1 + 2^{-\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

STEP2 $\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$ 을 만족시키는 a 의 값 구하기

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$1 + 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{3}{2}, 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2}, 2^{-\frac{2}{a}} = 2^{-1}$$

$$\text{따라서 } -\frac{2}{a} = -1 \text{이므로 } a = 2$$

09-3 답 3년

해결전략 주어진 조건을 식으로 나타내어 지수부등식을 푼다.

STEP1 구매 후 x 년이 지났을 때, x 에 대한 부등식 세우기

125만 원에 구매한 제품의 x 년 후 사이트에 설정되는 가

격은 $125 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x$ 만 원이므로

$$125 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq 64 \quad \rightarrow \text{1년이 지날 때마다 20 \%씩 가격이 떨어지므로}$$

제품의 가격은 처음 가격의 80 %, 즉 $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

가 된다.

STEP2 부등식 풀기

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \frac{64}{125}, \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

밑이 $\frac{4}{5}$ 이고 $0 < \frac{4}{5} < 1$ 이므로

$$x \geq 3$$

따라서 구매 후 3년 이상인 제품이다.

09-4 4장

해결전략 | 주어진 조건을 식으로 나타내어 지수부등식을 푼다.

STEP1 필름을 x 장 붙일 때, x 에 대한 부등식 세우기

처음 빛의 양을 1이라고 하면 필름을 x 장 붙일 때 통과하

는 빛의 양은 $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 이므로

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq \frac{1}{128}$$

STEP2 부등식 풀기

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$2x \geq 7 \quad \therefore x \geq 3.5$$

이때 x 는 자연수이므로 x 의 최솟값은 4이다.

따라서 필름을 최소 4장 붙여야 한다.

실전 연습 문제

150~152쪽

01 4	02 ③	03 ②	04 5	05 ②
06 ②	07 5	08 ①	09 ④	10 ④
11 ⑤	12 2	13 3	14 ③	15 ④
16 9	17 ③			

01

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 양변의 밑을 같게 변형한다.

STEP1 양변의 밑을 2로 같게 하여 식 변형하기

$$2^{x^2-5x} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x-3} \text{ 에서}$$

$$2^{x^2-5x} = 2^{-4(x-3)}, 2^{x^2-5x} = 2^{-4x+12}$$

STEP2 양수 x 의 값 구하기

$$x^2-5x = -4x+12, x^2-x-12=0$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 양수 x 의 값은 4이다.

02

해결전략 | $f(ax+b)$ 는 $f(x)$ 에 x 대신 $ax+b$ 를 대입한다.

STEP1 $f(x)$ 에 x 대신 각각 $2x$, $x+1$ 을 대입하여 주어진

등식 변형하기

$$f(2x) - 8f(x+1) = 81 \text{ 에서}$$

$$3^{2x} - 8 \times 3^{x+1} = 81$$

$$(3^x)^2 - 24 \times 3^x - 81 = 0$$

STEP2 $3^x = t$ ($t > 0$) 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$3^x = t$$
 ($t > 0$) 로 놓으면

$$t^2 - 24t - 81 = 0, (t+3)(t-27) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 27$$

$$t > 0 \text{ 이므로 } t = 27$$

STEP3 구한 해에 t 대신 3^x 를 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } 3^x = 27 \text{ 이므로 } 3^x = 3^3$$

$$\therefore x = 3$$

03

해결전략 | 양변에 2^x 을 곱한 후 $2^x = t$ ($t > 0$) 로 치환한다.

STEP1 2^x 곱이 반복되는 방정식으로 변형하기

$$2^x + 2^{5-x} = 33 \text{ 의 양변에 } 2^x \text{ 을 곱하면}$$

$$(2^x)^2 + 2^5 = 33 \times 2^x$$

$$(2^x)^2 - 33 \times 2^x + 32 = 0$$

STEP2 $2^x = t$ ($t > 0$) 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$2^x = t$$
 ($t > 0$) 로 놓으면

$$t^2 - 33t + 32 = 0, (t-1)(t-32) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 32$$

STEP3 구한 해에 t 대신 2^x 를 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } 2^x = 1 \text{ 또는 } 2^x = 32 \text{ 이므로}$$

$$2^x = 2^0 \text{ 또는 } 2^x = 2^5$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 5$$

STEP4 모든 실근의 합 구하기

따라서 모든 실근의 합은

$$0 + 5 = 5$$

04

해결전략 | $3^x = X$, $3^y = Y$ ($X > 0$, $Y > 0$) 로 치환하여 주어진 연립방정식을 X , Y 에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

STEP1 $3^x = X$, $3^y = Y$ ($X > 0$, $Y > 0$) 로 놓고 X , Y 에 대한 연립방정식 세우기

$$\begin{cases} 3^{x+1} + 3^y = 18 \\ 3^{x+y-1} = 9 \end{cases} \text{ 에서 } \begin{cases} 3 \times 3^x + 3^y = 18 \\ \frac{1}{3} \times 3^x \times 3^y = 9 \end{cases}$$

$3^x = X, 3^y = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} 3X + Y = 18 \\ \frac{1}{3}XY = 9 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} 3X + Y = 18 & \dots\dots \textcircled{1} \\ XY = 27 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 X, Y 에 대한 연립방정식 풀기

$\textcircled{1}$ 에서 $Y = 18 - 3X$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$X(18 - 3X) = 27$$

$$18X - 3X^2 = 27$$

$$X^2 - 6X + 9 = 0, (X - 3)^2 = 0$$

$$\therefore X = 3, Y = 9 \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 $a^2 + \beta^2$ 의 값 구하기

즉, $3^x = 3, 3^y = 9$ 이므로

$$x = 1, y = 2$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① $3^x = X, 3^y = Y$ 에 대한 연립방정식 세우기	40 %
② X, Y 의 값 구하기	30 %
③ $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값 구하기	30 %

05

해결전략 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

STEP1 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기

$$2^{2x+1} - a \times 2^x + 8 = 0 \text{에서}$$

$$2 \times (2^x)^2 - a \times 2^x + 8 = 0$$

$$2^x = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 - at + 8 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 값 구하기

주어진 방정식의 두 근이 $-1, b$ 이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^b$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} + 2^b = \frac{a}{2} \text{에서 } 2^b = \frac{a-1}{2} \therefore 2^{b+1} = a-1$$

$$\frac{1}{2} \times 2^b = 4 \text{에서 } 2^b = 8, 2^b = 2^3 \therefore b = 3$$

$$\text{즉, } 2^{3+1} = a-1 \text{이므로 } a = 17$$

$$\therefore a - b = 17 - 3 = 14$$

06

해결전략 $|$ 밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같을 때 등식이 성립한다.

STEP1 지수방정식의 해 구하기

밑이 같으므로 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) $x+5=1$, 즉 $x=-4$ 일 때

주어진 방정식은 $1^4 = 1^{14}$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+5 \neq 1$, 즉 $x \neq -4$ 일 때

$$(x+5)^{x^2+3x} = (x+5)^{6-2x} \text{에서}$$

$$x^2 + 3x = 6 - 2x, x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x+6)(x-1) = 0 \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x > -5$ 이므로 $x = 1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

STEP2 모든 근의 합 구하기

따라서 모든 근의 합은

$$-4 + 1 = -3$$

07

해결전략 $3^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가짐을 이용한다.

STEP1 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건 구하기

$$9^x - 2k \times 3^x + 2k + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 2k \times 3^x + 2k + 8 = 0$$

$$3^x = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2kt + 2k + 8 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다. $\dots\dots \textcircled{1}$

STEP2 k 의 값의 범위를 구하여 정수 k 의 최솟값 구하기

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (2k+8) > 0$$

$$k^2 - 2k - 8 > 0, (k+2)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 4$$

(ii) (이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 합) $= 2k > 0$

$$\therefore k > 0$$

(iii) (이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 곱) $= 2k + 8 > 0$

$$\therefore k > -4$$

(i)~(iii)에 의하여 $k > 4 \dots\dots \textcircled{2}$

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

채점 요소	배점
① $3^x = t$ 로 놓고 근의 조건 파악하기	40 %
② k 의 값의 범위 구하기	50 %
③ 정수 k 의 최솟값 구하기	10 %

08

해결전략 | $ab > 0$ 이면 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 임을 이용한다.

STEP1 $2^x - 32 > 0, \frac{1}{3^x} - 27 > 0$ 일 때, 부등식의 해 구하기

(i) $2^x - 32 > 0, \frac{1}{3^x} - 27 > 0$ 일 때

$$2^x > 32 \text{에서 } 2^x > 2^5$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{3^x} > 27 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$x < -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x 의 값은 존재하지 않는다.

STEP2 $2^x - 32 < 0, \frac{1}{3^x} - 27 < 0$ 일 때, 부등식의 해 구하기

(ii) $2^x - 32 < 0, \frac{1}{3^x} - 27 < 0$ 일 때

$$2^x < 32 \text{에서 } 2^x < 2^5$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\frac{1}{3^x} < 27 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

밑이 $\frac{1}{3}$ 이고 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣에 의하여 $-3 < x < 5$

STEP3 주어진 부등식의 해를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

(i), (ii)에 의하여 $-3 < x < 5$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 4$ 의 7개이다.

09

해결전략 | 지수법칙을 이용하여 각 변의 밑을 같게 변형한다.

STEP1 각 변의 밑을 같게 하여 식 변형하기

$$9^{\frac{1}{2}x^2-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} < 3^{x+1} \text{에서}$$

$$(3^2)^{\frac{1}{2}x^2-2} < (3^{-1})^{1-2x} < 3^{x+1}$$

$$3^{x^2-4} < 3^{2x-1} < 3^{x+1}$$

STEP2 x 의 값의 범위 구하기

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$x^2 - 4 < 2x - 1 < x + 1$$

(i) $x^2 - 4 < 2x - 1$ 에서

$$x^2 - 2x - 3 < 0, (x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

(ii) $2x - 1 < x + 1$ 에서

$$x < 2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-1 < x < 2$$

10

해결전략 | 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 양변의 밑을 $\frac{1}{2}$ 로 같게 변형하여 부등식 나타내기

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{g(x)}, \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$f(x)g(x) \leq 3g(x)$$

STEP2 그래프를 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$f(x)g(x) - 3g(x) \leq 0 \text{에서 } \{f(x) - 3\}g(x) \leq 0$$

(i) $f(x) - 3 \geq 0, g(x) \leq 0$ 일 때

즉, $f(x) \geq 3, g(x) \leq 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\begin{array}{l} x \leq 1 \quad \begin{array}{l} \rightarrow f(x) \geq 3 \text{이면 } x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5 \\ g(x) \leq 0 \text{이면 } x \leq 3 \text{ 이므로 공통 범위는 } x \leq 1 \end{array} \end{array}$$

(ii) $f(x) - 3 \leq 0, g(x) \geq 0$ 일 때

즉, $f(x) \leq 3, g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$3 \leq x \leq 5$$

(i), (ii)에 의하여 $\begin{array}{l} \rightarrow f(x) \leq 3 \text{이면 } 1 \leq x \leq 5 \\ g(x) \geq 0 \text{이면 } x \geq 3 \text{ 이므로 공통 범위는 } 3 \leq x \leq 5 \end{array}$

$$x \leq 1 \text{ 또는 } 3 \leq x \leq 5$$

따라서 자연수 x 는 1, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

11

해결전략 | 지수부등식을 풀 후 정수 x 의 개수가 4가 되도록 하는 k 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 지수부등식 풀기

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{x^2} > (\sqrt{5})^{kx} \text{에서}$$

$$(5^{-2})^{x^2} > (5^{\frac{1}{2}})^{kx}, 5^{-2x^2} > 5^{\frac{1}{2}kx}$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$-2x^2 > \frac{1}{2}kx, 2x^2 + \frac{1}{2}kx < 0$$

$$\frac{1}{2}x(4x+k) < 0$$

그런데 k 가 자연수이므로

$$-\frac{k}{4} < x < 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP 2 정수 x 의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 k 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 값 구하기

⑦을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4이므로 정수 x 는

$-4, -3, -2, -1$ 이다. 즉,

$$-5 \leq -\frac{k}{4} < -4 \quad \therefore 16 < k \leq 20$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 20, 최솟값은 17이므로

$$M=20, m=17$$

$$\therefore M+m=20+17=37$$

12

해결전략 $0 < (\text{밑}) < 1$, $(\text{밑}) = 1$, $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

STEP 1 $0 < x < 1$, $x=1$, $x > 1$ 인 경우로 나눈 후 지수끼리 비교하여 풀기

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$-x+4 < 3x-8, -4x < -12 \quad \therefore x > 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.

(ii) $x=1$ 일 때

$1^3 > 1^{-5}$ 이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$-x+4 > 3x-8, -4x > -12 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 3$

STEP 2 주어진 부등식의 해를 구하여 $\beta - \alpha$ 의 값 구하기

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 3$$

따라서 $\alpha=1, \beta=3$ 이므로

$$\beta - \alpha = 3 - 1 = 2$$

13

해결전략 두 집합 A, B 의 부등식에서 반복되는 a^x 꼴을 치환하여 만든 두 이차부등식을 각각 푼다.

STEP 1 $3^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 t 에 대한 부등식을 풀어 집합 A 구하기

$$3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 \leq 0 \text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2 - 28 \times 3^x + 9 \leq 0$$

$$3^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$3t^2 - 28t + 9 \leq 0, (3t-1)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9 \text{이므로 } 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^2$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

..... ①

STEP 2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = s$ ($s > 0$)로 치환하여 s 에 대한 부등식을 풀

어 집합 B 구하기

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \text{에서}$$

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = s$$
 ($s > 0$)로 놓으면

$$4s^2 - 7s - 2 < 0, (4s+1)(s-2) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < s < 2$$

그런데 $s > 0$ 이므로 $0 < s < 2$

$$\text{즉, } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \text{이므로 } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$x > -1$$

$$\therefore B = \{x \mid x > -1\}$$

..... ②

STEP 3 집합 $A \cap B$ 에 속하는 모든 정수인 원소의 합 구하기

따라서 $A \cap B = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 에 속하는 정수인 원소의 합은

$$0 + 1 + 2 = 3$$

..... ③

채점 요소	배점
① 집합 A 구하기	40 %
② 집합 B 구하기	30 %
③ 집합 $A \cap B$ 에 속하는 모든 정수인 원소의 합 구하기	30 %

14

해결전략 $a^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP 1 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$8a^{2x} - 9a^x + 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$8(a^x)^2 - 9a^x + 1 \leq 0$$

$$a^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$8t^2 - 9t + 1 \leq 0, (8t-1)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq t \leq 1$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq a^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

STEP 2 a 의 값 구하기

주어진 부등식의 해가 $0 \leq x \leq 3$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}$$

15

해결전략 $2^{f(t)} = t$ ($t > 0$)로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP 1 $2^{f(t)} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$4^{f(x)} - 2^{1+f(x)} < 8 \text{에서}$$

$$\{2^{f(x)}\}^2 - 2 \times 2^{f(x)} - 8 < 0$$

$$2^{f(x)} = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 8 < 0, (t+2)(t-4) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 4$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 4$

STEP 2 x 의 값의 범위를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

$$\text{즉, } 0 < 2^{f(x)} < 4 \text{이므로 } 0 < 2^{f(x)} < 2^2$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$f(x) < 2, x^2 - x - 4 < 2$$

$$x^2 - x - 6 < 0, (x+2)(x-3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

16

해결전략 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하여 t 에 대한 이차함수의 그래프의 대칭축의 위치를 생각한다.

STEP 1 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$4^x - (k-4) \times 2^{x+1} + 2k \geq 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 2(k-4) \times 2^x + 2k \geq 0$$

$$2^x = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(k-4)t + 2k \geq 0$$

STEP 2 $t > 0$ 인 범위에서 그래프의 대칭축의 위치에 따라 k 의 값의 범위 구하기

$$f(t) = t^2 - 2(k-4)t + 2k \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = \{t - (k-4)\}^2 - k^2 + 10k - 16 \geq 0$$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립해야 한다.

(i) $k-4 > 0$, 즉 $k > 4$ 일 때

$$f(k-4) \geq 0, \text{ 즉}$$

$$-k^2 + 10k - 16 \geq 0$$

이므로

$$k^2 - 10k + 16 \leq 0$$

$$(k-2)(k-8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq k \leq 8$$

그런데 $k > 4$ 이므로 $4 < k \leq 8$

(ii) $k-4 \leq 0$, 즉 $k \leq 4$ 일 때

$t > 0$ 에서 모든 실수 t 에 대하여

부등식 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립하려면

$f(0) = 2k \geq 0$

$$\therefore k \geq 0$$

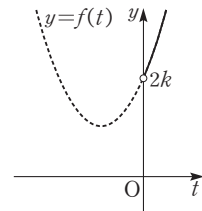
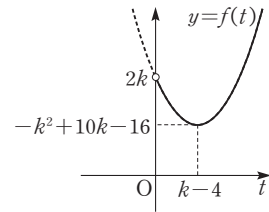
$$\therefore k \geq 0$$

그런데 $k \leq 4$ 이므로 $0 \leq k \leq 4$

(i), (ii)에 의하여

$$0 \leq k \leq 8$$

따라서 정수 k 는 $0, 1, 2, \dots, 8$ 의 9개이다.



17

해결전략 주어진 조건을 식으로 나타내어 지수부등식을 푼다.

STEP 1 x 시간 후의 두 박테리아 A, B의 수를 구하여 x 에 대한 부등식 세우기

박테리아 A는 처음 2마리가 한 시간에 2배씩 늘어나므로 x 시간 후의 박테리아 A의 수는

$$2 \times 2^x$$

박테리아 B는 처음 4마리가 한 시간에 4배씩 늘어나므로 x 시간 후의 박테리아 B의 수는

$$4 \times 4^x$$

x 시간 후 두 박테리아 A, B의 수의 합이 1640마리 이상이 된다고 하면

$$2 \times 2^x + 4 \times 4^x \geq 1640$$

STEP 2 부등식 풀기

$$2^x = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2t + 4t^2 \geq 1640, 2t^2 + t - 820 \geq 0$$

$$(2t+41)(t-20) \geq 0$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 20$

$$\therefore 2^x \geq 20$$

이때 $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ 이므로 자연수 x 의 최솟값은 5이다.

따라서 두 박테리아 A, B의 수의 합이 1640마리 이상이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후이다.

01 ① 02 ② 03 ② 04 ⑤
05 17 06 -2 07 $x < 6$

01

해결전략 | 메모판의 각 줄에 적혀 있는 세 식의 값의 합이 모두 같게 되는 식을 세운다.

STEP1 $S_1=S_4$, $S_3=S_6$, $S_3=S_4$ 임을 이용하여 식 세우기
 $x=a$ 일 때, 다음 그림과 같이 빈칸에 들어갈 수를 각각 p , q , r , s 라고 하자.

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	q	$2^{a+3}-16$	r	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	s	S_3
	S_4	S_5	S_6	

$$S_1=S_4 \text{이므로 } q=p$$

$$S_3=S_6 \text{이므로 } r=2^{a+3}-16$$

$$S_3=S_4 \text{이므로}$$

$$-2^{a+1}+2^{a+3}-16+s=4^a+q-2^{a+1} \text{에서}$$

$$s=4^a-2^{a+3}+16+p \quad (\because p=q)$$

STEP2 지수방정식을 이용하여 모든 실수 a 의 값의 합 구하기

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	p	$2^{a+3}-16$	$2^{a+3}-16$	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	$4^a-2^{a+3}+16+p$	S_3
	S_4	S_5	S_6	

$$S_1=S_3=S_4=S_6=4^a-2^{a+1}+p,$$

$$S_2=S_5=2^{a+4}-32+p \text{이므로}$$

$$4^a-2^{a+1}+p=2^{a+4}-32+p \rightarrow S_2=p+2^{a+3}-16+2^{a+3}-16$$

$$(2^a)^2-18 \times 2^a+32=0 \quad \begin{aligned} &=2 \times 2^{a+3}-32+p \\ &=2^{a+4}-32+p \end{aligned}$$

$$2^a=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-18t+32=0$$

$$(t-2)(t-16)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=16$$

$$\text{즉, } 2^a=2 \text{ 또는 } 2^a=16 \text{이므로}$$

$$2^a=2^1 \text{ 또는 } 2^a=2^4$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$1+4=5$$

02

해결전략 | 지수함수의 성질, 지수방정식의 근, 역함수의 성질을 이용하여 |보기|의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

$$\begin{aligned} \neg. y &= f(2x) + f(x) \\ &= \frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2} + \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (2^{2x} + 2^{-2x}) + (2^x + 2^{-x}) \} \end{aligned}$$

이때 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$, $2^{2x} > 0$, $2^{-2x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2x} + 2^{-2x} \geq 2\sqrt{2^{2x} \times 2^{-2x}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립한다.)

$$\therefore y \geq \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

즉, 함수 $y=f(2x)+f(x)$ 의 최솟값은 2이다. (참)

STEP2 $2^x=t$ ($t>0$)로 치환하여 얻은 t 에 대한 방정식의 두 근이 2^a , 2^b 임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

$$\neg. f(x)=4 \text{에서 } \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = 4 \text{이므로}$$

$$2^x + 2^{-x} = 8, \quad 2^x + \frac{1}{2^x} = 8$$

$$2^x = t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{1}{t} = 8$$

양변에 t 를 곱하여 정리하면

$$t^2 - 8t + 1 = 0$$

방정식 $f(x)=4$ 의 두 근을 a , b 라고 하면 이차방정식 $t^2-8t+1=0$ 의 두 근은 2^a , 2^b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b} = 1$$

$$\therefore a+b=0 \quad (\text{참})$$

STEP3 함수 $y=f(x)$ 의 역함수가 $y=g(x)$ 일 때, $f(a)=b$ 이면 $g(b)=a$ 임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

$$\neg. g\left(\frac{5}{3}\right)=k \quad (k>0) \text{라고 하면 } f(k)=\frac{5}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{2^k + 2^{-k}}{2} = \frac{5}{3}, \quad 3(2^k + 2^{-k}) = 10$$

$$3 \times 2^k + \frac{3}{2^k} - 10 = 0$$

$$2^k = s \quad (s>0) \text{로 놓으면}$$

$$3s + \frac{3}{s} - 10 = 0$$

양변에 s 를 곱하여 정리하면

$$3s^2 - 10s + 3 = 0, (3s-1)(s-3) = 0$$

$$\therefore s = \frac{1}{3} \text{ 또는 } s = 3$$

$$\text{즉, } 2^k = \frac{1}{3} \text{에서 } k = -\log_2 3 \text{이고,}$$

$$2^k = 3 \text{에서 } k = \log_2 3$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = \log_2 3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03

해결전략 | $3^x = t$ 로 치환하여 얻은 t 에 대한 이차방정식이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가짐을 이용한다.

STEP1 $3^x = t$ ($t > 1$)로 놓고 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 조건 구하기

$$9^x - 2(k+6) \times 3^x - 3k^2 + 36k = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 2(k+6) \times 3^x - 3k^2 + 36k = 0$$

$3^x = t$ 로 놓으면

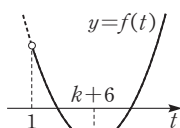
$$t^2 - 2(k+6)t - 3k^2 + 36k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x > 0 \text{이면 } t = 3^x > 3^0 = 1$$

$t > 1$ 이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$\text{즉, } f(t) = t^2 - 2(k+6)t - 3k^2 + 36k$$

로 놓으면 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



STEP2 k 의 값의 범위를 구하여 정수

k 의 개수 구하기

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k+6)\}^2 - (-3k^2 + 36k) > 0$$

$$4k^2 - 24k + 36 > 0, 4(k-3)^2 > 0$$

즉, $k \neq 3$ 인 모든 실수이다.

(ii) $f(1) > 0$ 에서

$$1 - 2(k+6) - 3k^2 + 36k > 0, -3k^2 + 34k - 11 > 0$$

$$3k^2 - 34k + 11 < 0, (3k-1)(k-11) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < k < 11$$

(iii) 함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $t = k+6$ 이므로

$$k+6 > 1 \quad \therefore k > -5$$

(i)~(iii)에 의하여 $\frac{1}{3} < k < 3$ 또는 $3 < k < 11$

따라서 정수 k 는 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 9개이다.

04

해결전략 | 점 P 의 x 좌표는 두 함수 $y = 4^x$ 과 $y = 2^{x-1} + 3$ 의 식을 연립한 이차방정식의 근임을 이용한다.

STEP1 점 P 의 좌표 구하기

점 P 의 좌표를 구해 보면

$$4^x = 2^{x-1} + 3 \text{에서 } (2^x)^2 - \frac{1}{2} \times 2^x - 3 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2t^2 - t - 6 = 0, (2t+3)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t = 2$

$$\text{즉, } t = 2^x = 2 \text{이므로 } x = 1$$

$$\therefore P(1, 4)$$

STEP2 선분 AB 의 중점이 P 임을 이용하여 관계식 구하기

점 A 의 좌표는 $(a, 4^a)$ 이고 점 B 의 좌표를 $(b, 2^{b-1} + 3)$

($a < b$)이라고 하면 선분 AB 의 중점이 P 이므로

$$\frac{a+b}{2} = 1, \frac{4^a + 2^{b-1} + 3}{2} = 4$$

$$\text{즉, } a+b=2, 4^a + 2^{b-1} = 5$$

STEP3 STEP2에서 구한 식을 변형하여 한 문자 a 에 대한 식으로 나타내기

$a+b=2$ 에서 $b=2-a$ 이므로 이를 $4^a + 2^{b-1} = 5$ 에 대입하면

$$2^{2a} + 2^{1-a} - 5 = 0$$

양변에 2^a 를 곱하면

$$2^{3a} - 5 \times 2^a + 2 = 0$$

STEP4 $2^a = s$ ($s > 0$)로 치환하여 $2^a + 2^{-a}$ 의 값 구하기

$2^a = s$ ($s > 0$)로 놓으면

$$s^3 - 5s + 2 = 0, (s-2)(s^2 + 2s - 1) = 0$$

$$\therefore s = 2 \text{ 또는 } s = -1 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $s > 0$ 이므로

$$s = 2 \text{ 또는 } s = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } 2^a = 2 \text{ 또는 } 2^a = -1 + \sqrt{2}$$

이때 두 점 A, B 는 서로 다른 점이므로

$$a \neq 1, \text{ 즉 } 2^a \neq 2$$

따라서 $2^a = -1 + \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} 2^a + 2^{-a} &= (-1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} \\ &= -1 + \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

05

해결전략 먼저 주어진 부등식을 3^x 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 부등식 풀기

$$(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$(9 \times 3^x - 1) \left(\frac{1}{3^p} \times 3^x - 1 \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{3^p} \times 9 \left(3^x - \frac{1}{9} \right) (3^x - 3^p) \leq 0$$

양변에 $3^{-2} \times 3^p$ 을 곱하면

$$(3^x - 3^{-2})(3^x - 3^p) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow 3^{-2} \times 3^p > 0 \text{이므로} \\ \text{부등호의 방향은 그대로!} \end{array}$$

이때 p 가 자연수이므로 $3^{-2} \leq 3^x \leq 3^p$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$-2 \leq x \leq p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 정수 x 의 개수가 20이 되도록 하는 p 의 값 구하기

①을 만족시키는 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, \dots, p$ 이고,

정수 x 의 개수가 20이므로

$$p+3=20 \quad \therefore p=17$$

06

해결전략 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 가 성립함을 이용한다.

STEP1 집합 A 구하기

$$x^{3x^2+2} \leq x^{7x} \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$3x^2+2 \geq 7x, 3x^2-7x+2 \geq 0$$

$$(3x-1)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x \leq \frac{1}{3}$$

(ii) $x=1$ 일 때

$$1^5 \leq 1^7 \text{이므로 주어진 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$3x^2+2 \leq 7x, 3x^2-7x+2 \leq 0$$

$$(3x-1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{3} \leq x \leq 2$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } 1 < x \leq 2$$

(i)~(iii)에 의하여 $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $1 \leq x \leq 2$

$$\therefore A = \left\{ x \mid 0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 2 \right\}$$

STEP2 두 집합 A, B 의 포함 관계를 알고 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내기

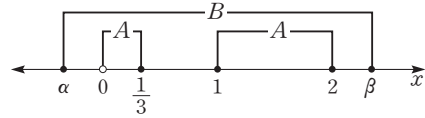
$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta) \quad (\alpha \leq \beta) \text{라고 하면}$$

$$x^2+ax+b \leq 0 \text{에서 } (x-\alpha)(x-\beta) \leq 0 \text{이므로}$$

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

$$\therefore B = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

한편, $A \cup B = B$ 를 만족시키려면 $A \subset B$ 이어야 하므로 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore \alpha \leq 0, \beta \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP3 $a+b$ 의 최댓값 구하기

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$$\text{에서 } a=-\alpha-\beta, b=\alpha\beta \text{이므로}$$

$$a+b=-\alpha-\beta+\alpha\beta=(\alpha-1)(\beta-1)-1$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } \alpha-1 \leq -1, \beta-1 \geq 1 \text{이므로}$$

$$a+b=(\alpha-1)(\beta-1)-1 \leq -2$$

따라서 $a+b$ 의 최댓값은 -2 이다.

07

해결전략 조건 (가)에 의하여 $f(-x)=-f(x)$ 임을 알고 조건 (나)의 부등식을 풀 때 이용한다.

STEP1 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$ 의 성질 알아보기

조건 (가)의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

조건 (가)의 양변에 y 대신 $-x$ 를 대입하면

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$

$$\therefore f(-x)=-f(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 조건 (나)를 이용하여 부등식 풀기

$$\text{부등식 } f(61 \times 2^x) + f(2 \times 2^x - 4^x + 64) > 0 \text{에서}$$

$$f(61 \times 2^x) > -f(2 \times 2^x - 4^x + 64)$$

①에 의하여

$$f(61 \times 2^x) > f(4^x - 2 \times 2^x - 64)$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } 61 \times 2^x > 4^x - 2 \times 2^x - 64 \text{이므로}$$

$$(2^x)^2 - 63 \times 2^x - 64 < 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 63t - 64 < 0, (t+1)(t-64) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 64$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로 } 0 < t < 64$$

$$\text{즉, } 0 < 2^x < 64, 0 < 2^x < 2^6$$

$$\text{밑이 2이고 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$x < 6$$

01 ㉡ (1) $x=5$ (2) $x=2$

(1) 진수의 조건에서 $3x+1>0$ 이므로

$$x > -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2(3x+1)=4 \text{에서}$$

$$\log_2(3x+1)=\log_2 16$$

$$3x+1=16$$

$$3x=15 \quad \therefore x=5$$

㉠에 의하여 $x=5$

(2) 진수의 조건에서 $3x>0, x+4>0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 3x = \log_{\frac{1}{5}}(x+4) \text{에서}$$

$$3x = x+4, 2x=4$$

$$\therefore x=2$$

㉡에 의하여 $x=2$

02 ㉡ (1) $\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}$ (2) $x \geq 3$

(1) 진수의 조건에서 $5x-2>0$ 이므로

$$x > \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) > 1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$5x-2 < \frac{1}{2}, 5x < \frac{5}{2}$$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}$$

(2) 진수의 조건에서 $2x+1>0, 3x-2>0$ 이므로

$$x > \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_5(2x+1) \leq \log_5(3x-2) \text{에서}$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$2x+1 \leq 3x-2$$

$$\therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$x \geq 3$$

01-1 ㉡ (1) $x=2$ (2) $x=6$ (3) $x=5$ (4) $x=3$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

(1) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x-1>0, x+3>0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP2 양변의 밑을 5로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_5(x-1) + \log_5(x+3) = 1 \text{에서}$$

$$\log_5(x-1)(x+3) = \log_5 5$$

양변의 밑이 5로 같으므로

$$(x-1)(x+3) = 5, x^2+2x-8=0$$

$$(x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x=2$$

㉠에 의하여 $x=2$

(2) **STEP1** 밑의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

밑의 조건에서 $x-2>0, x-2 \neq 1$ 이므로

$$\therefore 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP2 로그의 정의를 이용하여 풀기

$$\log_{x-2} 16 = 2 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 = 16, x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x=6$$

㉠에 의하여 $x=6$

(3) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $2x+6>0, x-1>0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP2 양변의 밑을 $\frac{1}{2}$ 로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+6) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+6) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+6) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+6) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{양변의 로그의 밑을 } \frac{1}{4} \text{로} \\ \text{같게 변형하여} \end{array}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+6) = \log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{양변의 밑이 } \frac{1}{2} \text{로 같으므로} \\ \text{으로 풀어도 된다.} \end{array}$$

$$2x+6 = (x-1)^2, x^2-4x-5=0$$

$$(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x=5$$

㉠에 의하여 $x=5$

(4) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x^2 - 4 > 0$, $7x - 11 > 0$ 이므로

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 2, x > \frac{11}{7}$$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 양변의 밑을 2로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_2(x^2 - 4) + 1 = \log_2(7x - 11) \text{에서}$$

$$\log_2(x^2 - 4) + \log_2 2 = \log_2(7x - 11)$$

$$\log_2 2(x^2 - 4) = \log_2(7x - 11)$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$2(x^2 - 4) = 7x - 11, 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

$\textcircled{7}$ 에 의하여 $x = 3$

01-2 답 1

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $5x + 1 > 0$ 이므로

$$x > -\frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 양변의 밑을 2로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$2\log_4(5x + 1) = 1 \text{에서}$$

$$2\log_2(5x + 1) = 1, \log_2(5x + 1) = \log_2 2$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$5x + 1 = 2 \quad \therefore x = \frac{1}{5}$$

$$\textcircled{7} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$\log_5 \frac{1}{\alpha} = \log_5 5 = 1$$

01-3 답 7

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x + 2 > 0$, $10x - 1 > 0$ 이므로

$$x > \frac{1}{10} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 양변의 밑을 6으로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_{\sqrt{6}}(x + 2) - \log_6(10x - 1) = 0 \text{에서}$$

$$\log_{6^{\frac{1}{2}}}(x + 2) = \log_6(10x - 1)$$

$$2\log_6(x + 2) = \log_6(10x - 1)$$

$$\log_6(x + 2)^2 = \log_6(10x - 1)$$

양변의 밑이 6으로 같으므로

$$(x + 2)^2 = 10x - 1, x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$\textcircled{7}$ 에 의하여 $x = 1$ 또는 $x = 5$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 5$ 이므로

$$2\alpha + \beta = 2 \times 1 + 5 = 7$$

01-4 답 14

해결전략 | 주어진 두 방정식을 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 p 의 값 구하기

$$\log_2(x + 3) + \log_2(x - 3) = 4 \text{의 진수의 조건에서}$$

$$x + 3 > 0, x - 3 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2(x + 3) + \log_2(x - 3) = 4 \text{에서}$$

$$\log_2(x + 3)(x - 3) = \log_2 2^4$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$(x + 3)(x - 3) = 16, x^2 = 25$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 5$$

$\textcircled{7}$ 에 의하여 $x = 5$ 이므로 $p = 5$

STEP2 q 의 값 구하기

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 1 = 2\log_{\frac{1}{9}}(x - 6) \text{의 진수의 조건에서}$$

$$x > 0, x - 6 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 1 = 2\log_{\frac{1}{9}}(x - 6) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = 2\log_{(\frac{1}{3})^2}(x - 6) - 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 3(x - 6)$$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같으므로

$$x = 3(x - 6), 2x = 18$$

$$\therefore x = 9$$

$\textcircled{8}$ 에 의하여 $x = 9$ 이므로 $q = 9$

$$\therefore p + q = 5 + 9 = 14$$

해결전략 | 밑이 같을 때와 진수가 1일 때의 x 의 값을 구하여 주어진 방정식을 만족시키는지 알아본다.

STEP1 밑과 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

밑의 조건에서 $x^2 - 8x + 16 > 0$, $x^2 - 8x + 16 \neq 1$ 이고
진수의 조건에서 $4 - x > 0$ 이므로

$$(x-4)^2 > 0, (x-4)^2 \neq 1, x < 4$$

$$x \neq 4, x \neq 3, x \neq 5, x < 4$$

$$\therefore x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 밑이 같을 때와 진수가 1일 때의 x 의 값 구하기

$$(i) x^2 - 8x + 16 = 4 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 6$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = 2$$

$$(ii) 4 - x = 1 \text{ 일 때, } x = 3$$

$$x = 3 \text{ 은 } \textcircled{1} \text{을 만족시키지 않는다.}$$

STEP3 방정식의 해를 구하여 10^a 의 값 구하기

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } x = 2$$

$$\text{따라서 } a = 2 \text{ 이므로}$$

$$10^a = 10^2 = 100$$

01-6 답 -4

해결전략 | 방정식에 근을 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 식의 양변의 밑을 같게 한다.

STEP1 방정식에 $x=8$ 을 대입한 후 진수의 조건을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

방정식 $\log_2(x+a-3) + \log_2(x+a) = 2$ 의 근이 $x=8$ 이므로

$$\log_2(8+a-3) + \log_2(8+a) = 2$$

$$\log_2(5+a) + \log_2(8+a) = 2$$

진수의 조건에서 $5+a > 0$, $8+a > 0$ 이므로

$$a > -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 양변의 밑을 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_2(5+a) + \log_2(8+a) = 2 \text{ 에서}$$

$$\log_2(5+a)(8+a) = \log_2 4$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$(5+a)(8+a) = 4$$

$$a^2 + 13a + 36 = 0$$

$$(a+9)(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -9 \text{ 또는 } a = -4$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } a = -4$$

02-1 답 (1) $x=4$ 또는 $x=16$

$$(2) x = \frac{1}{32} \text{ 또는 } x = 2$$

$$(3) x = \frac{1}{25} \text{ 또는 } x = 125$$

$$(4) x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

해결전략 | $\log_a x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

(1) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$, $x^3 > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 9 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} x^3 - 8 \text{ 에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 9 \log_{\frac{1}{2}} x = 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 8$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 6 \log_{\frac{1}{2}} x + 8 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 6t + 8 = 0, (t+4)(t+2) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = -2$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 를 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \text{ 이므로}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \text{ 또는 } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = 4 \text{ 또는 } x = 16$$

(2) **STEP1** 밑과 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

밑의 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$ 이고

진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$\log_2 x + 4 = \log_x 32 \text{ 에서}$$

$$\log_2 x + 4 = \frac{5}{\log_2 x} \quad \xrightarrow{\log_x 32 = \log_x 2^5 = 5 \log_x 2} = \frac{5}{\log_2 x}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t + 4 = \frac{5}{t}, t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -5 \text{ 또는 } t = 1$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_2 x$ 를 대입하여 x 의 값 구하기

$$\text{즉, } \log_2 x = -5 \text{ 또는 } \log_2 x = 1 \text{ 이므로}$$

$$x = 2^{-5} = \frac{1}{32} \text{ 또는 } x = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{32} \text{ 또는 } x = 2$$

(3) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 $\log_5 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$\log_5 5x \times \log_5 \frac{x}{25} = 4 \text{에서}$$

$$(\log_5 5 + \log_5 x)(\log_5 x - \log_5 25) = 4$$

$$(1 + \log_5 x)(\log_5 x - 2) = 4$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$(1+t)(t-2) = 4, t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t+2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 3$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_5 x$ 를 대입하여 x 의 값 구하기

즉, $\log_5 x = -2$ 또는 $\log_5 x = 3$ 이므로

$$x = 5^{-2} = \frac{1}{25} \text{ 또는 } x = 5^3 = 125$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = \frac{1}{25} \text{ 또는 } x = 125$$

(4) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$\log_3 x - \log_9 x = 3 \log_3 x \times \log_{27} x \text{에서}$$

$$\log_3 x - \log_{3^2} x = 3 \log_3 x \times \log_{3^3} x$$

$$\log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x = 3 \log_3 x \times \frac{1}{3} \log_3 x$$

$$\frac{1}{2} \log_3 x = (\log_3 x)^2, 2(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - t = 0, t(2t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_3 x$ 를 대입하여 x 의 값 구하기

즉, $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 3^0 = 1 \text{ 또는 } x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

02-2 ㉢ 30

해결전략 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0, x^3 > 0$ 이므로

$x > 0$ ㉠

STEP2 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + \log_{\frac{1}{5}} x^3 + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{5}} x + 1 = 0$$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 3t + 1 = 0, (t+1)(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2}$$

STEP3 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값 구하기

즉, $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \text{ 또는 } x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

㉠에 의하여 $x = 5$ 또는 $x = \sqrt{5}$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 $5^2 + (\sqrt{5})^2 = 30$

02-3 ㉢ $\frac{1}{9}$

해결전략 $\log_3 x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 3 = 0$$

$$(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x - 3 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

STEP3 방정식의 두 실근의 곱 구하기

즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 실근의 곱은

$$\frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9}$$

●→ 다른 풀이

STEP1 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 만들기

$$(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x - 3 = 0 \text{ ㉠}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \text{ ㉡}$$

STEP2 근과 계수의 관계를 이용하여 두 실근의 곱 구하기

방정식 ㉠의 두 근을 α, β 라고 하면 방정식 ㉡의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_3 \alpha + \log_3 \beta &= -2 \\ \text{이차방정식 } ax^2 + bx + c &= 0 \text{의} \\ \text{두 근을 } \alpha, \beta \text{라고 하면} \\ \alpha + \beta &= -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

즉, $\log_3 \alpha\beta = -2$ 이므로

$$\alpha\beta = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

🔗 풀법의 비법

방정식 $(\log_a x)^2 - p \log_a x + q = 0$ (p, q 는 상수)의 두 근이 α, β 일 때, $\log_a x = t$ 로 치환하여 나타낸 t 에 대한 이차방정식 $t^2 - pt + q = 0$ 의 두 근은 $\log_a \alpha, \log_a \beta$ 임을 이용한다.

02-4 ㉮ 68

해결전략 | $\log_2 x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$\log_2 \frac{32}{x} \times \log_2 \frac{x}{8} + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 32 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 8) + 3 = 0$$

$$(5 - \log_2 x)(\log_2 x - 3) + 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(5 - t)(t - 3) + 3 = 0, t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t - 2)(t - 6) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 6$$

STEP3 방정식의 두 근의 합 구하기

즉, $\log_2 x = 2$ 또는 $\log_2 x = 6$ 이므로

$$x = 2^2 = 4 \text{ 또는 } x = 2^6 = 64$$

㉠에 의하여 $x = 4$ 또는 $x = 64$

따라서 두 근의 합은

$$4 + 64 = 68$$

02-5 ㉮ $-\frac{8}{3}$

해결전략 | $\log x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

STEP1 $\log x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$(\log x)^2 = 6 - \log x^2 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 + 2 \log x - 6 = 0 \text{ ㉠}$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 6 = 0 \text{ ㉡}$$

STEP2 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 k 의 값 구하기

방정식 ㉠의 두 근을 α, β 라고 하면 방정식 ㉡의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = -2, \log \alpha \times \log \beta = -6$$

$$\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$$

$$= \frac{\log \beta}{\log \alpha} + \frac{\log \alpha}{\log \beta}$$

$$= \frac{(\log \alpha)^2 + (\log \beta)^2}{\log \alpha \times \log \beta}$$

$$= \frac{(\log \alpha + \log \beta)^2 - 2 \log \alpha \times \log \beta}{\log \alpha \times \log \beta}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 2 \times (-6)}{-6}$$

$$= -\frac{8}{3}$$

02-6 ㉮ 23

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 두 식의 밑이 같도록 변형한 후 치환하여 푼다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 변형하기

$$\log_2 x + \log_3 y = 7 \text{에서}$$

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log y}{\log 3} = 7$$

$$\log_3 x \times \log_2 y = 10 \text{에서}$$

$$\frac{\log x}{\log 3} \times \frac{\log y}{\log 2} = 10, \text{ 즉 } \frac{\log x}{\log 2} \times \frac{\log y}{\log 3} = 10$$

STEP2 $\frac{\log x}{\log 2} = X, \frac{\log y}{\log 3} = Y$ 로 놓고 X, Y 에 대한 연립방정식 풀기

$$\frac{\log x}{\log 2} = X, \frac{\log y}{\log 3} = Y \text{로 놓으면 주어진 연립방정식은}$$

$$\begin{cases} X + Y = 7 & \text{..... ㉠} \\ XY = 10 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $Y = 7 - X$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$X(7 - X) = 10, X^2 - 7X + 10 = 0$$

$$(X - 2)(X - 5) = 0$$

$$\therefore X = 2 \text{ 또는 } X = 5$$

㉠에 의하여 $X = 2, Y = 5$ 또는 $X = 5, Y = 2$

이때 $x > y$ 이면 $X > Y$ 이므로

$$X = 5, Y = 2$$

STEP3 α, β 의 값 구하기

$$\text{즉, } \frac{\log x}{\log 2} = 5, \frac{\log y}{\log 3} = 2 \text{이므로}$$

$$\log x = 5 \log 2, \log y = 2 \log 3$$

$$\log x = \log 2^5, \log y = \log 3^2$$

$$\therefore x = 32, y = 9$$

따라서 $\alpha = 32, \beta = 9$ 이므로

$$\alpha - \beta = 32 - 9 = 23$$

03-1 [답] (1) $x=3$ 또는 $x=9$ (2) $x=4$ 또는 $x=16$ (3) $x=100$

해결전략 | 치환을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

(1) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 식 변형하기

 $x^{\log_3 x} = \frac{x^3}{9}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{x^3}{9}$$

$$\log_3 x \times \log_3 x = \log_3 x^3 - \log_3 9$$

$$(\log_3 x)^2 = 3 \log_3 x - 2$$

STEP3 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 = 3t - 2, t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

STEP4 구한 해에 t 대신 $\log_3 x$ 를 대입하여 x 의 값 구하기즉, $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$ 이므로

$$x=3 \text{ 또는 } x=3^2=9$$

㉠에 의하여 $x=3$ 또는 $x=9$ (2) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기진수의 조건에서 $x > 0$ ㉡STEP2 $2^{\log_4 x} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$2^{\log_4 x} + 2^{3-\log_4 x} = 6 \text{에서}$$

$$2^{\log_4 x} + \frac{2^3}{2^{\log_4 x}} = 6$$

$$2^{\log_4 x} + \frac{8}{2^{\log_4 x}} = 6$$

 $2^{\log_4 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t + \frac{8}{t} = 6, t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $2^{\log_4 x}$ 를 대입하여 x 의 값 구하기즉, $2^{\log_4 x}=2$ 또는 $2^{\log_4 x}=4=2^2$ 이므로

$$\log_4 x=1 \text{ 또는 } \log_4 x=2$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=4^2=16$$

㉡에 의하여 $x=4$ 또는 $x=16$ (3) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기진수의 조건에서 $x > 0$ ㉢STEP2 $3^{\log x} = x^{\log 3}$ 임을 이용하여 식 변형하기

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - 4(3^{\log x} + x^{\log 3}) - 9 = 0 \text{에서}$$

$$x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 4(3^{\log x} + 3^{\log x}) - 9 = 0$$

$$(3^{\log x})^2 - 8 \times 3^{\log x} - 9 = 0$$

STEP3 $3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기 $3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 8t - 9 = 0, (t+1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 9$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t=9$ STEP4 구한 해에 t 대신 $3^{\log x}$ 를 대입하여 x 의 값 구하기즉, $3^{\log x} = 9 = 3^2$ 이므로 $\log x = 2$

$$\therefore x = 10^2 = 100$$

㉢에 의하여 $x=100$ 03-2 [답] 10^4

해결전략 | 지수에 밑이 10인 로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기진수의 조건에서 $x > 0$ ㉣

STEP2 양변에 상용로그를 취하여 식 변형하기

 $1000x^{\log x} = x^4$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 1000x^{\log x} = \log x^4$$

$$\log 1000 + \log x^{\log x} = 4 \log x$$

$$3 + \log x \times \log x = 4 \log x$$

$$3 + (\log x)^2 = 4 \log x$$

STEP3 $\log x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기 $\log x = t$ 로 놓으면

$$3 + t^2 = 4t, t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

STEP4 방정식의 모든 근의 곱 구하기

즉, $\log x=1$ 또는 $\log x=3$ 이므로

$$x=10 \text{ 또는 } x=10^3$$

㉣에 의하여 $x=10$ 또는 $x=10^3$

따라서 모든 근의 곱은

$$10 \times 10^3 = 10^4$$

03-3 [답] 109

해결전략 | 먼저 식을 정리한 후 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 해를 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 식 변형하기

$x^{\log_3 x} - \frac{27}{x^2} = 0$, 즉 $x^{\log_3 x} = \frac{27}{x^2}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{27}{x^2}$$

$$\log_3 x \times \log_3 x = \log_3 27 - \log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2 = 3 - 2\log_3 x$$

STEP3 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 = 3 - 2t, t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

STEP4 방정식의 모든 근의 합을 구하여 p, q 의 값 구하기

즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 모든 근의 합은 $\frac{1}{27} + 3 = \frac{82}{27}$ 이므로

$$p = 27, q = 82$$

$$\therefore p + q = 27 + 82 = 109$$

03-4 ㉡ 5

해결전략 $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$ 임을 이용하여 해를 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$ 임을 이용하여 식 변형하기

$$5^{\log_2 x} \times x^{\log_2 5} - 13(5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5}) + 25 = 0 \text{에서}$$

$$x^{\log_2 5} = 5^{\log_2 x} \text{이므로}$$

$$5^{\log_2 x} \times 5^{\log_2 x} - 13(5^{\log_2 x} + 5^{\log_2 x}) + 25 = 0$$

$$(5^{\log_2 x})^2 - 26 \times 5^{\log_2 x} + 25 = 0$$

STEP3 $5^{\log_2 x} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$5^{\log_2 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 26t + 25 = 0, (t-1)(t-25) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 25$$

STEP4 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

즉, $5^{\log_2 x} = 1 = 5^0, 5^{\log_2 x} = 25 = 5^2$ 이므로

$$\log_2 x = 0 \text{ 또는 } \log_2 x = 2 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1 + 4 = 5$$

03-5 ㉡ $x = \frac{1}{15}$

해결전략 $|$ 지수에 밑이 10인 로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $3x > 0, 5x > 0$ 이므로

$$x > 0 \text{ } \textcircled{1}$$

STEP2 양변에 상용로그를 취하여 방정식의 해 구하기

$3^{\log 3x} = 5^{\log 5x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{\log 3x} = \log 5^{\log 5x}$$

$$\log 3x \times \log 3 = \log 5x \times \log 5$$

$$(\log 3 + \log x) \log 3 = (\log 5 + \log x) \log 5$$

$$(\log 3)^2 + \log x \times \log 3 = (\log 5)^2 + \log x \times \log 5$$

$$(\log 3 - \log 5) \log x = (\log 5)^2 - (\log 3)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 5 + \log 3)(\log 5 - \log 3)}{\log 3 - \log 5}$$

$$= -(\log 5 + \log 3)$$

$$= -\log 15$$

$$= \log \frac{1}{15}$$

$$\therefore x = \frac{1}{15}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{15}$$

03-6 ㉡ $\sqrt{2}$

해결전략 $|$ 지수에 밑이 2인 로그가 있으므로 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 해를 구한다.

STEP1 밑과 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ 이고

진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \text{ } \textcircled{1}$$

STEP2 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 식 변형하기

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\log_2 x} = (4x^5)^{\log_2 2} \text{에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\log_2 x} = \log_2 (4x^5)^{\log_2 2}$$

$$\log_2 x \times \log_2 \frac{x^2}{2} = \log_2 2 \times \log_2 4x^5$$

$$\log_2 x (\log_2 x^2 - \log_2 2) = \log_2 2 (\log_2 4 + \log_2 x^5)$$

$$\log_2 x (2\log_2 x - 1) = \frac{1}{\log_2 x} (2 + 5\log_2 x)$$

STEP3 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t(2t-1) = \frac{1}{t}(2+5t)$$

양변에 t 를 곱하면

$$2t^3 - t^2 = 2 + 5t$$

$$2t^3 - t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$(t+1)(2t+1)(t-2) = 0$$

→ 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	2	-1	-5	-2
	-2	3	2	
	2	-3	-2	0

$$(t+1)(2t^2-3t-2)=0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

STEP 4 모든 실수 x 의 값의 곱 구하기

$$\text{즉, } \log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_2 x = 2 \text{ 이}$$

므로

$$x = 2^{-1} \text{ 또는 } x = 2^{-\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = 2^2$$

㉠에 의하여

$$x = 2^{-1} \text{ 또는 } x = 2^{-\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = 2^2$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$2^{-1} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^2 = \sqrt{2}$$

필수유형 04

165쪽

04-1 답 $k < -\frac{1}{2}$ 또는 $k > \frac{3}{2}$

해결전략 $\log_6 x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

STEP 1 $\log_6 x = t$ 로 놓고 방정식이 서로 다른 두 근을 가질 조건 구하기

$$(\log_6 x + 1)^2 - k \log_6 x^4 + 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_6 x + 1)^2 - 4k \log_6 x + 3 = 0$$

$\log_6 x = t$ 로 놓으면

$$(t+1)^2 - 4kt + 3 = 0$$

$$t^2 + 2(1-2k)t + 4 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 근을 가지므로 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

STEP 2 이차방정식의 판별식을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기
이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (1-2k)^2 - 1 \times 4 > 0$$

$$4k^2 - 4k - 3 > 0$$

$$(2k+1)(2k-3) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k > \frac{3}{2}$$

04-2 답 $-\frac{3}{4}$

해결전략 $\log_2 x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

STEP 1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 방정식이 중근을 가질 조건 구하기

$$(\log_2 x - a)^2 + \log_2 8x - 2 = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_2 x - a)^2 + 3 + \log_2 x - 2 = 0$$

$$(\log_2 x - a)^2 + \log_2 x + 1 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(t-a)^2 + t + 1 = 0$$

$$t^2 - (2a-1)t + a^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 방정식이 중근을 가지므로 방정식 ㉠은 한 개의 실근을 갖는다.

STEP 2 이차방정식의 판별식을 이용하여 a 의 값 구하기

이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(2a-1)\}^2 - 4 \times 1 \times (a^2 + 1) = 0$$

$$-4a - 3 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

04-3 답 35

해결전략 $\log_3 x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

STEP 1 $\log_3 x = t$ 로 놓고 방정식이 서로 다른 두 근을 가질 조건 구하기

$$\log_3 x \times \log_3 \frac{81}{x} = \frac{m}{9} \text{ 에서}$$

$$\log_3 x (\log_3 81 - \log_3 x) = \frac{m}{9}$$

$$\log_3 x (4 - \log_3 x) = \frac{m}{9}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t(4-t) = \frac{m}{9}$$

$$t^2 - 4t + \frac{m}{9} = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 근을 가지므로 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

STEP 2 이차방정식의 판별식을 이용하여 자연수 m 의 개수 구하기

이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - \frac{m}{9} > 0$$

$$4 - \frac{m}{9} > 0 \quad \therefore m < 36$$

따라서 자연수 m 은 1, 2, 3, ..., 35의 35개이다.

04-4 ㉡ 12

해결전략 | $\log_2 x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

STEP1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 방정식이 근을 가질 조건 구하기

$$\log_2 x \times \log_2 \frac{32}{x} = \frac{k}{2} \text{에서}$$

$$\log_2 x (\log_2 32 - \log_2 x) = \frac{k}{2}$$

$$\log_2 x (5 - \log_2 x) = \frac{k}{2}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t(5-t) = \frac{k}{2}$$

$$2t^2 - 10t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 근을 가지므로 방정식 ①은 실근을 갖는다.

STEP2 이차방정식의 판별식을 이용하여 k 의 최댓값 구하기

이차방정식 ①의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 2 \times k \geq 0$$

$$25 - 2k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{25}{2}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 12이다.

04-5 ㉡ 2

해결전략 | 두 근의 비가 1 : 30이므로 두 근을 $m, 3m$ ($m \neq 0$)으로 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP1 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^5 + 8 - k = 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 8 - k = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 5t + 8 - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 두 근의 비와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 방정식 ①의 두 근의 합과 곱 구하기

두 근을 $m, 3m$ ($m \neq 0$)이라고 하면 방정식 ①의 두 근은 $\log_3 m, \log_3 3m$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 m + \log_3 3m = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_3 m \times \log_3 3m = 8 - k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP3 k 의 값 구하기

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \log_3 m + (1 + \log_3 m) = 5$$

$$2 \log_3 m = 4, \log_3 m = 2$$

$$\therefore m = 3^2 = 9$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 8 - k = \log_3 9 \times \log_3 27 = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore k = 2$$

04-6 ㉡ $-\frac{1}{10}$

해결전략 | $\log x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP1 $\log x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기

$$p(\log x)^2 - p \log x^3 + 1 = 0 \text{에서}$$

$$p(\log x)^2 - 3p \log x + 1 = 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$pt^2 - 3pt + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log \alpha - \log \beta = 7$ 과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 방정식 ①의 두 근의 합과 곱 구하기

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ①의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = -\frac{-3p}{p} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log \alpha \times \log \beta = \frac{1}{p} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP3 p 의 값 구하기

①과 $\log \alpha - \log \beta = 7$ 을 연립하여 풀면

$$\log \alpha = 5, \log \beta = -2$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 5 \times (-2) = \frac{1}{p} \quad \therefore p = -\frac{1}{10}$$

필수유형 05

167쪽

05-1 ㉡ (1) $x > 3$

$$(2) -1 < x < 1 \text{ 또는 } 4 < x < 6$$

$$(3) 1 < x < 6$$

$$(4) 4 < x \leq 13$$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

(1) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x - 3 > 0, x^2 + 1 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 진수를 비교하여 풀기

$$2 \log_{0.3}(x-3) > \log_{0.3}(x^2+1) \text{에서}$$

$$\log_{0.3}(x-3)^2 > \log_{0.3}(x^2+1)$$

$$\text{밑이 } 0.3 \text{이고 } 0 < 0.3 < 1 \text{이므로}$$

$$(x-3)^2 < x^2+1, -6x < -8$$

$$\therefore x > \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

①, ㉠에 의하여 $x > 3$

(2) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x+1>0$, $6-x>0$ 이므로

$$-1 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 양변의 밑을 10으로 같게 하여 진수를 비교하여 풀기

$$\log(x+1) + \log(6-x) < 1 \text{에서}$$

$$\log(x+1)(6-x) < \log 10$$

밑이 10이고 $10>1$ 이므로

$$(x+1)(6-x) < 10, -x^2+5x-4 < 0$$

$$x^2-5x+4 > 0$$

$$(x-1)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 의하여 $-1 < x < 1$ 또는 $4 < x < 6$

(3) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x-1>0$, $2x+13>0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

STEP2 양변의 밑을 $\frac{1}{2}$ 로 같게 하여 진수를 비교하여 풀기

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{4}}(2x+13) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+13)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(2x+13)$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+13)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x+13)$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 양변의 로그의 밑을 $\frac{1}{4}$ 로
 같게 변형하여

$$(x-1)^2 < 2x+13$$

$$x^2-4x-12 < 0$$

$$(x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 에 의하여 $1 < x < 6$

(4) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x+2>0$, $2x-1>0$, $x-4>0$ 이므로

$$x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

STEP2 양변의 밑을 2로 같게 하여 진수를 비교하여 풀기

$$\log_2(x+2) - \log_4(2x-1) \geq \log_4(x-4) \text{에서}$$

$$\log_2(x+2) \geq \log_4(x-4) + \log_4(2x-1)$$

$$\log_2(x+2) \geq \log_2(x-4)(2x-1)$$

$$\log_2(x+2) \geq \frac{1}{2} \log_2(x-4)(2x-1)$$

$$2 \log_2(x+2) \geq \log_2(x-4)(2x-1)$$

$$\log_2(x+2)^2 \geq \log_2(x-4)(2x-1)$$

밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$$(x+2)^2 \geq (x-4)(2x-1)$$

$$x^2-13x \leq 0, x(x-13) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 13 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}$, $\textcircled{12}$ 에 의하여 $4 < x \leq 13$

05-2 답 -2

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $3(x+1)>0$, $2x+7>0$ 이므로

$$x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

STEP2 양변의 밑을 6으로 같게 하여 진수를 비교하여 풀기

$$\log_6 \sqrt{3(x+1)} < 1 - \frac{1}{2} \log_6(2x+7) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_6 3(x+1) < 1 - \frac{1}{2} \log_6(2x+7)$$

$$\log_6 3(x+1) < 2 - \log_6(2x+7)$$

$$\log_6 3(x+1) + \log_6(2x+7) < 2$$

$$\log_6 3(x+1)(2x+7) < \log_6 36$$

밑이 6이고 $6>1$ 이므로

$$3(x+1)(2x+7) < 36, 2x^2+9x-5 < 0$$

$$(x+5)(2x-1) < 0$$

$$\therefore -5 < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{13}$, $\textcircled{14}$ 에 의하여 $-1 < x < \frac{1}{2}$

따라서 $a = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{a}{\beta} = -2$

05-3 답 14

해결전략 | 주어진 로그부등식을 풀 후 이차부등식의 해를 이용하여 a 의 값을 구한다.

STEP1 로그부등식을 풀어 x 에 대한 이차부등식으로 나타내기

$$\log_3(-x^2+ax-4) \geq \log_3 x + 2 \text{에서}$$

$$\log_3(-x^2+ax-4) \geq \log_3 x + \log_3 3^2$$

$$\log_3(-x^2+ax-4) \geq \log_3 9x$$

밑이 3이고 $3>1$ 이므로

$$-x^2+ax-4 \geq 9x$$

$$x^2 + (9-a)x + 4 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{15}$$

STEP2 이차부등식의 해가 $1 \leq x \leq 4$ 임을 이용하여 a 의 값 구하기

해가 $1 \leq x \leq 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)(x-4) \leq 0, \text{ 즉 } x^2-5x+4 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{16}$$

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$$9-a=-5 \quad \therefore a=14$$

🔍 품셈의 방법

이차부등식의 작성

- (1) 해가 $a < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-a)(x-\beta) < 0$, 즉 $x^2 - (a+\beta)x + a\beta < 0$
- (2) 해가 $x < a$ 또는 $x > \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부
 등식은
 $(x-a)(x-\beta) > 0$, 즉 $x^2 - (a+\beta)x + a\beta > 0$

05-4 ㉡ 15

해결전략 | 진수의 크기를 비교한 후 주어진 그래프를 이용한
다.

STEP1 진수의 조건 구하기

진수의 조건에서 $f(x) > 0$, $x-1 > 0$ 이므로

$$f(x) > 0, x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 로그의 성질을 이용하여 부등식 풀기

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_3 f(x) + \log_{3^{-1}}(x-1) \leq 0$$

$$\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$$

$$\log_3 f(x) \leq \log_3(x-1)$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$f(x) \leq x-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 주어진 그래프를 이용하여 자연수 x 의 값 구하기

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있고, 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x-1$ 과 만나거나 아래쪽

에 있어야 하므로

$$4 \leq x < 7$$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 그 합은

$$4+5+6=15$$

05-5 ㉡ 3

해결전략 | 부등식의 해를 구한 후, 그 해를 만족시키는 정수
 x 의 개수가 7임을 이용한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $\frac{1}{2}x+k > 0$ 이므로

$$x > 1 \text{이고 } x > -2k$$

이때 자연수 k 에 대하여 $-2k < 1$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $0 < (\text{밑}) < 1$ 임을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}x+k\right) \text{에서}$$

밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$x-1 \leq \frac{1}{2}x+k$$

$$\therefore x \leq 2k+2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 정수 x 의 개수가 7임을 이용하여 자연수 k 의 값 구하기

㉠, ㉡에서 $1 < x \leq 2(k+1)$ 이고, 모든 정수 x 의 개수가
7이므로

$$2(k+1)-1=7, k+1=4$$

$$\therefore k=3$$

05-6 ㉡ 2

해결전략 | $0 < (\text{밑}) < 1$, $(\text{밑}) > 1$ 인 경우로 나누어 생각한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x+3 > 0$, $1-x > 0$ 이므로

$$-3 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 밑의 범위에 따라 로그부등식의 해를 구하여 a 의 값 구하기

$$\log_a(x+3) > \log_a(1-x) + 1 \text{에서}$$

$$\log_a(x+3) > \log_a(1-x) + \log_a a$$

$$\log_a(x+3) > \log_a a(1-x)$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때 $\rightarrow$ 부등호의 방향이 바뀐다.

$$x+3 < a(1-x) \text{이므로}$$

$$(a+1)x < a-3$$

이때 $a+1 > 0$ 이므로

$$x < \frac{a-3}{a+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

그런데 ㉠, ㉡의 공통 범위는 주어진 부등식의 해

$$-\frac{1}{3} < x < 1 \text{을 만족시킬 수 없다.}$$

(ii) $a > 1$ 일 때 $\rightarrow$ 부등호의 방향이 그대로이다.

$$x+3 > a(1-x) \text{이므로}$$

$$(a+1)x > a-3$$

이때 $a+1 > 0$ 이므로

$$x > \frac{a-3}{a+1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 이므로 ㉠, ㉢에서

$$\frac{a-3}{a+1} = -\frac{1}{3}, 3a-9 = -a-1$$

$$4a=8 \quad \therefore a=2$$

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

06-1 ㉡ (1) $0 < x < 4$ 또는 $x > 16$

$$(2) \frac{1}{25} < x < \sqrt{5}$$

$$(3) 0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 3$$

$$(4) \frac{1}{16} < x < 8$$

해결전략 | $\log_a x = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

(1) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$, $x^2 > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 8 > 0 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 6\log_{\frac{1}{2}} x + 8 > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 6t + 8 > 0$$

$$(t+4)(t+2) > 0$$

$$\therefore t < -4 \text{ 또는 } t > -2$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 를 대입하여 x 의 값의

범위 구하기

$$\text{즉, } \log_{\frac{1}{2}} x < -4 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > -2 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$x > 16 \text{ 또는 } x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } 0 < x < 4 \text{ 또는 } x > 16$$

(2) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_5 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$2(\log_5 x)^2 < 2 - 3\log_5 x \text{에서}$$

$$2(\log_5 x)^2 + 3\log_5 x - 2 < 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 + 3t - 2 < 0, (t+2)(2t-1) < 0$$

$$\therefore -2 < t < \frac{1}{2}$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_5 x$ 를 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{즉, } -2 < \log_5 x < \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\log_5 5^{-2} < \log_5 x < \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{25} < x < \sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \frac{1}{25} < x < \sqrt{5}$$

(3) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $9x > 0$, $x > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$\log_3 9x \times \log_{\sqrt{3}} x \geq 6 \text{에서}$$

$$(2 + \log_3 x) \times 2\log_3 x \geq 6$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(2+t) \times 2t \geq 6, t^2 + 2t - 3 \geq 0$$

$$(t+3)(t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -3 \text{ 또는 } t \geq 1$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_3 x$ 를 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{즉, } \log_3 x \leq -3 \text{ 또는 } \log_3 x \geq 1 \text{이므로}$$

$$\log_3 x \leq \log_3 3^{-3} \text{ 또는 } \log_3 x \geq \log_3 3$$

$$\text{밑이 3이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } 0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 3$$

(4) STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } \frac{2}{x} > 0, 4x > 0 \text{이므로}$$

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} \times \log_2 4x < 10 \text{에서}$$

$$\log_{2^{-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \times \log_2 4x < 10$$

$$\log_2 \frac{x}{2} \times \log_2 4x < 10$$

$$(\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 4 + \log_2 x) < 10$$

$$(\log_2 x - 1)(2 + \log_2 x) < 10$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(t-1)(2+t) < 10$$

$$t^2 + t - 12 < 0$$

$$(t+4)(t-3) < 0$$

$$\therefore -4 < t < 3$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_2 x$ 를 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{즉, } -4 < \log_2 x < 3 \text{이므로}$$

$$\log_2 2^{-4} < \log_2 x < \log_2 2^3$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{16} < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{I}$, $\textcircled{L}$ 에 의하여 $\frac{1}{16} < x < 8$

06-2 ㉔ 20

해결전략 $\log_{\frac{1}{4}} x = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한

이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{I}$

STEP2 $\log_{\frac{1}{4}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$\log_{\frac{1}{4}} x^3 + (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 \leq -2 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x + 2 \leq 0$$

$\log_{\frac{1}{4}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t + 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t+1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq -1$$

STEP3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 α, β 의 값 구하기

즉, $-2 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq -1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

밑이 $\frac{1}{4}$ 이고 $0 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로

$$4 \leq x \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{I}$, $\textcircled{L}$ 에 의하여 $4 \leq x \leq 16$

따라서 $\alpha = 4, \beta = 16$ 이므로

$$\alpha + \beta = 20$$

06-3 ㉔ 32

해결전략 $\log_2 x = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $\frac{4}{x} > 0, \frac{8}{x} > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

STEP2 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$\log_2 \frac{4}{x} \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x} + 12 < 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 4 - \log_2 x)(\log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_{\frac{1}{2}} x) + 12 < 0$$

$$(2 - \log_2 x)(-3 + \log_2 x) + 12 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(2-t)(-3+t) + 12 < 0, t^2 - 5t - 6 > 0$$

$$(t+1)(t-6) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 6$$

STEP3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 α, β 의 값 구하기

즉, $\log_2 x < -1$ 또는 $\log_2 x > 6$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 2^{-1} \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 2^6$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 64 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{I}$, $\textcircled{L}$ 에 의하여 $0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > 64$

따라서 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 64$ 이므로

$$\alpha\beta = 32$$

06-4 ㉔ $\frac{1}{25}$

해결전략 $\log_5 x = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0, 25x > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

STEP2 $\log_5 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$\log_5 x \times \log_5 25x \leq 48 \text{에서}$$

$$\log_5 x (\log_5 25 + \log_5 x) \leq 48$$

$$\log_5 x (2 + \log_5 x) \leq 48$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t(2+t) \leq 48, t^2 + 2t - 48 \leq 0$$

$$(t+8)(t-6) \leq 0$$

$$\therefore -8 \leq t \leq 6$$

STEP3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 x 의 최댓값 M 과 최솟값 m 구하기

즉, $-8 \leq \log_5 x \leq 6$ 이므로

$$\log_5 5^{-8} \leq \log_5 x \leq \log_5 5^6$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$5^{-8} \leq x \leq 5^6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{I}$, $\textcircled{L}$ 에서 $5^{-8} \leq x \leq 5^6$

따라서 최댓값은 5^6 이고 최솟값은 5^{-8} 이므로

$$M = 5^6, m = 5^{-8}$$

$$\therefore Mm = 5^6 \times 5^{-8} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

06-5 ㉮ 5

해결전략 | 식을 변형하여 $\log_3 x = t$ 로 치환한 후 주어진 부등식의 해를 이용하여 t 에 대한 이차부등식의 해를 구한다.

STEP1 양변의 밑을 같게 하여 식 변형하기

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + a \log_3 x + b > 0 \text{에서}$$

$$(-\log_3 x)^2 + a \log_3 x + b > 0$$

$$(\log_3 x)^2 + a \log_3 x + b > 0$$

STEP2 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식의 해 구하기

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + at + b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 부등식의 해가 $0 < x < \frac{1}{9}$ 또는 $x > 27$ 이므로

로 부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는

$$\log_3 x < -2 \text{ 또는 } \log_3 x > 3$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 3$$

STEP3 t 에 대한 부등식을 세워 a, b 의 값 구하기

해가 $t < -2$ 또는 $t > 3$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t+2)(t-3) > 0, \text{ 즉 } t^2 - t - 6 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치해야 하므로

$$a = -1, b = -6$$

$$\therefore a - b = -1 - (-6) = 5$$

06-6 ㉮ 5

해결전략 | 두 집합 A, B 를 구한 후 두 집합의 공통인 원소가 존재함을 이용한다.

STEP1 집합 A 구하기

$$A: x^2 - 5x + 4 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 4$$

$$\therefore A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

STEP2 집합 B 구하기

B : 진수의 조건에서 $x > 0$

$$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2kt + k^2 - 1 \leq 0$$

$$\{t - (k-1)\} \{t - (k+1)\} \leq 0$$

$$\therefore k-1 \leq t \leq k+1$$

$$\text{즉, } k-1 \leq \log_2 x \leq k+1 \text{이므로}$$

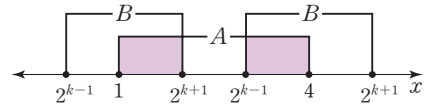
$$\log_2 2^{k-1} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{k+1}$$

$$\therefore 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

$$\therefore B = \{x \mid 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}\}$$

STEP3 $A \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 정수 k 의 값 구하기

두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$A \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키려면

$$1 \leq 2^{k+1}, 2^{k-1} \leq 4$$

→ 수직선에서 두 집합 A, B 의 공통인 부분이 있다.

즉, $0 \leq k+1, k-1 \leq 2$ 이므로

$$-1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

필수유형 07

171쪽

07-1 ㉮ (1) $\frac{1}{10} \leq x \leq 100$

$$(2) 0 < x < 3 \text{ 또는 } x > 81$$

$$(3) \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

해결전략 | 치환을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

(1) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 양변에 상용로그를 취한 후 $\log x = t$ 로 놓고 t 에

대한 이차부등식 풀기

$$x^{\log x} \leq 100x \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log x} \leq \log 100x$$

$$\log x \times \log x \leq \log 100 + \log x$$

$$(\log x)^2 \leq 2 + \log x$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \leq 2 + t, t^2 - t - 2 \leq 0$$

$$(t+1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 2$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log x$ 를 대입하여 x 의 값의 범

위 구하기

$$\text{즉, } -1 \leq \log x \leq 2 \text{이므로}$$

$$\log 10^{-1} \leq \log x \leq \log 10^2$$

$$\text{밑이 } 10 \text{이고 } 10 > 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{10} \leq x \leq 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \frac{1}{10} \leq x \leq 100$$

(2) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 양변에 밑이 3인 로그를 취한 후 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$x^{\log_3 x} > \frac{x^5}{81}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} > \log_3 \frac{x^5}{81}$$

$$\log_3 x \times \log_3 x > \log_3 x^5 - \log_3 81$$

$$(\log_3 x)^2 > 5\log_3 x - 4$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 > 5t - 4, t^2 - 5t + 4 > 0$$

$$(t-1)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < 1 \text{ 또는 } t > 4$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_3 x$ 를 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

즉, $\log_3 x < 1$ 또는 $\log_3 x > 4$ 이므로

$$\log_3 x < \log_3 3 \text{ 또는 } \log_3 x > \log_3 3^4$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$x < 3 \text{ 또는 } x > 81 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $0 < x < 3$ 또는 $x > 81$

(3) **STEP1** 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 양변에 밑이 0.5인 로그를 취한 후 $\log_{0.5} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$x^{\log_{0.5} x} \geq \sqrt{\frac{x}{2}}$ 의 양변에 밑이 0.5인 로그를 취하면

$$\log_{0.5} x^{\log_{0.5} x} \leq \log_{0.5} \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\log_{0.5} x \times \log_{0.5} x \leq \log_{0.5} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\log_{0.5} x)^2 \leq \frac{1}{2} \log_{0.5} 0.5x$$

$$(\log_{0.5} x)^2 \leq \frac{1}{2} (\log_{0.5} 0.5 + \log_{0.5} x)$$

$$(\log_{0.5} x)^2 \leq \frac{1}{2} (1 + \log_{0.5} x)$$

STEP3 구한 해에 t 대신 $\log_{0.5} x$ 를 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$\log_{0.5} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 \leq \frac{1}{2} (1 + t)$$

$$2t^2 - t - 1 \leq 0$$

$$(2t+1)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2} \leq \log_{0.5} x \leq 1 \text{이므로}$$

$$\log_{0.5} 0.5^{-\frac{1}{2}} \leq \log_{0.5} x \leq \log_{0.5} 0.5$$

밑이 0.5이고 $0 < 0.5 < 1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의하여 } \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

07-2 ㉡ 124

해결전략 | 지수에 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그가 있으므로 양변에 밑이

$\frac{1}{5}$ 인 로그를 취한 후 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 치환한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP2 양변에 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그를 취한 후 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓고

t 에 대한 이차부등식 풀기

$x^{\log_{\frac{1}{5}} x + 2} > \frac{1}{125}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{5}} x^{\log_{\frac{1}{5}} x + 2} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x + 2) \log_{\frac{1}{5}} x < 3$$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$(t+2)t < 3, t^2 + 2t - 3 < 0$$

$$(t+3)(t-1) < 0$$

$$\therefore -3 < t < 1$$

STEP3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 자연수 x 의 개수 구하기

즉, $-3 < \log_{\frac{1}{5}} x < 1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} < \log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}$$

밑이 $\frac{1}{5}$ 이고 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$\frac{1}{5} < x < 125 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의하여 } \frac{1}{5} < x < 125$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 124의 124개이다.

07-3 ㉡ 9

해결전략 | 지수에 밑이 2인 로그가 있으므로 양변에 밑이 2인 로그를 취한 후 $\log_2 x = t$ 로 치환한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP 2 양변에 밑이 2인 로그를 취한 후 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$x^{\log_2 x - 1} \leq \frac{x^2}{4} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x - 1} \leq \log_2 \frac{x^2}{4}$$

$$(\log_2 x - 1)\log_2 x \leq \log_2 x^2 - \log_2 4$$

$$(\log_2 x - 1)\log_2 x \leq 2\log_2 x - 2$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(t-1)t \leq 2t-2, t^2-3t+2 \leq 0$$

$$(t-1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 2$$

STEP 3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 모든 정수 x 의 값의 합 구하기

$$\text{즉, } 1 \leq \log_2 x \leq 2 \text{이므로}$$

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^2$$

$$\text{밑이 2이고 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2 \leq x \leq 4$$

..... ㉔

$$\text{㉓, ㉔에 의하여 } 2 \leq x \leq 4$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } 2, 3, 4 \text{이므로 그 합은}$$

$$2+3+4=9$$

07-4 ㉓ $2 < x < 5$

해결전략 | 지수에 밑이 4인 로그가 있으므로 양변에 밑이 4인 로그를 취한 후 $\log_4(x-1) = t$ 로 치환한다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x-1 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 1$$

..... ㉓

STEP 2 양변에 밑이 4인 로그를 취한 후 $\log_4(x-1) = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$(x-1)^{\log_4(x-1)} + 1 < x \text{에서}$$

$$(x-1)^{\log_4(x-1)} < x-1$$

$$\text{양변에 밑이 4인 로그를 취하면}$$

$$\log_4(x-1)^{\log_4(x-1)} < \log_4(x-1)$$

$$\log_4(x-1) \times \log_4(x-1) < \log_4(x-1)$$

$$\{\log_4(x-1)\}^2 < \log_4(x-1)$$

$$\log_4(x-1) = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 < t, t^2 - t < 0, t(t-1) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 1$$

STEP 3 구한 해에 t 대신 $\log_4(x-1)$ 을 대입하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{즉, } 0 < \log_4(x-1) < 1 \text{이므로}$$

$$\log_4 1 < \log_4(x-1) < \log_4 4$$

$$\text{밑이 4이고 } 4 > 1 \text{이므로}$$

$$1 < x-1 < 4$$

$$\therefore 2 < x < 5$$

..... ㉔

$$\text{㉓, ㉔에 의하여 } 2 < x < 5$$

07-5 ㉓ 90

해결전략 | $a^{\log x} = x^{\log a}$ 임을 이용하여 식을 변형한다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0$$

..... ㉓

STEP 2 $3^{\log x} = x^{\log 3}$ 임을 이용하여 식을 변형한 후

$$3^{\log x} = t \ (t > 0) \text{로 놓고 } t \text{에 대한 이차부등식 풀기}$$

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - 6(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 27 < 0 \text{에서}$$

$$x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 6(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 27 < 0$$

$$(3^{\log x})^2 - 12 \times 3^{\log x} + 27 < 0$$

$$3^{\log x} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 27 < 0, (t-3)(t-9) < 0$$

$$\therefore 3 < t < 9$$

STEP 3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 a, β 의 값 구하기

$$\text{즉, } 3 < 3^{\log x} < 9 \text{이므로}$$

$$3 < 3^{\log x} < 3^2$$

$$\text{지수의 밑이 3이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$1 < \log x < 2$$

$$\log 10 < \log x < \log 100$$

$$\text{로그의 밑이 10이고 } 10 > 1 \text{이므로}$$

$$10 < x < 100$$

..... ㉔

$$\text{㉓, ㉔에 의하여 } 10 < x < 100$$

$$\text{따라서 } a=10, \beta=100 \text{이므로}$$

$$\beta - a = 100 - 10 = 90$$

07-6 ㉓ 30

해결전략 | 조건 (가)는 양변에 상용로그를 취하고, 조건 (나)는 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취한다.

STEP 1 조건 (가)에서 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{조건 (가)의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log 2^{2x+1} > \log 10^{5-x}$$

$$(2x+1)\log 2 > 5-x$$

$$(2\log 2 + 1)x > 5 - \log 2$$

$$(2 \times 0.3 + 1)x > 5 - 0.3, 1.6x > 4.7$$

$$\therefore x > \frac{4.7}{1.6} = 2.9 \dots$$

STEP2 조건 (나)에서 x 의 값의 범위 구하기

조건 (나)의 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$(4x)^{\log_{\frac{1}{2}} x + 4} \geq \frac{1}{128}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} (4x)^{\log_{\frac{1}{2}} x + 4} \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 4) \log_{\frac{1}{2}} 4x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 4) \times (\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x) \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x + 4)(-2 + \log_{\frac{1}{2}} x) \leq 7$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$(t+4)(-2+t) \leq 7, t^2 + 2t - 15 \leq 0$$

$$(t+5)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq t \leq 3$$

즉, $-5 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 32 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의하여 $\frac{1}{8} \leq x \leq 32$

STEP3 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기
따라서 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $2.9 \dots < x \leq 32$ 이므로 정수 x 는 3, 4, 5, ..., 32의 30개
이다.

발전유형 08

173쪽

08-1 $\frac{1}{9} < a < 27$

해결전략 | 이차방정식이 실근을 갖지 않으려면 판별식 $D < 0$
이어야 함을 이용한다.

STEP1 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식 세우기
진수의 조건에서 $a > 0$ $\dots\dots \textcircled{1}$

이차방정식 $x^2 + 2(1 - \log_3 a)x - \log_3 a + 7 = 0$ 이 실근
을 갖지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = (1 - \log_3 a)^2 - (-\log_3 a + 7) < 0$$

$$(\log_3 a)^2 - \log_3 a - 6 < 0$$

STEP2 로그부등식을 풀어 a 의 값의 범위 구하기

$\log_3 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 6 < 0, (t+2)(t-3) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 3$$

즉, $-2 < \log_3 a < 3$ 이므로

$$\log_3 3^{-2} < \log_3 a < \log_3 3^3$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{9} < a < 27 \quad \rightarrow \text{(밑)} > 1 \text{이므로 부등호의}$$

방향이 바뀌지 않는다.

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $\frac{1}{9} < a < 27$

08-2 $0 < k \leq \frac{1}{16}$ 또는 $k \geq \sqrt{2}$

해결전략 | 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$ 이어
야 함을 이용한다.

STEP1 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식 세우기
진수의 조건에서 $k > 0$ $\dots\dots \textcircled{1}$

이차방정식 $x^2 - 4(1 + \log_4 k)x + \log_4 k + 6 = 0$ 이 실근
을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-2(1 + \log_4 k)\}^2 - (\log_4 k + 6) \geq 0$$

$$4(\log_4 k)^2 + 7\log_4 k - 2 \geq 0$$

STEP2 로그부등식을 풀어 정수 k 의 개수 구하기

$\log_4 k = t$ 로 놓으면

$$4t^2 + 7t - 2 \geq 0, (t+2)(4t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq \frac{1}{4}$$

즉, $\log_4 k \leq -2$ 또는 $\log_4 k \geq \frac{1}{4}$ 이므로

$$\log_4 k \leq \log_4 4^{-2} \text{ 또는 } \log_4 k \geq \log_4 4^{\frac{1}{4}}$$

밑이 4이고 $4 > 1$ 이므로

$$k \leq \frac{1}{16} \text{ 또는 } k \geq \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$0 < k \leq \frac{1}{16} \text{ 또는 } k \geq \sqrt{2}$$

08-3 $\frac{9}{16}$

해결전략 | 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별
식 $D > 0$ 이어야 함을 이용한다.

STEP1 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식 세우기
진수의 조건에서 $a > 0$ $\dots\dots \textcircled{1}$

$$4 + \log_{\frac{1}{2}} a \neq 0 \text{에서 } a \neq 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{이차방정식 } (4 + \log_{\frac{1}{2}} a)x^2 - (1 + \log_{\frac{1}{2}} a)x + 1 = 0 \text{이}$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때

$$D = \{-(1 + \log_{\frac{1}{2}} a)\}^2 - 4 \times (4 + \log_{\frac{1}{2}} a) \times 1 > 0$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} a)^2 - 2\log_{\frac{1}{2}} a - 15 > 0$$

STEP 2 로그부등식을 풀어 자연수 a 의 최솟값 구하기

$$\log_{\frac{1}{2}} a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 15 > 0, (t+3)(t-5) > 0$$

$$\therefore t < -3 \text{ 또는 } t > 5$$

$$\text{즉, } \log_{\frac{1}{2}} a < -3 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} a > 5 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{2} \text{이고 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$a < \frac{1}{32} \text{ 또는 } a > 8 \quad \begin{array}{l} \rightarrow 0 < (\text{밑}) < 1 \text{이므로 부등호의} \\ \text{방향이 바뀐다.} \end{array} \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

$\textcircled{a}, \textcircled{b}, \textcircled{c}$ 에 의하여

$$0 < a < \frac{1}{32} \text{ 또는 } 8 < a < 16 \text{ 또는 } a > 16$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 9이다.

08-4 ㉡ 41

해결전략 | 이차방정식의 근이 모두 양수이려면 (판별식) ≥ 0 , (두 근의 합) > 0 , (두 근의 곱) > 0 임을 이용한다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

STEP 2 이차방정식의 두 근이 양수일 조건을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

이차방정식 $x^2 - 2x \log_6 k + 2 - \log_6 k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 하면

$$(i) \frac{D}{4} = (-\log_6 k)^2 - (2 - \log_6 k) \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_6 k)^2 + \log_6 k - 2 \geq 0$$

$$\log_6 k = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 2 \geq 0, (t+2)(t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$$\text{즉, } \log_6 k \leq -2 \text{ 또는 } \log_6 k \geq 1 \text{이므로}$$

$$\log_6 k \leq \log_6 6^{-2} \text{ 또는 } \log_6 k \geq \log_6 6$$

$$\text{밑이 } 6 \text{이고 } 6 > 1 \text{이므로}$$

$$k \leq \frac{1}{36} \text{ 또는 } k \geq 6$$

$$(ii) \alpha + \beta = -(-2 \log_6 k) = 2 \log_6 k > 0 \text{에서}$$

$$\log_6 k > 0 \text{이므로}$$

$$\log_6 k > \log_6 1$$

$$\text{밑이 } 6 \text{이고 } 6 > 1 \text{이므로 } k > 1$$

$$(iii) \alpha \beta = 2 - \log_6 k > 0 \text{에서}$$

$$\log_6 k < 2 \text{이므로}$$

$$\log_6 k < \log_6 6^2$$

$$\text{밑이 } 6 \text{이고 } 6 > 1 \text{이므로 } k < 36$$

$$(i) \sim (iii) \text{에 의하여 } 6 \leq k < 36 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

STEP 3 정수 k 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

$$\textcircled{a}, \textcircled{b} \text{에 의하여 } 6 \leq k < 36$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 35, 최솟값은 6이므로

$$\text{그 합은 } 35 + 6 = 41$$

08-5 ㉡ $\frac{1}{16} < a \leq \frac{1}{4}$

해결전략 | 이차방정식의 근이 모두 음수이려면 (판별식) ≥ 0 , (두 근의 합) < 0 , (두 근의 곱) > 0 임을 이용한다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

STEP 2 이차방정식의 두 근이 음수일 조건을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

이차방정식 $2x^2 - 2x \log_2 a + \log_2 a + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 하면

$$(i) \frac{D}{4} = (-\log_2 a)^2 - 2 \times (\log_2 a + 4) \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 a)^2 - 2\log_2 a - 8 \geq 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0, (t+2)(t-4) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 4$$

$$\text{즉, } \log_2 a \leq -2 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 4 \text{이므로}$$

$$\log_2 a \leq \log_2 2^{-2} \text{ 또는 } \log_2 a \geq \log_2 2^4$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로}$$

$$a \leq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a \geq 16$$

$$(ii) \alpha + \beta = -\frac{-2 \log_2 a}{2} = \log_2 a < 0 \text{에서}$$

$$\log_2 a < \log_2 1$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로 } a < 1$$

$$(iii) \alpha \beta = \frac{\log_2 a + 4}{2} > 0 \text{에서 } \log_2 a + 4 > 0 \text{이므로}$$

$$\log_2 a > \log_2 2^{-4}$$

$$\text{밑이 } 2 \text{이고 } 2 > 1 \text{이므로 } a > \frac{1}{16}$$

(i)~(iii)에 의하여 $\frac{1}{16} < a \leq \frac{1}{4}$ ㉞

STEP 3 a 의 값의 범위 구하기

㉞, ㉞에 의하여 $\frac{1}{16} < a \leq \frac{1}{4}$

08-6 ㉞ 1

해결전략 | 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $\log x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식 세우기

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉞

$$(\log x + \log 3)(\log x + \log 27) = -(\log a)^2 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 + (\log 3 + \log 27)\log x + \log 3 \times \log 27 + (\log a)^2 = 0$$

$$(\log x)^2 + 4\log 3 \times \log x + 3(\log 3)^2 + (\log a)^2 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4t\log 3 + 3(\log 3)^2 + (\log a)^2 = 0$$

위의 t 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2\log 3)^2 - \{3(\log 3)^2 + (\log a)^2\} > 0$$

STEP 2 로그부등식을 풀어 α, β 의 값 구하기

$$(\log a)^2 - (\log 3)^2 < 0$$

$$(\log a + \log 3)(\log a - \log 3) < 0$$

$$\therefore -\log 3 < \log a < \log 3$$

$$\text{즉, } \log 3^{-1} < \log a < \log 3$$

밑이 10이고 $10 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{3} < a < 3 \text{ ㉞}$$

㉞, ㉞에 의하여 $\frac{1}{3} < a < 3$

따라서 $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 3$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

+발전유형 09

175쪽

09-1 ㉞ $a \geq \frac{1}{5}$

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_5 x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP 1 $\log_5 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉞

$$(\log_5 x)^2 \geq \log_5 \frac{x^2}{25a} \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 \geq \log_5 x^2 - \log_5 25a$$

$$(\log_5 x)^2 \geq 2\log_5 x - (2 + \log_5 a)$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 \geq 2t - (2 + \log_5 a)$$

$$t^2 - 2t + 2 + \log_5 a \geq 0 \text{ ㉞}$$

STEP 2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉞은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2t + 2 + \log_5 a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (2 + \log_5 a) \leq 0$$

$$-1 - \log_5 a \leq 0$$

$$\log_5 a \geq -1$$

$$\text{즉, } \log_5 a \geq \log_5 5^{-1}$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$a \geq \frac{1}{5} \text{ ㉞}$$

㉞, ㉞에 의하여 $a \geq \frac{1}{5}$

09-2 ㉞ 4

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_2 x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP 1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

진수의 조건에서 $k > 0$ ㉞

$$\log_2 x (\log_{\frac{1}{2}} x + 4) + 2\log_{\frac{1}{2}} k \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_2 x (-\log_2 x + 4) - 2\log_2 k \leq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t(-t + 4) - 2\log_2 k \leq 0$$

$$t^2 - 4t + 2\log_2 k \geq 0 \text{ ㉞}$$

STEP 2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉞은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 4t + 2\log_2 k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2\log_2 k \leq 0$$

$$4 - 2\log_2 k \leq 0, \log_2 k \geq 2$$

$$\text{즉, } \log_2 k \geq \log_2 2^2$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$k \geq 4 \text{ ㉞}$$

㉑, ㉒에 의하여 $k \geq 4$
따라서 정수 k 의 최솟값은 4이다.

09-3 ㉒ 26

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_{\sqrt{3}} x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP1 $\log_{\sqrt{3}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉑

$$(\log_{\sqrt{3}} x)^2 + 6\log_{\sqrt{3}} 3x > \log_3 a \text{에서}$$

$$(\log_{\sqrt{3}} x)^2 + 6(\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}} x) > \log_3 a$$

$$(\log_{\sqrt{3}} x)^2 + 6(2 + \log_{\sqrt{3}} x) > \log_3 a$$

$\log_{\sqrt{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 6(2 + t) > \log_3 a$$

$$t^2 + 6t + 12 - \log_3 a > 0 \quad \dots\dots ㉒$$

STEP2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉒은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 + 6t + 12 - \log_3 a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - (12 - \log_3 a) < 0$$

$$-3 + \log_3 a < 0$$

$$\log_3 a < 3$$

$$\text{즉, } \log_3 a < \log_3 3^3$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$a < 27 \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉓에 의하여 $0 < a < 27$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 26의 26개이다.

09-4 ㉒ 7

해결전략 | 지수에 밑이 4인 로그가 있으므로 양변에 밑이 4인 로그를 취한 후 $\log_4 x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP1 양변에 밑이 4인 로그를 취한 후 $\log_4 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$x^{\log_4 x} > (16x)^k \text{의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면}$$

$$\log_4 x^{\log_4 x} > \log_4 (16x)^k$$

$$\log_4 x \times \log_4 x > k(\log_4 16 + \log_4 x)$$

$$(\log_4 x)^2 > 2k + k\log_4 x$$

$\log_4 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 > 2k + kt$$

$$t^2 - kt - 2k > 0 \quad \dots\dots ㉑$$

STEP2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉑은 모든 실수 k 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - kt - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (-2k) < 0$$

$$k^2 + 8k < 0$$

$$k(k + 8) < 0$$

$$\therefore -8 < k < 0$$

따라서 정수 k 는 -7, -6, -5, ..., -1의 7개이다.

09-5 ㉒ $a > 3$

해결전략 | 지수에 밑이 3인 로그가 있으므로 양변에 밑이 3인 로그를 취한 후 $\log_3 x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP1 양변에 밑이 3인 로그를 취한 후 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$x^{-\log_3 x} < ax^2 \text{의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면}$$

$$\log_3 x^{-\log_3 x} < \log_3 ax^2$$

$$(-\log_3 x) \times \log_3 x < \log_3 a + \log_3 x^2$$

$$-(\log_3 x)^2 < \log_3 a + 2\log_3 x$$

$$\text{진수의 조건에서 } a > 0 \quad \dots\dots ㉑$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$-t^2 < \log_3 a + 2t$$

$$t^2 + 2t + \log_3 a > 0 \quad \dots\dots ㉒$$

STEP2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉒은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 + 2t + \log_3 a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - \log_3 a < 0$$

$$\log_3 a > 1$$

$$\text{즉, } \log_3 a > \log_3 3$$

밑이 3이고 $3 > 1$ 이므로

$$a > 3 \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉓에 의하여 $a > 3$

09-6 ㉒ 17

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_2 x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉑

$$\left(\log_2 \frac{x}{a}\right)\left(\log_2 \frac{x^2}{a}\right)+2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x - \log_2 a)(\log_2 x^2 - \log_2 a) + 2 \geq 0$$

$$(\log_2 x - \log_2 a)(2\log_2 x - \log_2 a) + 2 \geq 0$$

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 a \times \log_2 x + (\log_2 a)^2 + 2 \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - 3t\log_2 a + (\log_2 a)^2 + 2 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

STEP 2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 a 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 $\textcircled{A}$ 은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2t^2 - 3t\log_2 a + (\log_2 a)^2 + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-3\log_2 a)^2 - 4 \times 2 \times \{(\log_2 a)^2 + 2\} \leq 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 16 \leq 0$$

$$(\log_2 a + 4)(\log_2 a - 4) \leq 0$$

$$-4 \leq \log_2 a \leq 4$$

$$\text{즉, } \log_2 2^{-4} \leq \log_2 a \leq \log_2 2^4$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$\frac{1}{16} \leq a \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에 의하여 } \frac{1}{16} \leq a \leq 16$$

$$\text{따라서 } M = 16, m = \frac{1}{16} \text{이므로}$$

$$M + 16m = 16 + 1 = 17$$

발전유형 10

177쪽

10-1 답 (1) 10배 (2) $10^{-5.6}$

해결전략 | 문제의 조건을 주어진 식에 대입한다.

(1) pH=6.2, pH=7.2인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온 농도를 각각 a , b 라고 하면

$$6.2 = -\log a \text{에서 } \log \frac{1}{a} = 6.2$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a} = 10^{6.2} \text{이므로 } a = 10^{-6.2}$$

$$7.2 = -\log b \text{에서 } \log \frac{1}{b} = 7.2$$

$$\text{즉, } \frac{1}{b} = 10^{7.2} \text{이므로 } b = 10^{-7.2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{-6.2}}{10^{-7.2}} = 10^{-6.2 - (-7.2)} = 10 \text{이므로 } a = 10b$$

따라서 pH=6.2인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온 농도는 pH=7.2인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온 농도의 10배이다.

(2) 산성비 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 농도를 x 라고 하면

$$-\log x \leq 5.6 \text{에서}$$

$$\log \frac{1}{x} \leq \log 10^{5.6}$$

$$\frac{1}{x} \leq 10^{5.6} \quad \therefore x \geq 10^{-5.6}$$

따라서 산성비 1 L 속에 들어 있는 최소 수소 이온 농도는 $10^{-5.6}$ 이다.

10-2 답 20년

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 방정식을 세운다.

STEP 1 주어진 상황을 식으로 나타내기

n 년 후의 GNP는 $a(1+0.07)^n$ (원)

n 년 후에 GNP가 4배가 된다고 하면

$$a(1+0.07)^n = 4a$$

$$1.07^n = 4$$

STEP 2 양변에 상용로그를 취하여 n 의 값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 1.07^n = \log 4$$

$$n \log 1.07 = 2 \log 2$$

$$\therefore n = \frac{2 \log 2}{\log 1.07} = \frac{2 \times 0.3}{0.03} = 20$$

따라서 올해 GNP의 4배가 되는 것은 20년 후이다.

10-3 답 5년

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 부등식을 세운다.

STEP 1 주어진 상황을 식으로 나타내기

올해 인구 수를 a 라고 하면 n 년 후 인구 수는

$$a(1-0.05)^n$$

n 년 후에 인구 수가 80 % 이하가 된다고 하면

$$a(1-0.05)^n \leq \frac{80}{100}a, \quad 0.95^n \leq 0.8$$

STEP 2 양변에 상용로그를 취하여 n 의 값의 범위 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 0.95 \leq \log 0.8$$

$$n \log \frac{95}{100} \leq \log \frac{8}{10}$$

$$n \{\log (1.9 \times 5 \times 10) - 2\} \leq 3 \log 2 - 1$$

$$n(\log 1.9 + \log 5 + \log 10 - 2) \leq 3\log 2 - 1$$

$$n(\log 1.9 + 1 - \log 2 + 1 - 2) \leq 3\log 2 - 1$$

$$n(\log 1.9 - \log 2) \leq 3\log 2 - 1$$

$$n(0.28 - 0.3) \leq 3 \times 0.3 - 1$$

$$-0.02n \leq -0.1 \quad \therefore n \geq 5$$

따라서 인구 수가 처음으로 올해의 80 % 이하가 되는 것은 5년 후이다.

10-4 ㉮ 4

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 부등식을 세운다.

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

처음 빵 1개의 무게와 가격을 각각 a g, b 원이라고 하자.

1번 시행 후 1개당 무게는 $0.9a$ g이므로

n 번 시행 후의 1개당 무게는 $0.9^n a$ g

또, 처음 빵의 1 g당 가격은 $\frac{b}{a}$ 원이므로

n 번 시행 후 1 g당 가격은 $\frac{b}{0.9^n a}$ 원이다.

n 번 시행 후 빵의 1 g당 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야 하므로

$$\frac{b}{0.9^n a} \geq \frac{3}{2} \times \frac{b}{a}, \left(\frac{10}{9}\right)^n \geq \frac{3}{2}$$

STEP2 양변에 상용로그를 취하여 n 의 최솟값 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{10}{9}\right)^n \geq \log \frac{3}{2}, n \log \frac{10}{9} \geq \log \frac{3}{2}$$

$$n(1 - 2\log 3) \geq \log 3 - \log 2$$

$$n(1 - 2 \times 0.4771) \geq 0.4771 - 0.3010$$

$$0.0458n \geq 0.1761$$

$$\therefore n \geq 3.8 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

10-5 ㉮ 110 m

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 부등식을 세운다.

STEP1 주어진 상황을 식으로 나타내기

바다 수면에 비치는 햇빛의 양을 a 라고 할 때, 10 m 내려

가면 햇빛의 양은 $a\left(1 - \frac{18}{100}\right)$ 이므로 10x m 내려가면

햇빛의 양은 $a\left(1 - \frac{18}{100}\right)^x$ 이다.

식물성 플랑크톤은 바다 수면에 비치는 햇빛의 양의 8 % 이상이 도달하는 깊이까지 살 수 있으므로

$$a\left(1 - \frac{18}{100}\right)^x \geq \frac{8}{100}a, \left(\frac{82}{100}\right)^x \geq \frac{8}{100}$$

STEP2 양변에 상용로그를 취하여 x 의 값의 범위 구하기

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{82}{100}\right)^x \geq \log \frac{8}{100}$$

$$x \log \frac{82}{100} \geq \log \frac{8}{100}$$

$$x(\log 8.2 - 1) \geq 3\log 2 - 2$$

$$x(0.9 - 1) \geq 3 \times 0.3 - 2$$

$$-0.1x \geq -1.1 \quad \therefore x \leq 11$$

따라서 식물성 플랑크톤은 최대 $11 \times 10 = 110$ (m)까지 살 수 있다.

실전 연습 문제

178~180쪽

01 ⑤	02 ②	03 3	04 ③	05 ④
06 ①	07 27	08 ①		
09 $x = \frac{1}{8}$ 또는 $x = \sqrt{2}$	10 ③	11 ②	12 ①	
13 6	14 ③	15 ①	16 ③	17 ①
18 5번				

01

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x - 2 > 0$, $2x - 1 > 0$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 양변의 밑을 3으로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_3(x-2) = \log_3(2x-1) \text{에서}$$

$$\log_3(x-2) = \log_{3^x}(2x-1)$$

$$\log_3(x-2) = \frac{1}{2} \log_3(2x-1)$$

$$2\log_3(x-2) = \log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x-2)^2 = \log_3(2x-1)$$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$$(x-2)^2 = 2x-1$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

①에 의하여 $x = 5$

02

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $4+x>0$, $4-x>0$

$$\therefore -4 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 양변의 밑을 2로 같게 하여 양변의 진수를 비교하여 풀기

$$\log_2(4+x) + \log_2(4-x) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2(4+x)(4-x) = \log_2 2^3$$

$$\log_2(4+x)(4-x) = \log_2 8$$

양변의 밑이 2로 같으므로

$$(4+x)(4-x) = 8$$

$$16 - x^2 = 8, x^2 = 8$$

$$\therefore x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2}$$

①에 의하여 $x = -2\sqrt{2}$ 또는 $x = 2\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$(-2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} = -8$$

03

해결전략 | 밑이 같을 때와 진수가 1일 때의 x 의 값을 구하여 주어진 방정식을 만족시키는지 알아본다.

STEP1 밑과 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\begin{aligned} \text{밑의 조건에서 } x^2 - x + 2 > 0, x^2 - x + 2 \neq 1, x + 5 > 0, \\ x + 5 \neq 1 \text{이고} \quad \rightarrow x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1 \end{aligned}$$

진수의 조건에서 $x+1>0$

$$\therefore x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 밑이 같을 때와 진수가 1일 때의 x 의 값 구하기

(i) $x^2 - x + 2 = x + 5$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

①에 의하여 $x = 3$

(ii) $x+1=1$ 일 때, $x=0$

$x=0$ 은 ①을 만족시키므로 구하는 해이다.

STEP3 모든 근의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 $x=0$ 또는 $x=3$ ②

따라서 모든 근의 합은

$$0 + 3 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① 밑의 조건과 진수의 조건 구하기	30 %
② 조건을 만족시키는 모든 x 의 값 구하기	50 %
③ 모든 근의 합 구하기	20 %

04

해결전략 | $4^{\log x} = x^{\log 4}$ 임을 이용하여 푼다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $4^{\log x} = x^{\log 4}$ 임을 이용하여 식 변형하기

$$4^{\log x} \times x^{\log 4} - 3(4^{\log x} + x^{\log 4}) + 8 = 0 \text{에서}$$

$$x^{\log 4} = 4^{\log x} \text{이므로}$$

$$4^{\log x} \times 4^{\log x} - 3(4^{\log x} + 4^{\log x}) + 8 = 0$$

$$(4^{\log x})^2 - 6 \times 4^{\log x} + 8 = 0$$

STEP3 $4^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$4^{\log x} = t \text{ ($t > 0$)로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

①에 의하여 $t = 2$ 또는 $t = 4$

STEP4 구한 해에 t 대신 $4^{\log x}$ 를 대입한 후 α, β 의 값 구하기

$$\text{즉, } 4^{\log x} = 2 = 4^{\frac{1}{2}}, 4^{\log x} = 4 \text{이므로}$$

$$\log x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log x = 1$$

$$\therefore x = \sqrt{10} \text{ 또는 } x = 10$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{10})^2 + 10^2 = 110$$

05

해결전략 | 지수방정식에서 x, y 에 대한 관계식을 구하여 로 그방정식에 대입한다.

STEP1 지수방정식을 이용하여 x, y 에 대한 관계식 구하기

$$5^x = 25^y \text{에서 } 5^x = 5^{2y} \text{이므로}$$

$$x = 2y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\log_2 y = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

진수의 조건에서 $16x > 0, 8y > 0$ 이므로

$$x > 0, y > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 $\log_2 16x \times \log_2 8y = -1$ 에 대입하면

$$\log_2 32y \times \log_2 8y = -1$$

$$(\log_2 32 + \log_2 y)(\log_2 8 + \log_2 y) = -1$$

$$(5 + \log_2 y)(3 + \log_2 y) = -1$$

$\log_2 y = t$ 로 놓으면

$$(5+t)(3+t) = -1$$

$$t^2 + 8t + 16 = 0$$

$$(t+4)^2 = 0 \quad \therefore t = -4$$

STEP3 α, β 의 값 구하기

$$\text{즉, } \log_2 y = -4 \text{이므로}$$

$$y = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

$y = \frac{1}{16}$ 을 ㉠에 대입하면

$$x = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

㉠에 의하여 $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{16}$

따라서 $\alpha = \frac{1}{8}$, $\beta = \frac{1}{16}$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{128}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha\beta} = 128$$

06

해결전략 | 지수에 밑이 10인 로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

STEP 1 양변에 상용로그를 취하여 방정식의 해 구하기

$$(8x)^{\log 8} - (3x)^{\log 3} = 0 \text{에서}$$

$$(8x)^{\log 8} = (3x)^{\log 3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log (8x)^{\log 8} = \log (3x)^{\log 3}$$

$$\log 8 \times \log 8x = \log 3 \times \log 3x$$

$$\log 8 (\log 8 + \log x) = \log 3 (\log 3 + \log x)$$

$$(\log 8)^2 + \log 8 \times \log x = (\log 3)^2 + \log 3 \times \log x$$

$$(\log 8 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 8)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 3 + \log 8)(\log 3 - \log 8)}{\log 8 - \log 3}$$

$$= -(\log 3 + \log 8)$$

$$= -\log 24$$

$$= \log \frac{1}{24}$$

$$\therefore x = \frac{1}{24}$$

STEP 2 α 의 값을 구하여 120α 의 값 구하기

따라서 $\alpha = \frac{1}{24}$ 이므로

$$120\alpha = 5$$

07

해결전략 | $\log_3 x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 세운다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

STEP 2 $\log_3 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$$(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 \sqrt{x} + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 x^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x + 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

STEP 3 α , β 의 값을 구하여 $\alpha\beta$ 의 값 구하기

즉, $\log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 3^2 = 9$$

㉠에 의하여 $x = 3$ 또는 $x = 9$

따라서 두 실근의 곱은

$$3 \times 9 = 27$$

08

해결전략 | $\log_x 9 = \frac{1}{\log_9 x}$ 임을 이용하여 식을 정리한 후

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP 1 밑을 3으로 같게 식을 변형한 후 $\log_3 x = t$ 로 놓고

t 에 대한 이차방정식 세우기

$$\log_3 x - \frac{1}{5} \log_x 9 + k = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 x - \frac{1}{5 \log_9 x} + k = 0$$

$$\log_3 x - \frac{2}{5 \log_3 x} + k = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t - \frac{2}{5t} + k = 0$$

$$5t^2 + 5kt - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

STEP 2 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 k 의 값 구하기

방정식 ㉠의 두 근을 α , β 라고 하면 방정식 ㉡의 두 근은

$\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -\frac{5k}{5} = -k$$

즉, $\log_3 \alpha\beta = -k$ 이고 $\alpha\beta = 27$ 이므로

$$-k = \log_3 27 = 3$$

$$\therefore k = -3$$

09

해결전략 | 지수에 밑이 2인 로그가 있으므로 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 푼다.

STEP 1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $x \neq 0$ ㉠ ㉡

STEP 2 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 식 변형하기

$x^{1-\log_2 x^2} = \frac{x^6}{8}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{1-\log_2 x^2} = \log_2 \frac{x^6}{8}$$

$$(1-\log_2 x^2)\log_2 x = \log_2 x^6 - \log_2 8$$

$$(1-2\log_2 x)\log_2 x = 6\log_2 x - 3 \quad \dots\dots ②$$

STEP3 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(1-2t)t = 6t - 3, 2t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$(t+3)(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$$

STEP4 x 의 값 구하기

즉, $\log_2 x = -3$ 또는 $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

③에 의하여 구하는 해는

$$x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = \sqrt{2} \quad \dots\dots ④$$

채점 요소	배점
① 진수의 조건 나타내기	10 %
② 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 방정식 정리하기	40 %
③ $\log_2 x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식 풀기	30 %
④ x 의 값 구하기	20 %

10

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 양변의 밑을 같게 하여 식을 변형한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $3x-5 > 0$, $x-3 > 0$ 이므로

$$x > 3 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 양변의 밑을 0.5로 같게 하여 진수를 비교하여 풀어 x 의 최솟값 구하기

$$\log_{0.5}(3x-5) \geq \log_{0.5}(x-3) \text{에서}$$

$$\log_{0.5}(3x-5) \geq \log_{0.5^{\frac{1}{2}}}(x-3)$$

$$\log_{0.5}(3x-5) \geq 2\log_{0.5}(x-3)$$

$$\log_{0.5}(3x-5) \geq \log_{0.5}(x-3)^2$$

밑이 0.5이고 $0 < 0.5 < 1$ 이므로

$$3x-5 \leq (x-3)^2, x^2-9x+14 \geq 0$$

$$(x-2)(x-7) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 7 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에 의하여 $x \geq 7$

따라서 실수 x 의 최솟값은 7이다.

11

해결전략 | 부등식에 로그가 있으면 먼저 양변의 로그의 밑을 같게 만든다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_2 x > 0, \log_5(\log_2 x) > 0$$

$$\log_5(\log_2 x) > \log_5 1$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$\log_2 x > 1, \log_2 x > \log_2 2$$

$$\text{밑이 2이고 } 2 > 1 \text{이므로 } x > 2 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 양변의 밑을 같게 하여 진수를 비교하여 부등식을 풀어 자연수 x 의 개수 구하기

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_5(\log_2 x)\} > 0 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_5(\log_2 x)\} > \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{3} \text{이고 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$\log_5(\log_2 x) < 1$$

$$\log_5(\log_2 x) < \log_5 5$$

밑이 5이고 $5 > 1$ 이므로

$$\log_2 x < 5, \log_2 x < \log_2 2^5$$

$$\text{밑이 2이고 } 2 > 1 \text{이므로 } x < 32 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에 의하여 $2 < x < 32$

따라서 자연수 x 는 3, 4, 5, ..., 31의 29개이다.

🔗 풀법의 비법

주어진 로그부등식에서 진수는 $\log_5(\log_2 x)$, $\log_2 x$, x 이다. 이때 (진수) > 0 이어야 하므로 $\log_5(\log_2 x) > 0$, $\log_2 x > 0$, $x > 0$ 이다. 로그부등식을 풀 때에는 진수의 조건을 만족시키는지 반드시 확인한다.

12

해결전략 | 두 집합 A , B 를 구한 후 집합 $A \cap B$ 의 개수가 5임을 이용한다.

STEP1 집합 A 구하기

A : 진수의 조건에서 $x+1 > 0$ 이므로

$$x > -1 \quad \dots\dots ①$$

$$\log_2(x+1) \leq k \text{에서}$$

$$\log_2(x+1) \leq \log_2 2^k$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$x+1 \leq 2^k \quad \dots\dots ②$$

①, ②에 의하여 $-1 < x \leq 2^k - 1$

$$\therefore A = \{x \mid -1 < x \leq 2^k - 1\}$$

STEP2 집합 B 구하기

B : 진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+1>0$ 이므로

$$x>2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\log_2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geq 2\text{에서}$$

$$\log_2(x-2)-\log_{2^{-1}}(x+1)\geq \log_2 2^2$$

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+1)\geq \log_2 4$$

$$\log_2(x-2)(x+1)\geq \log_2 4$$

밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$$(x-2)(x+1)\geq 4, x^2-x-6\geq 0$$

$$(x+2)(x-3)\geq 0$$

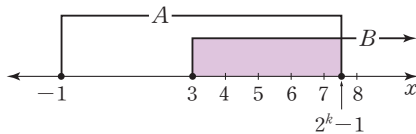
$$\therefore x\leq -2 \text{ 또는 } x\geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$\textcircled{㉔}$, $\textcircled{㉕}$ 에 의하여 $x\geq 3$

$$\therefore B=\{x|x\geq 3\}$$

STEP3 $n(A\cap B)=5$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값 구하기

두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$n(A\cap B)=5$ 를 만족시키려면

$$7\leq 2^k-1<8$$

이때 k 는 자연수이므로

$$2^k-1=7, 2^k=8=2^3$$

$$\therefore k=3$$

13

해결전략 $\log_2 x=t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

진수의 조건에서 $8x>0$, $x>0$ 이므로

$$x>0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

STEP2 $\log_2 x=t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기

$$(\log_2 8x)^2-5\log_{\sqrt{2}} x-6<0\text{에서}$$

$$(\log_2 8+\log_2 x)^2-5\log_{2^{\frac{1}{2}}} x-6<0$$

$$(3+\log_2 x)^2-10\log_2 x-6<0$$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$(3+t)^2-10t-6<0, t^2-4t+3<0$$

$$(t-1)(t-3)<0$$

$$\therefore 1<t<3 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

STEP3 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하여 m, n 의 값 구하기

$$\text{즉, } 1<\log_2 x<3\text{이므로 } \log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^3$$

밑이 2이고 $2>1$ 이므로

$$2<x<8 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉔}\text{에 의하여 } 2<x<8 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

따라서 해가 $2<x<8$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-8)<0, \text{ 즉 } x^2-10x+16<0$$

즉, $m=-10$, $n=16$ 이므로

$$m+n=6 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

채점 요소	배점
① 진수의 조건 나타내기	10 %
② $\log_2 x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식 풀기	40 %
③ x 의 값의 범위 구하기	30 %
④ $m+n$ 의 값 구하기	20 %

14

해결전략 지수에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그가 있으므로 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$

인 로그를 취한 후 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$ 로 치환한다.

STEP1 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위 구하기

$$\text{진수의 조건에서 } x>0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

STEP2 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취한 후 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$ 로 놓고

t 에 대한 이차부등식 풀기

$$(3x)^{\log_{\frac{1}{3}} x+1}>\frac{1}{27}\text{의 양변에 밑이 } \frac{1}{3}\text{인 로그를 취하면}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x)^{\log_{\frac{1}{3}} x+1}<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x+1)\log_{\frac{1}{3}} 3x<\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x+1)(\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_{\frac{1}{3}} x)<\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x+1)(-1+\log_{\frac{1}{3}} x)<3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x=t\text{로 놓으면}$$

$$(t+1)(-1+t)<3, t^2-4<0$$

$$(t+2)(t-2)<0 \quad \therefore -2<t<2$$

STEP3 로그부등식의 해를 구하여 정수 x 의 개수 구하기

$$\text{즉, } -2<\log_{\frac{1}{3}} x<2\text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{밑이 } \frac{1}{3}\text{이고 } 0<\frac{1}{3}<1\text{이므로}$$

$$\frac{1}{9}<x<9 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}\text{에 의하여 } \frac{1}{9}<x<9$$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 8이다.

15

해결전략 | 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 임을 이용한다.

STEP1 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식 세우기
진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠
 $3 - \log_2 a \neq 0$ 에서 $a \neq 8$ ㉡
이차방정식 $(3 - \log_2 a)x^2 - 2(1 - \log_2 a)x + 1 = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식
을 D 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-(1 - \log_2 a)\}^2 - (3 - \log_2 a) > 0$$

$$(\log_2 a)^2 - \log_2 a - 2 > 0$$

STEP2 로그방정식 풀어 a 의 값의 범위 구하기

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 > 0$$

$$(t+1)(t-2) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 2$$

즉, $\log_2 a < -1$ 또는 $\log_2 a > 2$ 이므로

$$\log_2 a < \log_2 2^{-1} \text{ 또는 } \log_2 a > \log_2 2^2$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$a < \frac{1}{2} \text{ 또는 } a > 4 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$0 < a < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 4 < a < 8 \text{ 또는 } a > 8$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ① $\frac{1}{4}$ 이다.

16

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_{\sqrt{5}} x = t$ 로 치환하여 판별식을 이용한다.

STEP1 $\log_{\sqrt{5}} x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기
진수의 조건에서 $k > 0$ ㉠

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2 + 4\log_{\sqrt{5}} 5x \geq \log_{\sqrt{5}} k \text{에서}$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2 + 4(\log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} x) \geq \log_{\sqrt{5}} k$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2 + 4(2 + \log_{\sqrt{5}} x) \geq \log_{\sqrt{5}} k$$

$\log_{\sqrt{5}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4(2+t) \geq \log_{\sqrt{5}} k$$

$$t^2 + 4t + 8 - \log_{\sqrt{5}} k \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

STEP2 모든 실수 t 에 대하여 부등식이 성립함을 이용하여 k 의 값의 범위 구하기

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 부등식 ㉡은 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차

방정식 $t^2 + 4t + 8 - \log_{\sqrt{5}} k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (8 - \log_{\sqrt{5}} k) \leq 0$$

$$-4 + \log_{\sqrt{5}} k \leq 0, \log_{\sqrt{5}} k \leq 4$$

$$\log_{\sqrt{5}} k \leq \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^4$$

밑이 $\sqrt{5}$ 이고 $\sqrt{5} > 1$ 이므로

$$k \leq 25 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉢에 의하여

$$0 < k \leq 25$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 25의 25개이다.

17

해결전략 | 먼저 문제의 조건을 주어진 식에 대입하여 k 의 값을 구한다.

STEP1 조건을 주어진 식에 대입하여 k 의 값 구하기

$$T = T_0 + k \log(8t+1) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

초기 온도가 20°C 인 이 화재실에서 화재가 발생한 지

$\frac{9}{8}$ 분 후의 온도가 365°C 이므로

$$T_0 = 20, t = \frac{9}{8}, T = 365 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$365 = 20 + k \log\left(8 \times \frac{9}{8} + 1\right)$$

$$365 = 20 + k \log 10$$

$$365 = 20 + k$$

$$\therefore k = 345$$

STEP2 조건을 주어진 식에 대입하여 a 의 값 구하기

a 분 후의 온도는 710°C 이므로

$$T_0 = 20, t = a, T = 710, k = 345 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$710 = 20 + 345 \log(8a+1)$$

$$\log(8a+1) = 2$$

따라서 $8a+1 = 10^2 = 100$ 이므로

$$a = \frac{99}{8}$$

18

해결전략 | 처음 불순물의 양을 a 라고 할 때, 여과기를 n 번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양을 a 로 나타낸다.

STEP1 처음 불순물의 양을 a 라고 하고 여과기를 n 번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양 구하기

처음 불순물의 양을 a 라고 할 때, 여과기를 한 번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양은 $(1-0.6)a = 0.4a$ 이므로 여과기를 n 번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양은 $0.4^n a$

STEP2 불순물의 양을 처음 양의 2% 이하가 되게 할 때의

여과기를 통과시키는 최소 횟수 구하기

불순물의 양을 처음 양의 2% 이하가 되게 하려면

$$0.4^n a \leq 0.02a, \text{ 즉 } 0.4^n \leq 0.02$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.4^n \leq \log 0.02, n \log \frac{4}{10} \leq \log \frac{2}{100}$$

$$n(2 \log 2 - 1) \leq \log 2 - 2$$

$$n(2 \times 0.3010 - 1) \leq 0.3010 - 2$$

$$-0.3980n \leq -1.6990$$

$$\therefore n \geq 4.2 \dots$$

따라서 여과기를 최소한 5번 통과시켜야 한다.

상위권 도약 문제

181~182쪽

01 5	02 1	03 ④	04 ③	05 12
06 ②	07 12	08 7년		

01

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 주어진 방정식의 양변의 밑을 같게 하여 식을 변형한다.

STEP1 로그방정식의 해를 구하여 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 의 값 구하기

진수의 조건에서

$$x \neq a, x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 |x-a| = \log_4 (x-3) \text{에서}$$

$$\log_2 |x-a| = \log_{2^2} (x-3)$$

$$\log_2 |x-a| = \frac{1}{2} \log_2 (x-3)$$

$$2 \log_2 |x-a| = \log_2 (x-3)$$

$$\log_2 (x-a)^2 = \log_2 (x-3)$$

$$\text{즉, } (x-a)^2 = x-3 \text{이므로}$$

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{\{-(2a+1)\}^2 - 4(a^2+3)}}{2}$$

$$= \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a-11}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하려면 $4a-11 \geq 0$,

$$\text{즉 } a \geq \frac{11}{4} \text{이어야 하므로}$$

$$f(0)=f(1)=f(2)=0$$

STEP2 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값 구하기

(i) $a=3$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } x > 3$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x=3 \text{ 또는 } x=4$$

$\rightarrow a=3$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 x 의 값을 구한다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 $x=4$ 이므로

$$f(3)=1$$

(ii) $a=4$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x = \frac{9-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $\rightarrow a=4$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 x 의 값을 구한다.

$$x = \frac{9-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

$$f(4)=2$$

(iii) $a=5$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3 < x < 5 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x=4 \text{ 또는 } x=7$$

$\rightarrow a=5$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 x 의 값을 구한다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 $x=4$ 또는 $x=7$ 이

므로

$$f(5)=2$$

(i)~(iii)에 의하여

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

$$= 0+0+0+1+2+2=5$$

02

해결전략 | $\overline{AB}=2$ 임을 이용하여 로그방정식을 세운다.

STEP1 $\overline{AB}=2$ 임을 이용하여 로그방정식 세우기

직선 $x=k$ 가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2 (8-x)$ 와

만나는 점이 $A(k, \log_2 k)$, $B(k, -\log_2 (8-k))$ 이고

$\overline{AB}=2$ 이므로

$$|\log_2 k - \{-\log_2 (8-k)\}| = 2$$

$$|\log_2 k + \log_2 (8-k)| = 2$$

$$|\log_2 k(8-k)| = 2$$

$$\therefore \log_2 k(8-k) = -2 \text{ 또는 } \log_2 k(8-k) = 2$$

STEP2 로그방정식 풀기

(i) $\log_2 k(8-k) = -2$ 일 때

진수의 조건에서 $k > 0$, $8-k > 0$ 이므로

$$0 < k < 8$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\log_2 k(8-k) = -2 \text{에서}$$

$$k(8-k) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$4k^2 - 32k + 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 1}}{4} = \frac{8 \pm 3\sqrt{7}}{2}$$

㉠에 의하여

$$k = \frac{8-3\sqrt{7}}{2} \text{ 또는 } k = \frac{8+3\sqrt{7}}{2}$$

(ii) $\log_2 k(8-k) = 2$ 일 때

진수의 조건에서 $k > 0, 8-k > 0$ 이므로

$$0 < k < 8$$

$$\log_2 k(8-k) = 2 \text{ 에서}$$

$$k(8-k) = 2^2 = 4, \quad k^2 - 8k + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= -(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \times 4} \\ &= 4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

㉡에 의하여

$$k = 4 - 2\sqrt{3} \text{ 또는 } k = 4 + 2\sqrt{3}$$

STEP3 모든 실수 k 의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$\begin{aligned} &\frac{8-3\sqrt{7}}{2} \times \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \times (4-2\sqrt{3}) \times (4+2\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

03

해결전략 | x 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 주어진 방정식 풀기

진수의 조건에서 $x-2 > 0, x-a > 0$ 이므로

$$x > 2 \text{이고 } x > a$$

$$\log_3(x-2) = \log_3(x-a) \text{ 에서}$$

$$\log_3(x-2) = \log_{3^2}(x-a)$$

$$\log_3(x-2) = \frac{1}{2} \log_3(x-a)$$

$$2 \log_3(x-2) = \log_3(x-a)$$

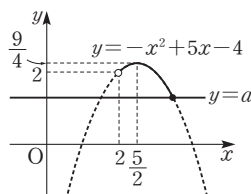
$$\log_3(x-2)^2 = \log_3(x-a) \quad \begin{array}{l} \text{양변의 로그의 밑을 9로} \\ \text{같이 변형하여} \\ \log_9(x-2)^2 = \log_9(x-a) \\ \text{로 풀어도 된다.} \end{array}$$

$$\text{즉, } (x-2)^2 = x-a \text{ 이므로}$$

$$-x^2 + 5x - 4 = a$$

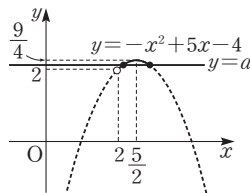
STEP2 $a < 2, a \geq 2$ 의 경우로 나누어 생각하여 a 의 값의 범위 구하기

(i) $a < 2$ 일 때, $x > 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 5x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 는 오직 한 점에서 만난다.



(ii) $a \geq 2$ 일 때, $x > a$ 에서 함수 $y = -x^2 + 5x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$2 < a < \frac{9}{4}$$



(i), (ii)에 의하여

$$2 < a < \frac{9}{4}$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = \frac{9}{4}$ 이므로

$$10\alpha\beta = 10 \times 2 \times \frac{9}{4} = 45$$

04

해결전략 | $\log_2 x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 방정식 세우기

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + k = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t + k = 0$$

..... ㉠

STEP2 t 에 대한 방정식의 두 근의 위치 이해하기

이때 주어진 방정식의 두 근이 $\frac{1}{2}$ 과 16 사이에 있고

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1, \log_2 16 = 4 \text{ 이므로 방정식 ㉠의 두 근이}$$

-1과 4 사이에 있어야 한다.

→ 함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 축은 직선 $t=3$ 이다.

STEP3 k 의 값의 범위 구하기

$$f(t) = t^2 - 6t + k \text{ 라고 하면 함수}$$

$$y=f(t) \text{의 그래프의 개형은 오른쪽}$$

쪽 그림과 같아야 한다.

(i) 이차방정식 $t^2 - 6t + k = 0$ 의

판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - k \geq 0$$

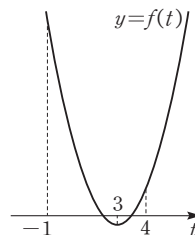
$$\therefore k \leq 9$$

(ii) $f(-1) > 0$ 에서 $7+k > 0$ 이므로 $k > -7$

$$f(4) > 0 \text{에서 } -8+k > 0 \text{이므로 } k > 8$$

(i), (ii)에 의하여

$$8 < k \leq 9$$



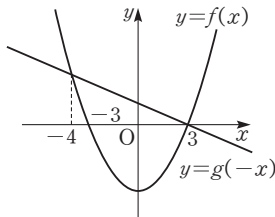
05

해결전략 | 진수의 크기를 비교한 후 주어진 그래프를 이용한다.

STEP1 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(-x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 구하기

$f(-3)=f(3)=0$ 이므로 포물선 $y=f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이고, 직선 $y=g(-x)$ 는 직선 $y=g(x)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(-x)$ 의 그래프의 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점과 y 축에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(-x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 각각 -4 , 3 이다.



STEP2 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(-x)$ 의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해 구하기

부등식 $\log_{0.5} f(x) > \log_{0.5} g(-x)$ 의 진수의 조건에서

$$f(x) > 0, g(-x) > 0$$

$$f(x) > 0 \text{에서 } x < -3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$g(-x) > 0 \text{에서 } x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\log_{0.5} f(x) > \log_{0.5} g(-x) \text{에서}$$

$$\text{밑이 } 0.5 \text{이고 } 0 < 0.5 < 1 \text{이므로}$$

$$f(x) < g(-x)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(-x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있어야 하므로

$$-4 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}, \textcircled{㉓} \text{에 의하여}$$

$$-4 < x < -3$$

$$\text{따라서 } \alpha = -4, \beta = -3 \text{이므로}$$

$$\alpha\beta = 12$$

06

해결전략 | x 의 값의 범위를 나누어 로그방정식을 푼다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식 변형하기

$$|\log_3 x - \log_3 6| + \log_3 y \leq 1 \text{에서}$$

$$|\log_3 \frac{x}{6}| + \log_3 y \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

STEP2 $\log_3 \frac{x}{6} < 0$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수 구하기

(i) $\log_3 \frac{x}{6} < 0$ 일 때

$$\text{밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$0 < \frac{x}{6} < 1 \quad \therefore 0 < x < 6$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } -\log_3 \frac{x}{6} + \log_3 y \leq 1$$

$$\log_3 \frac{6y}{x} \leq \log_3 3 \text{에서 밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$\frac{6y}{x} \leq 3$$

$$\therefore 2y \leq x$$

$x=1$ 이면 이를 만족시키는 자연수 y 는 존재하지 않는다.

$$x=2 \text{이면 } y=1$$

$$x=3 \text{이면 } y=1$$

$$x=4 \text{이면 } y=1, 2$$

$$x=5 \text{이면 } y=1, 2$$

따라서 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$1+1+2+2=6$$

STEP3 $\log_3 \frac{x}{6} \geq 0$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수 구하기

(ii) $\log_3 \frac{x}{6} \geq 0$ 일 때

$$\text{밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$\frac{x}{6} \geq 1 \quad \therefore x \geq 6$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } \log_3 \frac{x}{6} + \log_3 y \leq 1$$

$$\log_3 \frac{xy}{6} \leq \log_3 3 \text{에서 밑이 } 3 \text{이고 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$\frac{xy}{6} \leq 3$$

$$\therefore xy \leq 18$$

$$x=6 \text{이면 } y=1, 2, 3$$

$$x=7 \text{이면 } y=1, 2$$

$$x=8 \text{이면 } y=1, 2$$

$$x=9 \text{이면 } y=1, 2$$

$$10 \leq x \leq 18 \text{이면 } y=1$$

따라서 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$3+2+2+2+1 \times 9 = 18$$

(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$6+18=24$$

07

해결전략 $|\log_2|x|| = t$ 로 치환한 후 부등식의 해를 곡선과 직선이 만나는 교점과 연관지어 생각한다.

STEP1 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_2|x| = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 세우기

$$\log_{\frac{1}{2}}x^2 \times \log_2x^2 + 16\log_2|x| \geq n \text{에서}$$

$$(-2\log_2|x|) \times 2\log_2|x| + 16\log_2|x| \geq n$$

$$\log_2|x| = t \text{라고 하면}$$

$$-4t^2 + 16t \geq n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 t 에 대한 이차부등식을 만족시키는 $|x|$ 의 값의 범위 구하기

$f(t) = -4t^2 + 16t$ 라고 할 때, 곡선 $y=f(t)$ 와 직선 $y=n$ 이 만나지 않거나 한 점에서 만나면 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 두 점에서 만나야 한다.

이때 곡선 $y=f(t)$ 는 직선 $y=2$ 에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(t)$ 와 직선 $y=n$ 이 만나는 교점의 x 좌표를 α , $4-\alpha$ ($0 < \alpha < 2$)라고 할 수 있다.

부등식 $\textcircled{7}$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는

$$\alpha \leq t \leq 4-\alpha \text{이므로 } \alpha \leq \log_2|x| \leq 4-\alpha \text{에서}$$

$$\log_22^\alpha \leq \log_2|x| \leq \log_22^{4-\alpha}$$

밑이 2이고 $2 > 1$ 이므로

$$2^\alpha \leq |x| \leq 2^{4-\alpha}$$

STEP3 자연수 n 의 값 구하기

두 조건 (가), (나)에 의하여 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 $2(2^{4-\alpha} - 2^\alpha + 1) = 14$ 이므로

$$2^{4-\alpha} - 2^\alpha = 6$$

양변에 2^α 를 곱하면

$$16 - (2^\alpha)^2 = 6 \times 2^\alpha$$

$$2^\alpha = s \ (s > 0) \text{라고 하면}$$

$$s^2 + 6s - 16 = 0, \ (s+8)(s-2) = 0$$

$$\therefore s = -8 \text{ 또는 } s = 2$$

그런데 $s > 0$ 이므로 $s = 2$

$$\text{즉, } 2^\alpha = 2 \text{이므로 } \alpha = 1$$

따라서 조건을 모두 만족시키는 자연수 n 의 값은

$$f(1) = 12$$

08

해결전략 n 년 후의 기업의 예산과 연구비를 각각 구하여 비교한다.

STEP1 예산과 연구비의 관계를 식으로 나타내기

올해 기업의 예산을 A , 연구비를 B 라고 하면

$$B = \frac{6}{100}A \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP2 n 년 후의 기업의 예산과 연구비 각각 구하기

예산의 증가율은 매년 15 %이므로 올해부터 n 년 후의 예산은

$$\left(1 + \frac{15}{100}\right)^n A = 1.15^n A$$

연구비의 증가율은 매년 20 %이므로 올해부터 n 년 후의 연구비는

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right)^n B = 1.2^n B$$

STEP3 양변에 상용로그를 취하여 n 의 값의 범위 구하기

예산에서 연구비가 차지하는 비율이 8 % 이상이 되려면

$$\frac{1.2^n B}{1.15^n A} \geq \frac{8}{100} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$\frac{1.2^n \times \frac{6}{100} A}{1.15^n A} \geq \frac{8}{100}, \ \left(\frac{1.2}{1.15}\right)^n \geq \frac{4}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{1.2}{1.15}\right)^n \geq \log \frac{4}{3}$$

$$n \log \frac{1.2}{1.15} \geq \log \frac{4}{3}$$

$$n(\log 1.2 - \log 1.15) \geq 2 \log 2 - \log 3$$

$$n(0.0792 - 0.0607) \geq 2 \times 0.3010 - 0.4771$$

$$0.0185n \geq 0.1249$$

$$\therefore n \geq 6.7\dots$$

따라서 7년 후부터 예산에서 연구비가 차지하는 비율이 8 % 이상이 된다.

01 답 (1) $360^\circ \times n + 60^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 130^\circ$

(3) $360^\circ \times n + 320^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 220^\circ$

02 답 (1) 제4사분면 (2) 제1사분면

(3) 제3사분면 (4) 제4사분면

(1) $320^\circ = 360^\circ \times 0 + 320^\circ$ 이므로 제4사분면의 각이다.

(2) $1500^\circ = 360^\circ \times 4 + 60^\circ$ 이므로 제1사분면의 각이다.

(3) $-130^\circ = 360^\circ \times (-1) + 230^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

(4) $-740^\circ = 360^\circ \times (-3) + 340^\circ$ 이므로 제4사분면의 각이다.

03 답 (1) $\frac{2}{9}\pi$ (2) $-\frac{7}{12}\pi$ (3) 36° (4) -150°

(1) $40^\circ = 40 \times 1^\circ = 40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi$

(2) $-105^\circ = (-105) \times 1^\circ = (-105) \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{12}\pi$

(3) $\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \times 1(\text{라디안}) = \frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ$

(4) $-\frac{5}{6}\pi = \left(-\frac{5}{6}\pi\right) \times 1(\text{라디안}) = \left(-\frac{5}{6}\pi\right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$

04 답 (위에서부터) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, 135^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

05 답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (2) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

(3) $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$ (4) $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

(3) $\frac{13}{4}\pi = 2\pi + \frac{5}{4}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$

(4) $-\frac{10}{3}\pi = -4\pi + \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

06 답 $l = \pi, S = 2\pi$

$l = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi, S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$

07 답 (1) $-\frac{5}{13}$ (2) $\frac{12}{13}$ (3) $-\frac{5}{12}$

$OP = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$\sin \theta = -\frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$

08 답 (가) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (나) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (다) -1

09 답 (1) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

(2) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

(4) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

(1) $\theta = 400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$ 에서 θ 는 제1사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

(2) $\theta = -800^\circ = 360^\circ \times (-3) + 280^\circ$ 에서 θ 는 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(3) $\theta = \frac{19}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{3}{4}\pi$ 에서 θ 는 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

(4) $\theta = -\frac{41}{6}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{7}{6}\pi$ 에서 θ 는 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

10 답 $\cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

그런데 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

$\therefore \cos \theta = -\frac{4}{5}$

또, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$

필수유형 01

189쪽

01-1 답 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면

해결전략 θ 를 일반각의 범위로 나타낸 후 $\frac{\theta}{3}$ 가 나타내는 각의 범위를 구한다.

STEP1 $\frac{\theta}{3}$ 의 범위 구하기

θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)

각 변을 3으로 나누면

$120^\circ \times n + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 60^\circ$

STEP2 $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

나누어 $\frac{\theta}{3}$ 가 나타내는 각의 범위 구하기

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때,

$120^\circ \times 3k + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 60^\circ$

$\therefore 360^\circ \times k + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 60^\circ$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다. $\rightarrow 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ$ 인 동경의 위치와 같다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+1) + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 150^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다. $\rightarrow 150^\circ < \frac{\theta}{3} < 180^\circ$ 인 동경의 위치와 같다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+2) + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 300^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다. $\rightarrow 270^\circ < \frac{\theta}{3} < 300^\circ$ 인 동경의 위치와 같다.

STEP 3 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면 구하기

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면이다.

01-2 [답] 제2사분면 또는 제4사분면

해결전략 | θ 를 일반각의 범위로 나타낸 후 $\frac{\theta}{2}$ 가 나타내는 각의 범위를 구한다.

STEP 1 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위 구하기

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

각 변을 2로 나누면

$$180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

STEP 2 $n=2k, n=2k+1$ (k 는 정수)일 때로 나누어 $\frac{\theta}{2}$ 가 나타내는 각의 범위 구하기

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times 2k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 135^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 135^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

STEP 3 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면 구하기

(i), (ii)에 의하여 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

01-3 [답] 제4사분면

해결전략 | θ 를 일반각의 범위로 나타낸 후 $\frac{\theta}{3}$ 가 나타내는 각의 범위를 구한다.

STEP 1 $\frac{\theta}{3}$ 의 범위 구하기

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 0^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

각 변을 3으로 나누면

$$120^\circ \times n < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 30^\circ$$

STEP 2 $n=3k, n=3k+1, n=3k+2$ (k 는 정수)일 때로 나누어 $\frac{\theta}{3}$ 가 나타내는 각의 범위 구하기

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 30^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 120^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 150^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 240^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

STEP 3 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면 구하기

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제3사분면이므로 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제4사분면이다.

01-4 [답] 제2사분면 또는 제4사분면

해결전략 | 2θ 를 일반각의 범위로 나타낸 후 θ 가 나타내는 각의 범위를 구한다.

STEP 1 θ 의 범위 구하기

2θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

각 변을 2로 나누면

$$180^\circ \times n + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 180^\circ$$

STEP 2 $n=2k, n=2k+1$ (k 는 정수)일 때로 나누어 θ 가 나타내는 각의 범위 구하기

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times 2k + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times 2k + 180^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 135^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

즉, θ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times (2k+1) + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times (2k+1) + 180^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 315^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

즉, θ 는 제4사분면의 각이다.

STEP 3 θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면 구하기

(i), (ii)에 의하여 θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

01-5 ㉠

해결전략 | 보기의 각의 크기를 주어진 꼴로 변형하여 α° 를 각각 구한 후 그 크기를 비교한다.

$$\textcircled{1} -600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ$$

$$\textcircled{2} -130^\circ = 360^\circ \times (-1) + 230^\circ$$

$$\textcircled{3} -85^\circ = 360^\circ \times (-1) + 275^\circ$$

$$\textcircled{4} 490^\circ = 360^\circ \times 1 + 130^\circ$$

$$\textcircled{5} 900^\circ = 360^\circ \times 2 + 180^\circ$$

따라서 α° 의 크기가 가장 작은 것은 $\textcircled{1}$ 이다.

01-6 ㉡ 풀이 참조

해결전략 | 주어진 그림에서 θ 의 범위를 찾아 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위를 구한다.

STEP 1 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위 구하기

주어진 그림에서 θ 를 나타내는 동경이 속하는 영역은

$$360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 30^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times n + 150^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

각 변을 2로 나누면

$$180^\circ \times n < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 15^\circ \text{ 또는}$$

$$180^\circ \times n + 75^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$$

STEP 2 $n=2k, n=2k+1$ (k 는 정수)일 때로 나누어 $\frac{\theta}{2}$ 가 나타내는 각의 범위 구하기

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times 2k < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 15^\circ \text{ 또는}$$

$$180^\circ \times 2k + 75^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 90^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 15^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times k + 75^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times (2k+1) < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 15^\circ \text{ 또는}$$

$$180^\circ \times (2k+1) + 75^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ$$

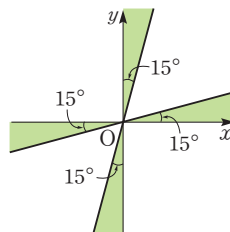
$$\therefore 360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 195^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times k + 255^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

STEP 3 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타내기

(i), (ii)에 의하여 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



필수유형 02

191쪽

02-1 ㉢ $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

해결전략 | 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계를 찾는다.

STEP 1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

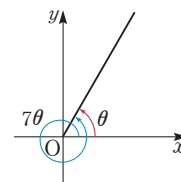
오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 n 의 값 구하기

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{n}{3}\pi < \pi \text{이므로}$$



$$0 < n < 3$$

$$\therefore n = 1, 2$$

STEP3 각 θ 의 크기 구하기

$n = 1, 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

02-2 ㉡ $\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

해결전략 | 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일치선 위에 있고 방향이 반대가 되도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계를 찾는다.

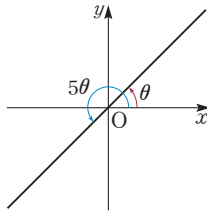
STEP1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일치선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$



..... ㉠

STEP2 n 의 값 구하기

$$\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n+1}{4}\pi < 2\pi \text{이므로}$$

$$3 < 2n < 7, \frac{3}{2} < n < \frac{7}{2}$$

$$\therefore n = 2, 3$$

STEP3 각 θ 의 크기 구하기

$n = 2, 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{4}\pi$$

02-3 ㉢ $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

해결전략 | 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이 되도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계를 찾는다.

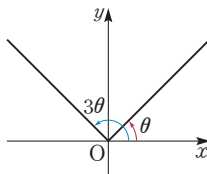
STEP1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$



..... ㉠

STEP2 n 의 값 구하기

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$-1 < 2n < 3, -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

$$\therefore n = 0, 1$$

STEP3 각 θ 의 크기 구하기

$n = 0, 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

02-4 ㉣ $\frac{2}{3}\pi$

해결전략 | 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일치하도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계를 찾는다.

STEP1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$5\theta - 2\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 2n\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi$$

..... ㉠

STEP2 n 의 값 구하기

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{2n}{3}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$\frac{3}{4} < n < \frac{3}{2}$$

$$\therefore n = 1$$

STEP3 각 θ 의 크기 구하기

$n = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

02-5 ㉤ $\frac{3}{2}\pi$

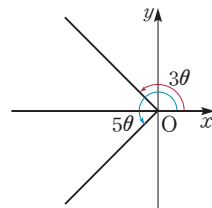
해결전략 | 각 3θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이 되도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계를 찾는다.

STEP1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

오른쪽 그림과 같이 각 3θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + 5\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$8\theta = 2n\pi$$



$$\therefore \theta = \frac{n}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP 2 n 의 값 구하기

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{n}{4}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$0 < n < 4$$

$$\therefore n = 1, 2, 3$$

STEP 3 모든 각 θ 의 크기의 합 구하기

$n = 1, 2, 3$ 을 ⑦에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

02-6 ㉠ $\frac{2}{3}\pi$

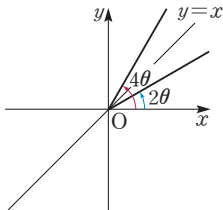
해결전략 | 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 되도록 좌표평면 위에 나타내고 두 각 사이의 관계식을 찾는다.

STEP 1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

오른쪽 그림과 같이 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$2\theta + 4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

(n 은 정수)



$$6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$6\theta = \frac{4n+1}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{4n+1}{12}\pi \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

STEP 2 각 θ 의 크기 구하기

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{4n+1}{12}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{4} < n < \frac{11}{4}$$

$$\therefore n = 0, 1, 2$$

$n = 0, 1, 2$ 를 ⑦에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

STEP 3 $\alpha - \beta$ 의 값 구하기

따라서 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$ 이므로

$$\alpha - \beta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{2}{3}\pi$$

㉡ 풍뎡의 비법

서로 다른 동경을 나타내는 각의 크기가 각각 α , β 일 때,

① 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면

$$\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

② 두 동경이 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이면

$$\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수이다.})$$

필수유형 03

193쪽

03-1 ㉠ 18

해결전략 | 부채꼴의 호의 길이를 구하는 공식에 주어진 값을 대입하여 부채꼴의 반지름의 길이를 구한다.

STEP 1 부채꼴의 반지름의 길이를 r 로 놓고 식 세우기

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 중심각의 크기가

$$\frac{\pi}{3} \text{이고 호의 길이가 } 6\pi \text{이므로}$$

$$r \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

STEP 2 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

$$\therefore r = 18$$

03-2 ㉠ $\frac{\pi}{6}$

해결전략 | 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 주어진 값을 대입하여 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구한다.

STEP 1 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 호의 길이가 π 이고 넓이가 3π 이므로

$$\frac{1}{2}r \times \pi = 3\pi \quad \therefore r = 6$$

STEP 2 부채꼴의 중심각의 크기 구하기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라고 하면 호의 길이가 π 이므로

$$6\theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

03-3 ㉠ 9

해결전략 | 부채꼴의 둘레의 길이를 구하는 식에 주어진 값을 대입하여 부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 구한다.

STEP 1 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + r \times 2 = 12$$

$$4r = 12 \quad \therefore r = 3$$

STEP2 부채꼴의 넓이 구하기

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times 2 = 9$$

03-4 답 $2\sqrt{2}\pi$

해결전략 | 원의 넓이와 부채꼴의 넓이를 각각 구하여 비교한다.

STEP1 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

반지름의 길이가 4인 원의 넓이는

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{r^2}{8} \pi$$

원의 넓이와 부채꼴의 넓이가 서로 같으므로

$$\frac{r^2}{8} \pi = 16\pi, \quad r^2 = 128$$

$$\therefore r = 8\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

STEP2 부채꼴의 호의 길이 구하기

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$8\sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\pi$$

03-5 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 작은 부채꼴 4개와 큰 부채꼴 4개의 호의 길이와 큰 부채꼴과 작은 부채꼴 사이의 길이를 모두 더하여 바깥쪽 둘레의 길이를 구한다.

STEP1 도형의 바깥쪽 둘레의 길이를 θ 에 대한 식으로 나타내기

반지름의 길이가 5인 4개의 부채꼴의 중심각의 크기가 θ 이므로 이 부채꼴의 호 4개의 총길이는

$$5\theta \times 4 = 20\theta$$

반지름의 길이가 3인 4개의 부채꼴의 중심각의 크기의 합이 $2\pi - 4\theta$ 이므로 이 부채꼴의 호 4개의 총길이는

$$3 \times (2\pi - 4\theta) = 6\pi - 12\theta$$

길이가 2인 선분이 8개 있으므로 이 선분 8개의 길이는

$$2 \times 8 = 16$$

따라서 도형의 바깥쪽 둘레의 길이는

$$20\theta + (6\pi - 12\theta) + 16 = 6\pi + 8\theta + 16$$

STEP2 θ 의 크기 구하기

이때 도형의 바깥쪽 둘레의 길이가 $6\pi + 20$ 이므로

$$6\pi + 8\theta + 16 = 6\pi + 20$$

$$8\theta + 16 = 20, \quad 8\theta = 4$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2}$$

필수유형 04

195쪽

04-1 답 48π

해결전략 | 부채꼴의 겹넓이는 옆면인 부채꼴의 넓이와 밑면인 원의 넓이의 합임을 이용한다.

STEP1 옆면의 넓이 구하기

주어진 조건을 이용하여 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

옆면인 부채꼴의 호의 길이는

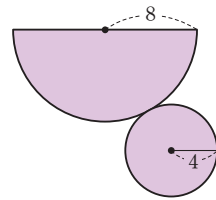
$$2\pi \times 4 = 8\pi \text{이므로 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8\pi = 32\pi$$

STEP2 겹넓이 구하기

따라서 원뿔의 겹넓이는

$$(\text{부채꼴의 넓이}) + (\text{밑면인 원의 넓이}) = 32\pi + \pi \times 4^2 = 48\pi$$



04-2 답 반지름의 길이: 3, 중심각의 크기: 2

해결전략 | 부채꼴의 넓이를 부채꼴의 반지름의 길이 r 에 대한 이차식으로 나타내어 이차함수의 최댓값을 구한다.

STEP1 부채꼴의 반지름의 길이를 r 로 놓고, r 의 값의 범위 구하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + l = 12 \quad \therefore l = 12 - 2r$$

이때 $r > 0$, $l > 0$ 이므로 $r > 0$, $12 - 2r > 0$

$$\therefore 0 < r < 6$$

STEP2 부채꼴의 넓이를 r 에 대한 식으로 나타내기

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} r (12 - 2r) = -r^2 + 6r$$

$$= -(r - 3)^2 + 9 \quad (0 < r < 6)$$

STEP3 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이와 중심각의 크기 구하기

따라서 S 는 $r = 3$ 일 때 최댓값 9를 가지므로 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 3이다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \theta = 9 \quad \therefore \theta = 2$$

04-3 $\frac{81}{4} \text{ cm}^2$

해결전략 | 부채꼴의 넓이를 부채꼴의 반지름의 길이 r 에 대한 이차식으로 나타내어 이차함수의 최댓값을 구한다.

STEP1 쿠키의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 로 놓고, r 의 값의 범위를 구하기

부채꼴 모양의 쿠키의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$, 호의 길이를 $l \text{ cm}$ 라고 하면 둘레의 길이가 18 cm 이므로

$$2r + l = 18 \quad \therefore l = 18 - 2r$$

이때 $r > 0$, $l > 0$ 이므로 $r > 0$, $18 - 2r > 0$

$$\therefore 0 < r < 9$$

STEP2 쿠키의 넓이를 r 에 대한 식으로 나타내기

부채꼴 모양의 쿠키의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}r(18 - 2r) = -r^2 + 9r$$

$$= -\left(r - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4} \quad (0 < r < 9)$$

STEP3 쿠키의 넓이의 최댓값 구하기

따라서 S 는 $r = \frac{9}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{81}{4}$ 을 가지므로 쿠키의

넓이의 최댓값은 $\frac{81}{4} \text{ cm}^2$ 이다.

04-4 $\frac{4\sqrt{5}}{3}\pi$

해결전략 | 부채꼴의 호의 길이가 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같음을 이용하여 밑면의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

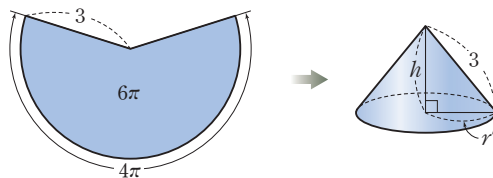
부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$l = 4\pi, S = 6\pi$$

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서}$$

$$6\pi = \frac{1}{2} \times r \times 4\pi \quad \therefore r = 3$$

STEP2 밑면인 원의 반지름의 길이와 원뿔의 높이 구하기



위의 그림과 같이 부채꼴을 옆면으로 하는 원뿔의 높이를 h , 밑면인 원의 반지름의 길이를 r' 이라고 하면

$$2\pi r' = 4\pi \quad \therefore r' = 2$$

$$\therefore h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

STEP3 원뿔의 부피 구하기

따라서 원뿔의 부피는

$$\frac{\pi}{3} \times r'^2 \times h = \frac{\pi}{3} \times 2^2 \times \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi$$

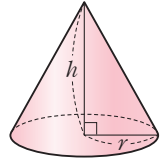
풍뎡이의 비법

원뿔의 부피

밑면인 원의 반지름의 길이가 r ,

높이가 h 인 원뿔의 부피 V 는

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



04-5 $3\sqrt{3} - \pi$

해결전략 | 정육각형의 꼭짓점과 원의 중심을 이으면 정육각형은 6개의 정삼각형으로 나누어지므로 하나의 정삼각형에서 색칠한 부분의 넓이를 알아본다.

STEP1 정육각형을 6개의 정삼각형으로 나누어 한 개의 정삼각형의 넓이 구하기

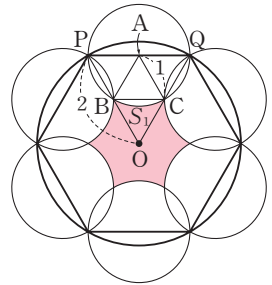
색칠한 부분의 넓이를 S 라

고 하면 오른쪽 그림에서

$$S = 6S_1$$

이때 $\triangle OPQ$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$\triangle OPQ = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$



STEP2 색칠한 부분의 넓이

구하기

한편, $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$$S_1 = \triangle OPQ$$

$$- \{ \triangle APB + (\text{부채꼴 } ABC \text{의 넓이}) + \triangle ACQ \}$$

$$= \sqrt{3} - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

$$S = 6S_1 = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 3\sqrt{3} - \pi$$

필수유형 05

197쪽

05-1 -2

해결전략 | 점 P를 좌표평면 위에 나타내고 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값을 구한다.

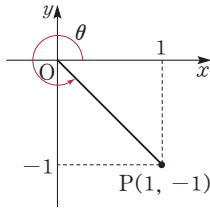
STEP1 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{2}(\sin \theta - \cos \theta) \\ = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$



05-2 ㉡ 18

해결전략 | 점 P를 좌표평면 위에 나타내고 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값을 구한다.

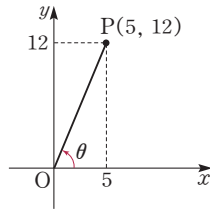
STEP1 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13},$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}$$



STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{13 \sin \theta + 10 \tan \theta}{13 \cos \theta - 3} \\ = \frac{13 \times \frac{12}{13} + 10 \times \frac{12}{5}}{13 \times \frac{5}{13} - 3} = \frac{12 + 24}{5 - 3} = 18 \end{aligned}$$

05-3 ㉡ $-\sqrt{2} - 2\sqrt{7} + 2$

해결전략 | 점 P를 좌표평면 위에 나타내고 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값을 구한다.

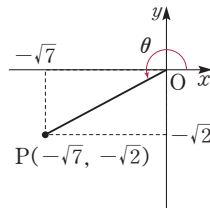
STEP1 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값 구하기

$$\overline{OP} = \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 3$$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$



STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore 3 \sin \theta + 6 \cos \theta + \sqrt{14} \tan \theta \\ = 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 6 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ = -\sqrt{2} - 2\sqrt{7} + 2 \end{aligned}$$

05-4 ㉡ $\sqrt{13}$

해결전략 | 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin \theta$ 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\sin \theta$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3}}$$

STEP2 양수 a 의 값 구하기

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \sqrt{a^2 + 3} = 4$$

$$a^2 + 3 = 16, a^2 = 13$$

$$\therefore a = \sqrt{13} (\because a > 0)$$

05-5 ㉡ $\frac{3}{4}$

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 잡아 $\tan \theta$ 의 값을 구한다.

STEP1 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 좌표 구하기

θ 가 제3사분면의 각이므로 각 θ 를 나타내는 동경을 OP

라고 할 때, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 에서 점 P의 좌표를

$(-4, a)$ ($a < 0$)로 놓을 수 있다.

$$\text{이때 } \overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + 16} = 5 \text{이므로}$$

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

$$\therefore a = -3 (\because a < 0)$$

STEP2 $\tan \theta$ 의 값 구하기

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, -3)$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

● 다른 풀이

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

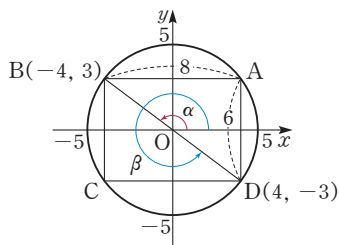
따라서 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

05-6 ㉡ $\frac{3}{5}$

해결전략 | 두 점 B, D의 좌표를 구하여 $\cos \alpha, \tan \beta$ 의 값을 각각 구한다.

STEP1 두 점 B, D의 좌표 구하기



$\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$ 이고, 점 B는 제2사분면, 점 D는 제4사분면 위에 있으므로

$B(-4, 3)$, $D(4, -3)$

STEP2 $\cos \alpha$, $\tan \beta$ 의 값 구하기

두 점 B, D는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$$\overline{OB}=\overline{OD}=5$$

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \tan \beta = -\frac{3}{4}$$

STEP3 $\cos \alpha \tan \beta$ 의 값 구하기

$$\therefore \cos \alpha \tan \beta = -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5}$$

필수유형 06

199쪽

06-1 답 (1) 제2사분면의 각 (2) 제4사분면의 각

해결전략 | 각 조건을 만족시키는 θ 가 제몇 사분면의 각인지 파악한 후 두 조건을 동시에 만족시키는 사분면을 찾는다.

(1) 사인이 양수이고, 탄젠트가 음수인 사분면은 제2사분면이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

(2) 사인이 음수이고, 코사인이 양수인 사분면은 제4사분면이므로 θ 는 제4사분면의 각이다.

06-2 답 제2사분면의 각

해결전략 | 각 조건을 만족시키는 θ 가 제몇 사분면의 각인지 파악한 후 두 조건을 동시에 만족시키는 사분면을 찾는다.

STEP1 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제몇 사분면의 각인지 구하기

(i) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 일 때, } \theta \text{는 제2사분면의 각이다.}$$

$$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0 \text{ 일 때, } \theta \text{는 제3사분면의 각이다.}$$

따라서 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

STEP2 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제몇 사분면의 각인지 구하기

(ii) $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 일 때, } \theta \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{ 일 때, } \theta \text{는 제2사분면의 각이다.}$$

따라서 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

STEP3 θ 는 제몇 사분면의 각인지 구하기

(i), (ii)에 의하여 θ 는 제2사분면의 각이다.

06-3 답 ③

해결전략 | 주어진 두 부등식을 만족시키는 θ 가 제몇 사분면의 각인지 구한 후 그 사분면에 있는 각을 찾는다.

STEP1 주어진 부등식을 만족시키는 θ 는 제몇 사분면의 각인지 구하기

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} > 0 \text{에서}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\text{이때 } \sin \theta + \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이므로

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

STEP2 보기에서 제1사분면의 각 찾기

$$\textcircled{1} -\frac{2}{3}\pi = -120^\circ \text{이므로 제3사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{2} -\frac{\pi}{5} = -36^\circ \text{이므로 제4사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{3} \frac{3}{8}\pi = 67.5^\circ \text{이므로 제1사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{4} \frac{5}{6}\pi = 150^\circ \text{이므로 제2사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{5} \frac{7}{8}\pi = 157.5^\circ \text{이므로 제2사분면의 각이다.}$$

따라서 θ 의 크기가 될 수 있는 것은 ③이다.

06-4 답 ②

해결전략 | θ 가 제2사분면의 각일 때의 삼각함수의 부호를 조사하여 보기의 부호를 각각 구한다.

STEP1 삼각함수의 부호 조사하기

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

STEP2 보기의 부호 조사하기

- ① $\tan \theta < 0$
 ② $\sin \theta > 0, -\cos \theta > 0$ 이므로
 $\sin \theta - \cos \theta > 0$
 ③ $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로
 $\cos \theta + \tan \theta < 0$
 ④ $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로
 $\sin \theta \cos \theta < 0$
 ⑤ $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이므로
 $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0$

따라서 부호가 다른 것은 ②이다.

06-5 ㉔ $-\sin \theta - 2\tan \theta$

해결전략 | 삼각함수의 부호를 조사하여 각각의 식을 변형한다.

STEP1 삼각함수의 부호 조사하기

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 θ 가 제4사분면의 각이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

STEP2 주어진 식 간단히 하기

$\cos \theta > 0, -\tan \theta > 0$ 이므로 $\cos \theta - \tan \theta > 0$

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta + \tan \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore |\cos \theta - \tan \theta| &= \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\sin \theta + \tan \theta)^2} \\ &= |\cos \theta - \tan \theta| = |\cos \theta| + |\sin \theta + \tan \theta| \\ &= (\cos \theta - \tan \theta) - \cos \theta - (\sin \theta + \tan \theta) \\ &= -\sin \theta - 2\tan \theta \end{aligned}$$

06-6 ㉔ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해결전략 | 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 삼각함수의 부호를 조사한 후 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 삼각함수의 부호 조사하기

$\sqrt{\sin \theta \cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta}$ 이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ ($\because \sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0$)

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이므로 $\tan \theta > 0$

STEP2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta \tan \theta < 0$ (참)

ㄴ. $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$\sin \theta + \cos \theta < 0$ (참)

ㄷ. $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{\tan \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\tan \theta}{\cos \theta}} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

☞ 풍뎡의 비법

음수의 제곱근의 성질

① $a < 0, b < 0$ 일 때 $\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

② $a > 0, b < 0$ 일 때 $\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$

필수유형 07

201 쪽

07-1 ㉔ (1) 2 (2) $\frac{2}{\cos^2 \theta}$

해결전략 | 완전제곱식은 전개하고 분수식은 통분한 후 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} (1) & (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &\quad + (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ (2) & \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta} = \frac{(1-\sin \theta) + (1+\sin \theta)}{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

07-2 ㉔ 1

해결전략 | 적당히 두 개씩 짝 지어 계산한 후 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \theta}\right) \\ &= \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} \\ &= \left(\frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta}\right) \times \left(\frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta}\right) \\ &= \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서} \\ \sin^2 \theta - 1 = -\cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta \end{array} \\ &= 1 \end{aligned}$$

07-3 ㉔ 0

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} + \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} + \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\
&= \frac{-(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

07-4 ㉡ $\sqrt{3}$

해결전략 | 주어진 등식의 좌변을 간단히 하여 $f(\theta)$ 를 구한다.

STEP 1 $\frac{\sin \theta \tan \theta}{\tan \theta - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}$ 간단히 하기

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin \theta \tan \theta}{\tan \theta - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\
&= \frac{\sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \quad \left\{ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right. \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\
&= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\
&= \frac{\sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로} \\ \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \end{array} \right. \\
&= \frac{(1 - \cos^2 \theta) - (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\
&= \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) - (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\
&= \frac{(1 + \cos \theta) - 1}{\sin \theta} \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

STEP 2 $f(\theta)$ 를 구하여 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값 구하기

$$\text{즉, } \frac{1}{f(\theta)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ 이므로}$$

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

07-5 ㉡ 풀이 참조

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 하고 우변과 같은지 확인한다.

$$\begin{aligned}
(1) &\cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta - \sin^4 \theta \\
&= (\cos^2 \theta)^2 - (\sin^2 \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta \\
&= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta \\
&= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta \\
&= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\
&= \frac{(1 + \sin \theta) - \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\
&= \frac{1 + \sin \theta - (1 - \sin^2 \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\
&= \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\
&= \frac{\sin \theta (\sin \theta + 1)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta
\end{aligned}$$

07-6 ㉡ ㄱ, ㄴ

해결전략 | 보기의 좌변을 간단히 한 후 우변과 비교하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

$$\begin{aligned}
\text{ㄱ. } &\tan^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \tan^4 \theta \\
&= \tan^2 \theta (1 - \cos^2 \theta \tan^2 \theta) + \cos^2 \theta \\
&= \tan^2 \theta \left(1 - \cos^2 \theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \cos^2 \theta \\
&= \tan^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta \\
&= \tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ (참)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄴ. } &\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\tan \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\cos \theta} \\
&= \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\
&= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\
&= \frac{1}{1 - \sin \theta} \text{ (참)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄷ. } &\sin^2 \theta - \tan^2 \theta = \sin^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\
&= \sin^2 \theta \times \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\
&= \sin^2 \theta \times \left(-\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\
&= -\sin^2 \theta \tan^2 \theta \text{ (거짓)}
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08-1 답 $-\frac{29}{15}$

해결전략 | 주어진 식의 좌변을 통분하고 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다. 이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 부호에 주의한다.

STEP1 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1+\cos \theta)\sin \theta} \\ &= \frac{1+\cos \theta}{(1+\cos \theta)\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{5}{4}$ 에서

$$\frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{4} \quad \therefore \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값 구하기

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \quad \leftarrow \cos \theta < 0 \text{임에 주의}$$

STEP3 $\tan \theta$ 의 값 구하기

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

STEP4 $\cos \theta - \tan \theta$ 의 값 구하기

$$\therefore \cos \theta - \tan \theta = -\frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{29}{15}$$

08-2 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

해결전략 | 주어진 식의 좌변을 통분하고 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다. 이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 부호에 주의한다.

STEP1 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} &= \frac{1+2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{2(1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\sin \theta}\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} = -4 \text{에서}$$

$$\frac{2}{\sin \theta} = -4 \quad \therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값 구하기

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \cos \theta > 0 \text{임에 주의}$$

STEP3 $\tan \theta$ 의 값 구하기

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

08-3 답 (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\frac{11}{16}$

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) \right\} = \frac{11}{16}$$

● **다른 풀이**

(2) 다음과 같이 곱셈 공식의 변형을 이용하여 풀 수도 있다.

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

08-4 답 $\frac{25}{4}$

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

의 값을 구한다.

STEP 1 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 의 값 구하기

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{5}{2}$$

STEP 2 $\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right)^2 \\ &= \left(-\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

08-5 $\frac{39}{16}$

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한 후 구하는 식을 간단히 하여 식의 값을 구한다.

STEP 1 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

STEP 2 $\frac{1}{\cos \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\cos \theta \sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}{(\cos \theta \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} \right)}{\left(-\frac{4}{9} \right)^2} = \frac{\frac{13}{27}}{\frac{16}{81}} = \frac{39}{16} \end{aligned}$$

08-6 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

해결전략 | 직선의 기울기를 이용하여 $\tan \theta$ 의 값을 구한 후 삼각함수의 부호를 조사하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값을 각각 구한다.

STEP 1 $\tan \theta$ 의 값 구하기

$$\text{직선 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{의 기울기가 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

STEP 2 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 부호 조사하기

$$\text{또, 직선 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{는 제2사분면과 제4사분면을 지나}$$

므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

STEP 3 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta \right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{4}{3} \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \cos \theta < 0 \text{임에 주의}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

STEP 4 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

필수유형 09

205쪽

09-1 $-\frac{5}{6}$

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 상수 k 의 값을 구한다.

STEP 1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

이차방정식 $3x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하면

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

STEP 2 ㉠에서 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\textcircled{㉠} \text{의 양변을 제곱하면 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

STEP 3 상수 k 의 값 구하기

$$\textcircled{L} \text{에서 } \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{k}{3} = -\frac{5}{18} \quad \therefore k = -\frac{5}{6}$$

09-2 ㉡ 105

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 상수 k 의 값을 구한다.

STEP 1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \text{의 값 구하기}$$

$$\text{이차방정식 } 4x^2 + kx + 7 = 0 \text{의 두 근이 } \frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP 2 $\sin \theta + \cos \theta$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{k}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\frac{4}{7}} = -\frac{k}{4} \quad (\because \textcircled{㉡})$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{k}{7} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

STEP 3 ㉢에서 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\textcircled{㉢} \text{의 양변을 제곱하면 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{k^2}{49}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{49}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{49}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{49} - 1$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{98} - \frac{1}{2}$$

STEP 4 k^2 의 값 구하기

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{7} \text{이므로}$$

$$\frac{k^2}{98} - \frac{1}{2} = \frac{4}{7}, \quad \frac{k^2}{98} = \frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{15}{14}$$

$$\therefore k^2 = 105$$

09-3 ㉢ 1

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 상수 k 의 값을 구한다.

STEP 1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기
이차방정식 $8x^2 - 12x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta - \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{8} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

STEP 2 ㉠에서 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \sin \theta = \frac{3}{2} \quad \therefore \sin \theta = \frac{3}{4}$$

STEP 3 상수 k 의 값 구하기

㉡의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2 \sin^2 \theta - 1 = \frac{k}{8} \text{이므로 } \sin \theta = \frac{3}{4} \text{을 대입하면}$$

$$2 \times \frac{9}{16} - 1 = \frac{k}{8}, \quad \frac{k}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore k = 1$$

09-4 ㉣ $8x^2 + 25x + 8 = 0$

해결전략 | α, β 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 a 인 이차방정식이 $a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} = 0$ 임을 이용하여 이차방정식을 구한다.

STEP 1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\sin \theta + \cos \theta$ 의 값 구하기

이차방정식 $5x^2 - 3x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

STEP 2 ㉠에서 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\textcircled{㉠} \text{의 양변을 제곱하면 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{16}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{25}$$

STEP3 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식 구하기

$\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 8인 이차방정식은

$$8\left\{x^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)x + \tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta}\right\} = 0$$

$$\therefore 8\left\{x^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)x + 1\right\} = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{25}{8} \end{aligned}$$

이므로 구하는 이차방정식은

$$8\left\{x^2 - \left(-\frac{25}{8}\right)x + 1\right\} = 0$$

$$\therefore 8x^2 + 25x + 8 = 0$$

09-5 $\frac{p}{q^2}$

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\cos \alpha, \cos \beta, \frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \beta}$ 사이의 관계를 조사하여 rs 를 p 와 q 의 식으로 나타낸다.

STEP1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기
이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 $\cos \alpha, \cos \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \alpha + \cos \beta = p, \cos \alpha \cos \beta = q$$

이차방정식 $x^2 - rx + s = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \beta}$ 이

므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} = r, \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\cos \beta} = s$$

STEP2 rs 를 p, q 로 나타내기

$$\begin{aligned} rs &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}\right) \times \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \times \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{p}{q} \times \frac{1}{q} = \frac{p}{q^2} \end{aligned}$$

09-6 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 상수 k 의 값을 구한 후 $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ 의 값을 이용하여 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값을 구한다.

STEP1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\sin \theta + \cos \theta$ 의 값 구하기

$2x^2 - \sqrt{3}x + k = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$$

STEP3 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

이때 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

실전 연습 문제

206~208쪽

01 ③	02 ②	03 ③	04 $\frac{\pi}{4}$	05 ③
06 54π	07 ④	08 27	09 ④	10 ②
11 ①	12 제2사분면의 각	13 풀이 참조		
14 ④	15 3	16 $4\sqrt{3}$	17 1	18 ⑤

01

해결전략 | 호도법과 육십분법 사이의 관계를 이용하여 육십분법으로 나타낸 각은 호도법으로, 호도법으로 나타낸 각은 육십분법으로 나타낸다.

$$\textcircled{1} -150^\circ = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$$

$$\textcircled{2} 48^\circ = 48 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{15}\pi$$

$$\textcircled{3} -\frac{11}{12}\pi = -\frac{11}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -165^\circ$$

$$\textcircled{4} \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 54^\circ$$

$$\textcircled{5} \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

02

해결전략 주어진 각을 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n 은 정수, $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$) 꼴로 나타내어 제몇 사분면의 각인지 조사한다.

STEP1 m, n 의 값 구하기

$-880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ$ 이므로 -880° 를 나타내는 동경은 제3사분면에 있다.

$$\therefore m = 3$$

$1100^\circ = 360^\circ \times 3 + 20^\circ$ 이므로 1100° 를 나타내는 동경은 제1사분면에 있다.

$$\therefore n = 1$$

STEP2 $m+n$ 의 값 구하기

$$\therefore m+n = 4$$

03

해결전략 보기의 각을 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n 은 정수, $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$) 꼴로 나타내어 α 의 값이 다른 하나를 찾는다.

$$\textcircled{1} -660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$$

$$\textcircled{2} -300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$$

$$\textcircled{3} 330^\circ = 360^\circ \times 0 + 330^\circ$$

$$\textcircled{4} 780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$$

$$\textcircled{5} 1140^\circ = 360^\circ \times 3 + 60^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

04

해결전략 원점에 대하여 대칭인 두 동경의 위치 관계를 파악하여 식을 세운다.

STEP1 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

θ 와 5θ 가 원점에 대하여 대칭이라면 오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이어야 하므로

$$5\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \pi$$

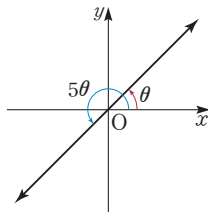
$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$

STEP2 n 의 값 구하기

θ 가 제1사분면의 각이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서

$$0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \frac{\pi}{2}, \quad -1 < 2n < 1$$

$$-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$



..... $\textcircled{1}$ $\textcircled{1}$

$$\therefore n = 0$$

STEP3 각 θ 의 크기 구하기

$n=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

채점 요소	배점
① θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② n 의 값 구하기	40 %
③ 각 θ 의 크기 구하기	20 %

05

해결전략 조건 (가)에서 θ 의 범위를 구한 후 조건 (나)를 만족시키는 모든 θ 의 크기를 구한다.

STEP1 θ 의 범위 구하기

조건 (가)에서 $\cos \theta \tan \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이고,

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

STEP2 조건 (나)를 만족시키는 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기

조건 (나)에서 각 θ 를 나타내는 동경과 6θ 를 나타내는 동경이 서로 일치하므로

$$6\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi$$

STEP3 n 의 값 구하기

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이므로}$$

$$\pi < \frac{2n}{5}\pi < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \frac{2n}{5}\pi < 2\pi$$

$$\frac{5}{2} < n < \frac{15}{4} \text{ 또는 } \frac{15}{4} < n < 5 \quad \therefore n = 3, 4$$

STEP4 모든 θ 의 크기의 합 구하기

$$n = 3, 4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{6}{5}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{8}{5}\pi$$

따라서 모든 θ 의 크기의 합은

$$\frac{6}{5}\pi + \frac{8}{5}\pi = \frac{14}{5}\pi$$

☛ 다른 풀이

STEP1 θ 의 범위 구하기

$$\cos \theta \tan \theta = \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \text{이므로}$$

조건 (가)에서 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

06

해결전략 | 부채꼴의 반지름의 길이를 r 로 놓고 주어진 조건을 이용하여 r 의 값을 구한 후 부채꼴의 넓이 공식을 이용한다.

STEP1 부채꼴의 반지름의 길이 구하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$r \times \frac{3}{4}\pi = 9\pi$$

$$\therefore r = 12 \quad \dots\dots ①$$

STEP2 부채꼴의 넓이 구하기

따라서 부채꼴의 반지름의 길이가 12이므로 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 9\pi = 54\pi \quad \dots\dots ②$$

채점 요소	배점
① 부채꼴의 반지름의 길이 구하기	50 %
② 부채꼴의 넓이 구하기	50 %

07

해결전략 | 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 로 놓고 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이를 각각 θ 에 대한 식으로 나타내어 비교한다.

STEP1 부채꼴의 둘레의 길이를 식으로 나타내기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라고 하면 둘레의 길이는

$$2 \times 8 + 8\theta = 8\theta + 16 \quad \dots\dots ㉠$$

STEP2 부채꼴의 넓이를 식으로 나타내기

부채꼴의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \theta = 32\theta \quad \dots\dots ㉡$$

STEP3 부채꼴의 중심각의 크기 구하기

부채꼴의 둘레의 길이와 넓이가 같으므로 ㉠, ㉡에서

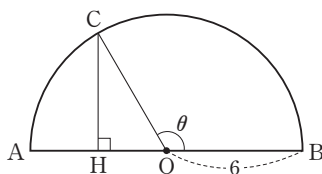
$$8\theta + 16 = 32\theta, \quad 24\theta = 16$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}$$

08

해결전략 | 부채꼴의 호의 길이가 주어졌으므로 주어진 도형에 보조선을 그어 중심각의 크기를 구한다.

STEP1 $\angle BOC$ 의 크기 구하기



반원의 중심을 O, $\angle BOC = \theta$ 라고 하면 $\overline{OB} = 6$, 호 BC의 길이가 4π 이므로 $6 \times \theta = 4\pi$ 에서 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

STEP2 $\overline{CH}^2$ 의 값 구하기

이때 삼각형 CHO는 직각삼각형이고

$$\angle COH = \pi - \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \overline{OC} = 6 \text{이므로}$$

$$\overline{CH} = \overline{OC} \times \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{CH}^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$$

09

해결전략 | 부채꼴의 호의 길이를 이용하여 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 원뿔의 밑면의 넓이 구하기

반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴의

$$\text{호의 길이는 } 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

이때 부채꼴의 호의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 밑면인 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$2\pi = 2\pi r \quad \therefore r = 1$$

따라서 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times 1^2 = \pi$$

STEP2 원뿔의 높이 구하기

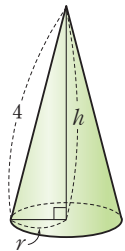
원뿔의 높이를 h 라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$h = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

STEP3 원뿔의 부피 구하기

따라서 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \pi \times \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi$$



10

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키도록 좌표평면에 나타낸 후 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값을 각각 구한다.

STEP1 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값 구하기

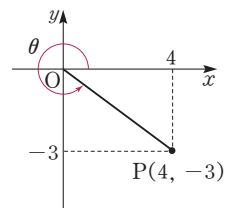
$$\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\therefore 10(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 10\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = 2$$



11

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 잡아 $\tan \theta$ 의 값을 구한다.

STEP1 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 좌표 구하기

θ 가 제2사분면의 각이므로 각 θ 를 나타내는 동경을 OP

라고 할 때, $\sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 에서 점 P의 좌표를

$(a, \sqrt{21})$ ($a < 0$)로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{21})^2} = \sqrt{a^2 + 21} = 7$ 이므로

$$a^2 + 21 = 49, a^2 = 28$$

$$\therefore a = -2\sqrt{7} \quad (\because a < 0)$$

STEP2 $\tan \theta$ 의 값 구하기

따라서 점 P의 좌표는 $(-2\sqrt{7}, \sqrt{21})$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{21}}{-2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

●→ 다른 풀이

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{21}{49} = \frac{28}{49}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{28}{49}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{-\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{-2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

12

해결전략 | 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 부호를 조사한다.

STEP1 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 부호 찾기

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{이므로}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad (\because \sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0)$$

STEP2 θ 는 제몇 사분면의 각인지 구하기

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

13

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\tan^2 \theta$ 를 변형한 후 식을 간단히 한다.

$$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) \quad \dots\dots ①$$

$$= \sin^2 \theta \times \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \sin^2 \theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \dots\dots ②$$

$$= \sin^2 \theta \tan^2 \theta \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 임을 이용하여 식 변형하기	40 %
② $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 식 변형하기	40 %
③ 주어진 등식이 성립함을 보이기	20 %

14

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

$$\neg. \sin \theta \tan \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (\text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \neg. 1 + \tan^2 \theta &= 1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= 1 + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

▶참고 $\neg$. [반례] $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이면

$$\sin \frac{\pi}{3} \times \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

15

해결전략 | $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하여

$\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

STEP2 $8\sin\theta\cos\theta$ 의 값 구하기

$$\therefore 8\sin\theta\cos\theta = 8 \times \frac{3}{8} = 3$$

16

해결전략 | $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하여

$\sin\theta\cos\theta$ 의 값을 구한 후 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

STEP1 $\sin\theta\cos\theta$ 의 값 구하기

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}, \quad 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots ①$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos\theta} \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\cos\theta\sin^2\theta} \right) \\ &= \frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\}}{\left(-\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{9}}{\frac{1}{9}} \\ &= 4\sqrt{3} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

채점 요소	배점
① $\sin\theta\cos\theta$ 의 값 구하기	30 %
② 주어진 식 간단히 하기	40 %
③ 식의 값 구하기	30 %

17

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.

STEP1 $\sin\theta\cos\theta$ 의 값 구하기

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta + \cos\theta = -a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta\cos\theta = b = -\frac{3}{8}$$

STEP3 $8(b-a)$ 의 값 구하기

$$\therefore 8(b-a) = 8 \left\{ -\frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = 1$$

18

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\sin\theta + \cos\theta, \sin\theta\cos\theta$ 의 값을 구한 후 a, b 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을

$x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 임을 이용하여 이차방정식을 구한다.

STEP1 $\sin\theta\cos\theta$ 의 값 구하기

이차방정식 $4x^2 + 2\sqrt{2}x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\cos\theta}$ 이

므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = -2\sqrt{2}$$

$$b = \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -4$$

STEP3 ab 의 값 구하기

$$\therefore ab = -2\sqrt{2} \times (-4) = 8\sqrt{2}$$

- 01 ③ 02 ② 03 80 04 $-\frac{1}{2}$
 05 제2사분면 또는 제4사분면 06 ①
 07 -2 08 $\frac{8}{9}$

01

해결전략 | $\angle POQ$ 의 크기를 이용하여 부채꼴 OPQ 의 넓이를 구한다.

STEP1 $\angle POQ$ 의 크기 구하기

오른쪽 그림에서 동경 OP 가 나타내는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\angle AOP = \frac{\pi}{3}$$

또, 동경 OQ 가 나타내는 각의 크기가 $-\frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$-\frac{9}{4}\pi + 2\pi \times 2 = \frac{7}{4}\pi$$

와 같다.

$$\text{따라서 } \angle AOQ = 2\pi - \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\angle POQ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi$$

STEP2 부채꼴 OPQ 의 넓이 구하기

따라서 부채꼴 OPQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{6})^2 \times \frac{7}{12}\pi = 7\pi$$

02

해결전략 | 삼각형 OAB 가 이등변삼각형임을 이용하여 선분 AB 의 길이를 구한다.

STEP1 원의 반지름의 길이와 θ 의 크기 구하기

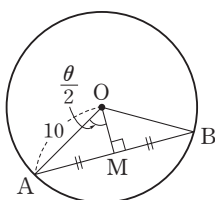
주어진 원의 넓이가 100π 이므로 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\pi r^2 = 100\pi \quad \therefore r = 10 \quad (\because r > 0)$$

또, 호 AB 의 길이는 반지름의 길이의 2배이므로

$$10\theta = 20 \quad \therefore \theta = 2$$

STEP2 선분 AB 의 길이 구하기



삼각형 OAB 에서 선분 AB 의 중점을 M 이라고 하면

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\therefore \angle AOM = \frac{\theta}{2} = 1$$

$$\sin(\angle AOM) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AM}}{10} \quad \therefore \overline{AM} = 10 \sin 1$$

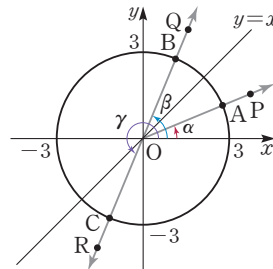
$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \times 10 \sin 1 = 20 \sin 1$$

03

해결전략 | 세 동경 OP , OQ , OR 를 좌표평면 위에 나타내어 세 점 A , B , C 의 좌표를 구한다.

STEP1 세 동경 OP , OQ , OR 를 좌표평면 위에 나타내기

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP , OQ , OR 와 만나는 점을 각각 A , B , C 라고 하자. 세 점과 세 동경을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



STEP2 세 점 A , B , C 의 좌표 구하기

점 P 가 제1사분면 위에 있고, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 이므로 점 A 의

좌표는 $\rightarrow A(x, y)$ 에 대하여

$$A(2\sqrt{2}, 1) \quad x^2 + y^2 = r^2 = 3^2 \text{이고 } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

제1사분면 위의 점 A 의 좌표는 $(2\sqrt{2}, 1)$

점 Q 가 점 P 와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 동경 OQ 와 동경 OP 도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 점 B 의 좌표는

$$B(1, 2\sqrt{2})$$

점 R 가 점 Q 와 원점에 대하여 대칭이므로 동경 OR 와 동경 OQ 도 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 점 C 의 좌표는

$$C(-1, -2\sqrt{2})$$

STEP3 $9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma)$ 의 값 구하기

삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \gamma = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma) &= 9 \times \left\{ \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + (2\sqrt{2})^2 \right\} \\
 &= 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8 \right) \\
 &= 80
 \end{aligned}$$

🔗 풀법의 비법

점의 대칭이동

점 (x, y) 를 대칭이동한 점의 좌표는

- ① x 축에 대한 대칭이동: $(x, -y)$
- ② y 축에 대한 대칭이동: $(-x, y)$
- ③ 원점에 대한 대칭이동: $(-x, -y)$
- ④ 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동: (y, x)
- ⑤ 직선 $y=-x$ 에 대한 대칭이동: $(-y, -x)$

04

해결전략 | 두 점 A, B의 좌표를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

STEP1 점 P의 좌표 구하기

A $(-6, 0)$, B $(0, 3)$ 이고, 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 P이므로

$$\begin{aligned}
 P &\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times (-6)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1} \right) \\
 \therefore P &(-2, 2)
 \end{aligned}$$

STEP2 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\overline{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \therefore \sin \theta \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

🔗 풀법의 비법

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) 에 대하여

- ① 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

- ② 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- ③ 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right) \text{ (단, } m \neq n \text{)}$$

05

해결전략 | 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 부호를 파악한다.

STEP1 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

STEP2 각 θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면 구하기

(i) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 일 때, 각 θ 는 제2사분면에 존재한다.

(ii) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 일 때, 각 θ 는 제4사분면에 존재한다.

(i), (ii)에 의하여 각 θ 가 존재하는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

▶참고 두 수 A, B에 대하여

$AB > 0$ 이면 $A > 0, B > 0$ 또는 $A < 0, B < 0$

$AB < 0$ 이면 $A > 0, B < 0$ 또는 $A < 0, B > 0$

06

해결전략 | 주어진 식의 양변을 각각 제곱한 다음 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

STEP1 주어진 식의 양변을 제곱하여 더하기

$$\sin \theta + a \cos \theta = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2a \sin \theta \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta = \frac{6}{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a \sin \theta - \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 \sin^2 \theta - 2a \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①+②을 하면

$$(a^2 + 1)\sin^2 \theta + (a^2 + 1)\cos^2 \theta = 2$$

$$(a^2 + 1)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$$

STEP2 양수 a의 값 구하기

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + 1 = 2, \quad a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

07

해결전략 | 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 a 를 θ 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 a 를 θ 에 대한 식으로 나타내기

$\tan \theta = \sqrt{\frac{1-a}{a}}$ 의 양변을 제곱하면

$$\tan^2 \theta = \frac{1-a}{a}$$

이므로

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{a}, \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore a = \cos^2 \theta$$

STEP 2 주어진 식 간단히 하기

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{a - \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{a + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \cos \theta) + \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - \cos \theta)}{\cos^4 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 1)} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - 1} \\ &= \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

● → 다른 풀이

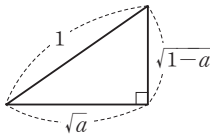
STEP 1 $\sin \theta, \cos \theta$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1-a}{a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}} \text{ 이므로}$$

오른쪽 그림에서

$$\sin \theta = \sqrt{1-a}$$

$$\cos \theta = \sqrt{a}$$



STEP 2 주어진 식 간단히 하기

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{\sin^2 \theta}{a - \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{a + \cos \theta} \\ &= \frac{(\sqrt{1-a})^2}{a - \sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{a + \sqrt{a}} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \\ = (\sqrt{1-a})^2 \end{array} \right. \\ &= \frac{1-a}{a - \sqrt{a}} + \frac{1-a}{a + \sqrt{a}} \quad (\because 0 < a < 1) \\ &= \frac{2a(1-a)}{a^2 - a} = -2 \end{aligned}$$

08

해결전략 | $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3$ 에서 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구

한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

STEP 1 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\text{즉, } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

STEP 2 a, b 의 값 구하기

한편, 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이

$2 \sin^2 \theta, 2 \cos^2 \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = 2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= 2$$

$$b = 2 \sin^2 \theta \times 2 \cos^2 \theta$$

$$= 4 \times (\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

08 삼각함수의 그래프

개념확인

212~215쪽

01 답 2

02 답 5

$$f(13)=f(9)=f(5)=f(1)=f(-3)=5$$

03 답 (1) 우 (2) 기 (3) 우 (4) 기

$$(3) f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$$

즉, $f(-x)=f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$$(4) f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$$

즉, $f(-x)=-f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수이다.

04 답 (1) ○ (2) ○ (3) ×

05 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

(2) 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: π

(3) 최댓값과 최솟값은 없다., 주기: π

06 답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6) -1

$$(1) \sin \frac{9}{4}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \cos \frac{13}{3}\pi = \cos \left(2 \times 2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \tan \frac{7}{6}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(4) \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(5) \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(6) \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

07 답 (1) 0.1908 (2) 0.9781 (3) 0.1763

$$(1) \sin 169^\circ = \sin (180^\circ - 11^\circ) = \sin 11^\circ = 0.1908$$

$$(2) \cos 372^\circ = \cos (360^\circ + 12^\circ) = \cos 12^\circ = 0.9781$$

$$(3) \tan 190^\circ = \tan (180^\circ + 10^\circ) = \tan 10^\circ = 0.1763$$

필수유형 01

217쪽

01-1 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 4π

(2) 풀이 참조, 최댓값: 2, 최솟값: -2,

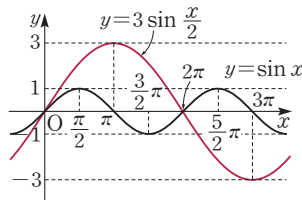
주기: $\frac{2}{3}\pi$

(3) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.,

주기: 2π

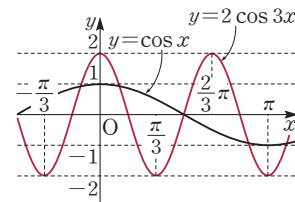
해결전략 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 의 그래프를 이용하여 주어진 함수의 그래프를 그린다.

(1) $y=3\sin \frac{x}{2}$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배, y 축의 방향으로 3배한 것이므로 다음 그림과 같다.



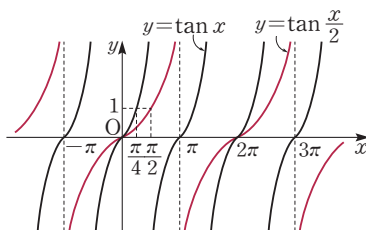
따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -3, 주기는 4π 이다.

(2) $y=2\cos 3x$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배, y 축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

(3) $y=\tan \frac{x}{2}$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 2π 이다.

01-2 답 L, C

해결전략 $y=a\sin bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$ 이다.

STEP1 $f(x+2)=f(x)$ 의 의미 알기

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키는 함수는 주기가 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...인 함수들이다.

STEP2 각 함수들의 주기 구하기

ㄱ. 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다고 할 수 없다.

ㄴ. 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다.

ㄷ. 주기가 $\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

01-3 ㉡ 9

해결전략 | 함수 $y=a\cos bx$ 의 최댓값과 주기를 a, b 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a 의 값 구하기

함수 $y=a\cos bx$ 의 최댓값이 a ($a>0$)이므로 $a=5$

STEP2 b 의 값 구하기

함수 $y=a\cos bx$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$ ($b>0$)이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$$

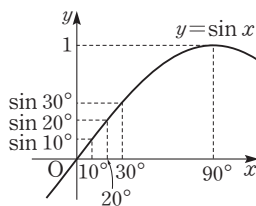
STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b=5+4=9$$

01-4 ㉡ $\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ$

해결전략 | 함수 $y=\sin x$ 의 그래프를 그려 대소를 비교한다.

$10^\circ < 20^\circ < 30^\circ < 90^\circ$ 이므로 다음 그림에서 $\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ$



01-5 ㉡ ③

해결전략 | 삼각함수의 그래프에서 함수의 증가와 감소를 파악하여 대소를 비교한다.

STEP1 A, C 의 대소 비교하기

$0^\circ < x < 90^\circ$ 일 때 $y=\sin x$ 는 증가하는 함수이므로

$$\sin 70^\circ < \sin 90^\circ = 1$$

이때 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로

$$\sin 70^\circ < \tan 45^\circ$$

$$\therefore A < C$$

..... ㉠

STEP2 B, C 의 대소 비교하기

$0^\circ < x < 90^\circ$ 일 때 $y=\cos x$ 는 감소하는 함수이므로

$$\cos 70^\circ < \cos 0^\circ = 1$$

이때 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로

$$\cos 70^\circ < \tan 45^\circ$$

$$\therefore B < C$$

..... ㉡

STEP3 A, B 의 대소 비교하기

$0^\circ < x < 90^\circ$ 에서 $\sin x$ 는 증

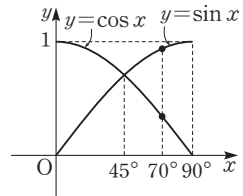
가하고, $\cos x$ 는 감소하므로

오른쪽 그림에서

$$\cos 70^\circ < \sin 70^\circ$$

$$\therefore B < A$$

..... ㉢



STEP4 A, B, C 의 대소 비교하기

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$B < A < C$$

01-6 ㉡ $\frac{5}{6}\pi$

해결전략 | 선분 AB의 길이가 일정하므로 선분 AB를 밑변으로 할 때 높이가 최대이면 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대임을 이용한다.

STEP1 두 점 A, B의 좌표 구하기

함수 $y=4\sin 3x$ 의 주

기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이고, 함수

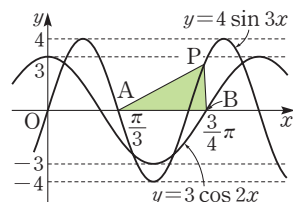
$y=3\cos 2x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{2}=\pi \text{이다.}$$

이때 $0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi$ 이므로

$$a=\frac{\pi}{3}, b=\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), B\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$$



STEP2 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값 구하기

$\overline{AB}=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{12}\pi$ 이고 함수 $y=4\sin 3x$ 의 최댓값은 4이므로

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times|\text{점 P의 } y\text{좌표}|$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}\pi\times 4=\frac{5}{6}\pi$$

▶ 점 P의 y좌표는 함수 $y=4\sin 3x$ 의 최댓값 4와 같거나 작다.

따라서 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

02-1 ㉓ 3

해결전략 | $y = \sin 2x$ 에 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$ 을 대입하면 $y = \sin(2x-4) + 1$ 과 일치함을 이용한다.

STEP1 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-n = \sin 2(x-m)$$

$$\therefore y = \sin 2(x-m) + n$$

STEP2 $m+n$ 의 값 구하기

위의 식이 $y = \sin(2x-4) + 1 = \sin 2(x-2) + 1$ 과 일치하므로

$$m=2, n=1 \quad \therefore m+n=3$$

02-2 ㉓ -2

해결전략 | $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 평행이동한 그래프의 식을 구하여 $y = \cos(ax-3)$ 과 비교한다.

STEP1 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 구하기

$y = \cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \cos(-x)$$

STEP2 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = \cos(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos\{-(x-b)\}$$

$$\therefore y = \cos(-x+b)$$

STEP3 $b-a$ 의 값 구하기

위의 식이 $y = \cos(ax-3)$ 과 일치하므로

$$a=-1, b=-3$$

$$\therefore b-a = -3 - (-1) = -2$$

02-3 ㉓ 6

해결전략 | x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-a$ 를 대입한다.

STEP1 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y = \tan 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 대칭이동한 그래프의 식 구하기

㉑의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \tan\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

STEP3 ab 의 값 구하기

위의 식이 $y = \tan\left(ax - \frac{\pi}{2}\right) + b$ 와 일치하므로

$$a=-2, b=-3 \quad \therefore ab=6$$

02-4 ㉓ ①

해결전략 | 보기의 각 함수의 그래프의 평행이동 또는 대칭이동을 조사하여 같은 함수의 식이 아닌 것을 찾는다.

① $y = 3\sin 3x - 1$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

② $y = \sin 3(x-\pi)$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 것이다.

③ $y = \sin 3(x+5\pi) + 2$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5π 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ $y = \sin 3x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{5} \quad y = \sin(-3x+2\pi) = \sin\left\{-3\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

이므로 $y = \sin(-3x+2\pi)$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 평행이동에 의하여 나머지 넷과 겹쳐지지 않은 것은 ①이다.

02-5 ㉓ 3

해결전략 | $y = a \sin x + 1$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 배한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것임을 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP1 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값 구하기

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 각 변에 양수 a 를 곱하면

$$-a \leq a \sin x \leq a$$

다시 각 변에 1을 더하면

$$-a+1 \leq a \sin x + 1 \leq a+1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$M=a+1, m=-a+1$$

STEP2 양수 a 의 값 구하기

이때 $M-m=6$ 이므로

$$M-m=a+1-(-a+1)=6 \text{에서}$$

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

02-6 ㉔ ②

해결전략 | 함수의 그래프를 평행이동한 후 대칭이동한 그래프의 식으로 나타낸 다음 여러 가지 각의 삼각함수를 이용하여 식을 변형한다.

STEP1 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y=2\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 평행이동한 후 대칭이동한 그래프의 식 구하기

①의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-2\cos x$$

$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

필수유형 03

221쪽

03-1 ㉔ ㄱ, ㄷ

해결전략 | 사인함수의 그래프의 성질을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 함수 $f(x)$ 의 주기, 최댓값, 최솟값을 이용하여 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이다. (참)

ㄴ. 최댓값은 $1-1=0$ 이고 최솟값은 $-1-1=-2$ 이다. (거짓)

STEP2 함수 $f(x)$ 의 그래프가 지나는 점의 좌표와 평행이동을 이용하여 ㄷ, ㄹ의 참, 거짓 판별하기

$$\text{ㄷ. } f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-1=\sin \pi-1=-1$$

이므로 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ 을 지난다. (참)

$$\text{ㄹ. } f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼

평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03-2 ㉔ ㄱ, ㄷ

해결전략 | 코사인함수의 그래프의 성질을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 함수 $f(x)$ 의 범위를 구하여 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 함수 $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 에서

$$-1\leq\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1 \text{이므로}$$

$$-2\leq 2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$$

$$-1\leq 2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1\leq 3$$

$$\therefore -1\leq f(x)\leq 3 \text{ (참)}$$

STEP2 함수 $f(x)$ 의 주기를 구하여 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로 임의의 실수 x 에 대하여

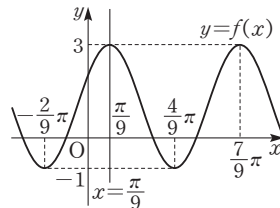
$$f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x) \text{ (거짓)}$$

STEP3 함수 $f(x)$ 의 식을 변형하여 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

$$\text{ㄷ. } f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

$$=2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{9}\right)+1$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$f(x)=2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{9}\right)+1 \text{의 그래프는}$$

$y=2\cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{9}$ 만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=2\cos 3x$ 의 그래프가 y 축, 즉 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선

$$x=\frac{\pi}{9} \text{에 대하여 대칭이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03-3 ㉔ ㄱ, ㄹ

해결전략 | 탄젠트함수의 그래프의 성질을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 함수 $f(x)$ 의 주기를 구하여 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 함수 $f(x) = -\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 2$ 의 주기는

$$\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi \text{이므로 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$f(x+2\pi) = f(x) \text{ (참)}$$

STEP2 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.

(거짓)

STEP3 $x = -\frac{3}{2}\pi$ 를 대입하여 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

$$\text{ㄷ. } f\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = -\tan\left(-\frac{3}{4}\pi + \pi\right) + 2$$

$$= -\tan\frac{\pi}{4} + 2 = -1 + 2 = 1$$

이므로 $f(x) = -\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 2$ 의 그래프는 점

$\left(-\frac{3}{2}\pi, 2\right)$ 를 지나지 않는다. (거짓)

STEP4 ㄹ의 참, 거짓 판별하기

ㄹ. $f(x) = -\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}, \frac{x}{2} = n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = 2n\pi - \pi \text{ (} n \text{는 정수) (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

03-4 답 1

해결전략 $y = \cos x$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

STEP1 $a+b$ 의 값 구하기

$y = \cos x$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+b}{2} = \pi, a+b = 2\pi$$

STEP2 $\sin \frac{a+b}{4}$ 의 값 구하기

$$\therefore \sin \frac{a+b}{4} = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

🔗 풍뎡의 비법

삼각함수의 그래프의 대칭성

(1) 함수 $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)에서 $\alpha \neq \beta$ 일 때

$$f(\alpha) = f(\beta) = k \text{ (} k \text{는 상수)} \Rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

(2) 함수 $f(x) = \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)에서 $\alpha \neq \beta$ 일 때

$$f(\alpha) = f(\beta) = k \text{ (} k \text{는 상수)} \Rightarrow \alpha + \beta = 2\pi$$

03-5 답 $-\frac{1}{3}$

해결전략 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

STEP1 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

$y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi$$

STEP2 $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ 의 값 구하기

또, 함수 $y = \sin x$ 의 주기는 2π 이므로 $\alpha + 2\pi = \gamma$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\pi + \alpha + 2\pi)$$

$$= \sin(\pi + \alpha)$$

$$= -\sin \alpha = -\frac{1}{3}$$

→ $\alpha + \beta = \pi, \gamma = \alpha + 2\pi$
를 대입

03-6 답 6π

해결전략 x_1 과 x_2 는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이고, x_3 과

x_4 는 직선 $x = \frac{5}{2}\pi$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

STEP1 $x_1 + x_2, x_3 + x_4$ 의 값 구하기

$y = 2\sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \pi$$

$y = 2\sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{5}{2}\pi$ 에 대하여 대칭

이므로

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore x_3 + x_4 = 5\pi$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \pi + 5\pi = 6\pi$$

발전유형 04

223쪽

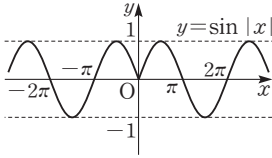
04-1 답 (1) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: -1

(2) 풀이 참조, 최댓값: 1, 최솟값: 0

(3) 풀이 참조, 최댓값: 없다., 최솟값: 0

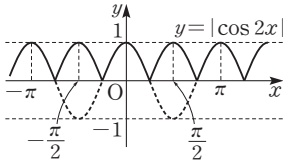
해결전략 $y = \sin x$ 의 그래프를 그려 최댓값과 최솟값을 구한다.

- (1) $y = \sin |x|$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



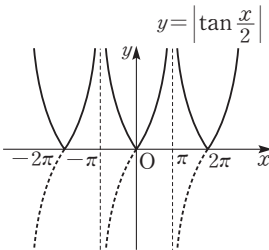
따라서 함수 $y = \sin |x|$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

- (2) $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

- (3) $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 그래프는 $y = \tan \frac{x}{2}$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다.

▶참고 (1) 함수 $y = \sin |x|$ 의 주기는 없다.

(2) 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

(3) 함수 $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 주기는 2π 이다.

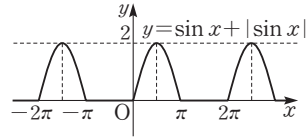
04-2 ㉡ (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π

(2) 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π

해결전략 | 함수의 그래프를 그려 최댓값, 최솟값, 주기를 구한다. 이때 $|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$ 임을 이용한다.

$$(1) y = \sin x + |\sin x| = \begin{cases} 2\sin x & (\sin x \geq 0) \\ 0 & (\sin x < 0) \end{cases}$$

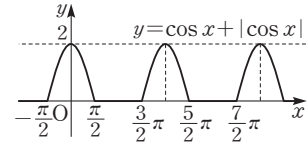
이고, 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 2π 이다.

$$(2) y = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x & (\cos x \geq 0) \\ 0 & (\cos x < 0) \end{cases}$$

이고, 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 2π 이다.

04-3 ㉡ π

해결전략 | 절댓값의 성질을 이용하여 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 주기를 파악한다.

STEP 1 $y = 2|\cos(x+\pi)| - 1$ 의 최댓값, 최솟값 구하기

$$0 \leq |\cos(x+\pi)| \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq 2|\cos(x+\pi)| \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq 2|\cos(x+\pi)| - 1 \leq 1$$

즉, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로

$$M = 1, m = -1$$

STEP 2 $y = 2|\cos(x+\pi)| - 1$ 의 주기 구하기

또, 함수 $y = 2|\cos(x+\pi)| - 1$ 의 주기는 함수

$$y = |\cos x| \text{의 주기와 같으므로}$$

$$p = \pi$$

STEP 3 $M + m + p$ 의 값 구하기

$$\therefore M + m + p = 1 - 1 + \pi = \pi$$

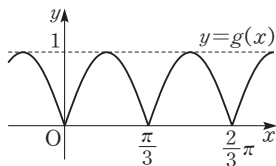
▶참고 $y = 2|\cos(x+\pi)| - 1$ 의 그래프는 $y = |\cos x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 후, x 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 주기는 변하지 않는다.

04-4 ㉡ 6

해결전략 | 함수 $y = f(x)$ 의 주기를 a 에 대한 식으로 나타내고, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 그려 $y = g(x)$ 의 주기를 구하여 비교한다.

STEP1 함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프의 개형 그리기

$g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프는 $y = \sin 3x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



STEP2 a 의 값 구하기

즉, 함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이고,

함수 $f(x) = \cos(ax) + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이다.

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3}, |a| = 6$$

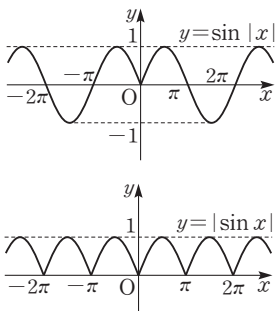
이때 a 는 양수이므로 $a = 6$

04-5 답 ㄴ, ㄷ

해결전략 | 함수의 그래프를 그려 일치하는 것을 찾는다.

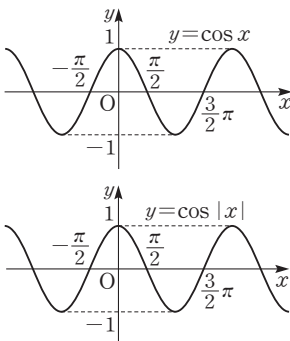
STEP1 ㄱ의 두 함수의 그래프 그려서 확인하기

ㄱ. $y = \sin |x|$, $y = |\sin x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같으므로 두 함수의 그래프는 일치하지 않는다.



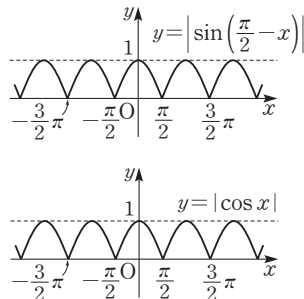
STEP2 ㄴ의 두 함수의 그래프 그려서 확인하기

ㄴ. $y = \cos x$, $y = \cos |x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다.



STEP3 ㄷ의 두 함수의 그래프 그려서 확인하기

ㄷ. $y = \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right|$, $y = |\cos x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다.



따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

▶참고 ㄷ. $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$ 이므로

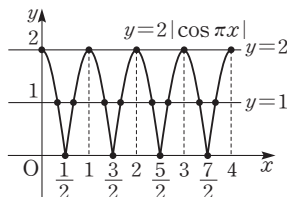
$$y = \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| = |\cos x|이다.$$

04-6 답 17

해결전략 | $y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프를 그려 최댓값과 최솟값을 파악한다.

STEP1 $y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프 그리기

$y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프는 $y = 2\cos \pi x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것으로 다음 그림과 같다.



STEP2 y 좌표가 정수인 점의 개수 구하기

이때 y 좌표가 정수이므로 y 좌표가 될 수 있는 값은

0, 1, 2

$y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의 교점의 개수는 4이다.

$y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수는 8이다.

$y = 2|\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y = 2$ 의 교점의 개수는 5이다.

따라서 y 좌표가 정수인 점의 개수는

$$4 + 8 + 5 = 17$$

05-1 ㉡ $-\frac{7}{2}-\frac{\pi}{4}$

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 상수 a, b, c, d 의 값을 구한다.

STEP1 조건 ㉡를 이용하여 b 의 값 구하기

조건 ㉡에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

STEP2 조건 ㉡, ㉢를 이용하여 a, c, d 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= a \sin\left(\frac{1}{2}x + c\right) + d \\ &= a \sin\frac{1}{2}(x + 2c) + d \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

㉠에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=a \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-2c$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 것이므로 조건 ㉡에서 $d = -1$

$$\text{또, } -2c = \frac{\pi}{2} \text{에서 } c = -\frac{\pi}{4}$$

조건 ㉢에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 이고 $a < 0$ 이므로 $a - 1 = -4 \quad \therefore a = -3$

STEP3 $a+b+c+d$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore a+b+c+d &= -3 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + (-1) \\ &= -\frac{7}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 6

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구한다.

STEP1 함수 $y=f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, c 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a+c=4, -a+c=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, c=1$$

STEP2 함수 $y=f(x)$ 의 주기를 이용하여 b 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 의 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore abc = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

05-3 ㉡ 53

해결전략 | 주기를 이용하여 b 의 값을 구하고, 함숫값을 이용하여 a 의 값을 구한다.

STEP1 b 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 7 \text{이므로}$$

$$a \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 7$$

$$a \tan \frac{\pi}{4} = 7 \quad \therefore a = 7$$

STEP3 a^2+b^2 의 값 구하기

$$\therefore a^2+b^2 = 7^2 + 2^2 = 53$$

05-4 ㉡ 2

해결전략 | 절댓값 기호를 포함한 함수의 성질을 이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구한다.

STEP1 조건 ㉡를 이용하여 b 의 값 구하기

조건 ㉡에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore f(x) = a |\cos 3x| + c$$

STEP2 조건 ㉡, ㉢를 이용하여 a, c 의 값 구하기

$$0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \text{이므로 } c \leq a |\cos 3x| + c \leq a + c$$

조건 ㉡에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 3이므로

$$a+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 ㉢에서 $f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{5}{2}$ 이므로

$$a \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| + c = \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{2}a + c = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a+2c=5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a=1, c=2$

STEP3 $a+b-c$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b-c = 1+3-2=2$$

05-5 ㉡ $-\frac{\pi}{8}$

해결전략 | 함수 $y=\tan x$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)임을 이용하여 상수 b 의 값을 구한다.

STEP1 a 의 값 구하기

주어진 함수의 주기가 4π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 4\pi \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

STEP2 b 의 값 구하기

$y=3\tan\left(\frac{x}{4}-b\right)+2=3\tan\frac{1}{4}(x-4b)+2$ 의 그래프
는 $y=3\tan\frac{x}{4}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $4b$ 만큼, y 축
의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=3\tan\frac{x}{4}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=4k\pi+2\pi \quad (k \text{는 정수})$$

이므로 주어진 함수의 점근선의 방정식은

$$x=4k\pi+2\pi+4b$$

위의 식이 $x=4n\pi$ 와 일치해야 하므로

$$4b=-2\pi \quad (\because -\pi < b < 0) \quad \therefore b=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8}$$

k 가 정수이므로 위의 식을
 $x=4n\pi+2\pi+4b$ 로 생
각할 수 있다.

05-6 ㉡ 2

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구하고 $f(\pi)$ 의 값을 구한다.

STEP1 a, b, c 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로

$$a+c=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=3$$

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{7}{2} \text{이므로 } a\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+c=\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}a+c=\frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, c=2$

STEP2 $f(\pi)$ 의 값 구하기

따라서 $f(x)=3|\sin 3x|+2$ 이므로

$$f(\pi)=3|\sin 3\pi|+2=2$$

필수유형 06

227쪽

06-1 ㉡ 4+ $\frac{\pi}{2}$

해결전략 | 주어진 그래프에서 최댓값, 최솟값, 주기, 지나는 한 점을 이용하여 상수 a, b, c, d 의 값을 구한다.

STEP1 최댓값, 최솟값을 이용하여 a, d 의 값 구하기

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$a+d=3, -a+d=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=1$

STEP2 주기를 이용하여 b 의 값 구하기

또, 주기가 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$$

STEP3 지나는 한 점을 찾아 c 의 값 구하기

주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x+c)+1$ 이고, 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3=2\sin(0+c)+1, \sin c=1$$

$$0 < c < \pi \text{이므로 } c=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab+cd=2\times 2+\frac{\pi}{2}\times 1=4+\frac{\pi}{2}$$

06-2 ㉡ $\frac{2}{3}\pi$

해결전략 | 주어진 그래프에서 주기, 평행이동을 이용하여 상수 a, b 의 값을 구한다.

STEP1 주기를 이용하여 a 의 값 구하기

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{a}=\pi \quad \therefore a=2$$

STEP2 평행이동을 이용하여 b 의 값 구하기

$y=\cos 2(x+b)+1$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로

$$-b=-\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=\frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < b < \pi)$$

$$\therefore ab=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

◆ 다른 풀이

STEP2 지나는 한 점을 찾아 b 의 값 구하기

$y=\cos 2(x+b)+1$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 2\right)$ 를 지나므로

$$2=\cos 2\left(\frac{2}{3}\pi+b\right)+1, \cos\left(\frac{4}{3}\pi+2b\right)=1$$

$$0 < b < \pi \text{이고 } \cos 2\pi=1 \text{이므로}$$

$$\frac{4}{3}\pi+2b=2\pi \quad \therefore b=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore ab=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

06-3 ㉡ 6

해결전략 | 주어진 그래프에서 주기, 지나는 한 점을 이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구한다.

STEP1 주기를 이용하여 b 의 값 구하기

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이

$$\text{므로 } \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

STEP2 주어진 그래프가 원점을 지나는 것을 이용하여 c 의 값 구하기

$y = a \tan 2x + c$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$c = 0$$

STEP3 지나는 한 점을 찾아 a 의 값 구하기

$y = a \tan 2x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8}, 4\right)$ 를 지나므로

$$4 = a \tan \frac{\pi}{4} \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b + c = 4 + 2 + 0 = 6$$

06-4 **답** $3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

해결전략 | 주어진 그래프에서 최댓값, 최솟값, 주기, 지나는 한 점을 이용하여 상수 a, b, c, d 의 값을 구한다.

STEP1 최댓값, 최솟값을 이용하여 a, d 의 값 구하기

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 2이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 4, -a + d = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, d = 3$

STEP2 주기를 이용하여 b 의 값 구하기

주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + c\right) + 3$$

STEP3 지나는 한 점을 찾아 c 의 값 구하기

$y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \sin c + 3, \sin c = 1$$

$$\therefore c = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < c < \pi)$$

STEP4 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값 구하기

따라서 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \\ &= \sin \frac{\pi}{4} + 3 = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

06-5 **답** ③

해결전략 | 주어진 그래프에서 주기와 평행이동을 조사하여 그래프의 식을 구한다.

STEP1 $f(x)$ 의 식 세우기

주어진 그래프는 탄젠트함수의 그래프이므로

$$f(x) = a \tan(bx + c) + d \quad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

STEP2 주기를 이용하여 b 의 값 구하기

주기가 $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 2$$

STEP3 $y = f(x)$ 꼴 구하기

$f(x) = a \tan(2x + c) + d$ 로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프

는 $y = a \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$f(x) = a \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 보기에서 주어진 함수의 그래프의 식이 될 수 있는 것은 ③이다.

필수유형 07

229쪽

07-1 **답** (1) $\sqrt{2}$ (2) -1

해결전략 | 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 예각으로 변형한다.

$$(1) \sin \frac{3}{4}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{15}{4}\pi = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{15}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$(2) \cos 140^\circ = \cos(90^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$$

$$\tan 100^\circ = \tan(90^\circ + 10^\circ) = -\frac{1}{\tan 10^\circ}$$

$$\therefore \sin 50^\circ + \cos 140^\circ + \tan 10^\circ \times \tan 100^\circ$$

$$= \sin 50^\circ - \sin 50^\circ + \tan 10^\circ \times \left(-\frac{1}{\tan 10^\circ}\right)$$

$$= -1$$

07-2 **답** (1) 0 (2) 2 (3) 4

해결전략 | 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 θ 에 대한 삼각함수로 변형한다.

$$(1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos (\pi - \theta) \\ - \sin \left(\frac{3}{2} \pi + \theta \right) \\ = \cos \theta - \cos \theta - \cos \theta - (-\cos \theta) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \sin (\pi + \theta) = -\sin \theta, \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta,$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta, \sin (\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 (\pi + \theta) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ + \sin^2 (\pi - \theta) \\ = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(3) \cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta \text{이므로}$$

$$\cos 80^\circ = \cos (90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ,$$

$$\cos 70^\circ = \cos (90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ,$$

$$\cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ,$$

$$\cos 50^\circ = \cos (90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cdots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ \\ = (\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) \\ + (\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ) \\ + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ) + \cos^2 90^\circ \\ = (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) \\ + (\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) \\ + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) + \cos^2 90^\circ \\ = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4 \end{aligned}$$

07-3 ㉡ $\cos \theta$

해결전략 | 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right) \tan \theta}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta} - \sin (\pi + \theta) \tan (\pi - \theta) \\ = \frac{-\cos \theta \tan \theta}{-\sin \theta \cos \theta} - (-\sin \theta)(-\tan \theta) \\ = \frac{\tan \theta}{\sin \theta} - \sin \theta \tan \theta \\ = \tan \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \right) \\ = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \left(\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right) \\ = \cos \theta \end{aligned}$$

07-4 ㉡ 5

해결전략 | 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여

$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \tan (\pi - \theta)$ 를 간단히 한다.

STEP1 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \tan (\pi - \theta) &= \cos \theta \times (-\tan \theta) \\ &= \cos \theta \times \left(-\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$

이때 $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \tan (\pi - \theta) = \frac{3}{4}$ 이므로

$$-\sin \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{4}$$

STEP2 $20(1 + \sin \theta)$ 의 값 구하기

$$\therefore 20(1 + \sin \theta) = 20 \left(1 - \frac{3}{4} \right) = 5$$

07-5 ㉡ $-\frac{1}{3}$

해결전략 | 직선의 기울기가 $\tan \theta$ 임을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

STEP1 직선의 기울기가 $\tan \theta$ 임을 이용하여 θ 의 값 구하기

$$\text{직선 } x - 3y + 3 = 0 \text{에서 } y = \frac{1}{3}x + 1$$

직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{1}{3}$$

STEP2 $\cos (\pi + \theta) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \tan (-\theta)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \cos (\pi + \theta) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \tan (-\theta) \\ = -\cos \theta + \cos \theta - \tan \theta \\ = -\tan \theta \\ = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

㉡ 풀법의 비법

직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이면
(직선의 기울기) $= \tan \theta$

07-6 ㉡ 1

해결전략 | 직선의 기울기가 $\tan \theta$ 임을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

STEP1 직선의 기울기가 $\tan \theta$ 임을 이용하여 $\tan \theta$ 의 값 구하기

직선 $y=ax+1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\tan \theta = a$$

STEP2 $\frac{1-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)} + \frac{1+\sin(\frac{3}{2}\pi-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ 간단히 하기

$$\begin{aligned} & \frac{1-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)} + \frac{1+\sin(\frac{3}{2}\pi-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} \\ &= \frac{1-(-\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{1-\cos \theta}{-\sin \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\tan \theta} \end{aligned}$$

STEP3 a 의 값 구하기

$$\text{즉, } \frac{2}{\tan \theta} = 2 \text{이므로}$$

$$\tan \theta = 1$$

$$\therefore a = \tan \theta = 1$$

발전유형 08

231 쪽

08-1 $\frac{\sqrt{13}}{7}$

해결전략 | 선분 AB가 원의 지름임을 이용하여 선분 AB의 길이와 α, β 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 α, β 사이의 관계식 구하기

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ$$

STEP2 선분 AB의 길이 구하기

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{13})^2} = 7$$

STEP3 $\sin(\alpha+2\beta)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha+2\beta) &= \sin\{(\alpha+\beta)+\beta\} \\ &= \sin(90^\circ+\beta) \\ &= \cos \beta \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{13}}{7} \end{aligned}$$

08-2 $\frac{3}{4}$

해결전략 | 선분 AB가 원의 지름임을 이용하여 선분 BC의 길이와 α, β 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 α, β 사이의 관계식 구하기

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\angle ACB = 90^\circ$

$$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ$$

STEP2 선분 BC의 길이 구하기

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

STEP3 $\tan(2\alpha+\beta+90^\circ)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \tan(2\alpha+\beta+90^\circ) &= \tan\{\alpha+(\alpha+\beta)+90^\circ\} \\ &= \tan(\alpha+180^\circ) \\ &= \tan \alpha \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

08-3 $\frac{5}{4}$

해결전략 | 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 임을 이용한다.

STEP1 $\sin \alpha$ 의 값 구하기

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} > 0 \text{에서 } \alpha \text{는 예각이므로}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

STEP2 $\sin \beta, \cos \beta$ 의 값 구하기

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\therefore \sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{2}{3}$$

STEP3 $\tan^2 \beta$ 의 값 구하기

$$\therefore \tan^2 \beta = \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

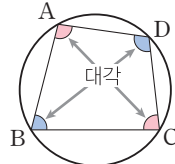
☞ 풀법의 비법

원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

$$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$



08-4 $\frac{\pi}{3}$

해결전략 | 점 A의 x 좌표를 구하여 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구한다.

STEP1 점 A의 x 좌표 구하기

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \sin x$ 의 그래프는 직선

$x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

점 A의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{6}$$

STEP2 직사각형의 세로의 길이 구하기

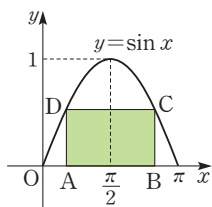
이때 변 AD의 길이는 점 D의 y 좌표와 같으므로

$$\overline{AD} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

STEP3 직사각형의 넓이 구하기

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$



08-5 $\frac{12}{13}$

해결전략 | 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 임을 이용한다.

STEP1 $\sin C$ 의 값 구하기

사각형 ABCD에 대각선 BD를 그으면 $\overline{BC}$ 가 지름이므로 삼각형 BCD는 직각삼각형이다.

직각삼각형 BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\therefore \sin C = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{12}{13}$$

STEP2 $\sin A$ 의 값 구하기

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$A + C = 180^\circ$$

$$\therefore \sin A = \sin (180^\circ - C) = \sin C = \frac{12}{13}$$

08-6 10

해결전략 | 적당히 짝을 지어 같은 각의 삼각함수가 되도록 변형한다.

STEP1 θ 의 값을 구하여 π 를 θ 로 나타내기

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{20}$ 은 원을 20등분한 점이고

$\angle P_1OP_2 = \theta$ 이므로

$$\theta = \frac{2\pi}{20} \quad \therefore \pi = 10\theta$$

STEP2 식의 값 구하기

$$5\theta = \frac{\pi}{2}, 10\theta = \pi, 15\theta = \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 20\theta$$

$$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta$$

$$+ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 3\theta \right)$$

$$+ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 4\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 5\theta \right)$$

$$+ \sin^2 (\pi + \theta) + \sin^2 (\pi + 2\theta) + \sin^2 (\pi + 3\theta)$$

$$+ \sin^2 (\pi + 4\theta) + \sin^2 (\pi + 5\theta)$$

$$+ \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi + \theta \right) + \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi + 2\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi + 3\theta \right)$$

$$+ \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi + 4\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi + 5\theta \right)$$

$$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta$$

$$+ \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$$

$$+ \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta$$

$$+ \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$$

$$= 2\{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$+ (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta)$$

$$+ (\sin^2 5\theta + \cos^2 5\theta)\}$$

$$= 2 \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

$$= 10$$

필수유형 09

233쪽

09-1  최댓값: 6, 최솟값: -2

해결전략 | 식을 변형한 후 $\sin x$ 의 범위를 이용하여 y 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin \left(x + \pi \right) = -\sin x, \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \text{이므로}$$

$$y = \sin \left(x + \pi \right) + 3\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 2$$

$$= -\sin x - 3\sin x + 2$$

$$= -4\sin x + 2$$

STEP2 $\sin x$ 의 범위를 이용하여 y 의 값의 범위 구하기

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq -4\sin x \leq 4$$

$$-2 \leq -4\sin x + 2 \leq 6$$

$$\therefore -2 \leq y \leq 6$$

STEP3 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

따라서 주어진 함수의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

09-2 ㉡ 최댓값: 5, 최솟값: 0

해결전략 | $\sin x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP1 $\sin x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 식으로 나타내기

$y = 5 - |3\sin x + 2|$ 에서 $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면 $y = 5 - |3t + 2|$

(i) $-1 \leq t < -\frac{2}{3}$ 일 때,

$$y = 5 - \{-(3t + 2)\} = 3t + 7$$

(ii) $-\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ 일 때,

$$y = 5 - (3t + 2) = -3t + 3$$

STEP2 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

따라서 $y = 5 - |3t + 2|$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같으

므로 $t = -\frac{2}{3}$ 일 때 최댓값

은 5, $t = 1$ 일 때 최솟값은 0

이다.

● 다른 풀이

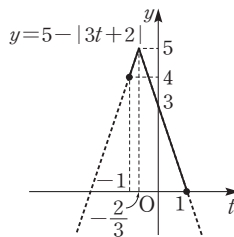
$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 3\sin x \leq 3$

$-1 \leq 3\sin x + 2 \leq 5$, $0 \leq |3\sin x + 2| \leq 5$

$-5 \leq -|3\sin x + 2| \leq 0$, $0 \leq 5 - |3\sin x + 2| \leq 5$

$\therefore 0 \leq y \leq 5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 0이다.



09-3 ㉡ 3

해결전략 | $f(x)$ 의 최댓값이 5임을 이용하여 상수 a 의 값을 구한 후 $f(x)$ 의 최솟값을 구한다.

STEP1 식 변형하기

$\cos(-x) = \cos x$ 이므로

$$f(x) = -|\cos(-x) + 2| + a = -|\cos x + 2| + a$$

STEP2 $\cos x$ 의 범위를 이용하여 $f(x)$ 의 값의 범위 구하기

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$1 \leq \cos x + 2 \leq 3, 1 \leq |\cos x + 2| \leq 3$$

$$-3 \leq -|\cos x + 2| \leq -1$$

$$-3 + a \leq -|\cos x + 2| + a \leq -1 + a$$

$$\therefore -3 + a \leq f(x) \leq -1 + a$$

STEP3 a 의 값 구하기

$f(x)$ 의 최댓값이 5이므로

$$-1 + a = 5 \quad \therefore a = 6$$

STEP4 $f(x)$ 의 최솟값 구하기

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $-3 + 6 = 3$

09-4 ㉡ 1

해결전략 | 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내어 그 합이 2임을 이용한다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \text{이므로}$$

$$y = 2\cos x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k$$

$$= 2\cos x + \cos x + k$$

$$= 3\cos x + k$$

STEP2 $\cos x$ 의 범위를 이용하여 y 의 값의 범위 구하기

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq 3\cos x \leq 3$$

$$-3 + k \leq 3\cos x + k \leq 3 + k$$

$$\therefore -3 + k \leq y \leq 3 + k$$

STEP3 k 의 값 구하기

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $3 + k$, 최솟값은 $-3 + k$

이고 최댓값과 최솟값의 합이 2이므로

$$(3 + k) + (-3 + k) = 2, 2k = 2$$

$$\therefore k = 1$$

09-5 ㉡ 2

해결전략 | $\sin 2x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 a, b 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\sin 2x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 식으로 나타내기

$y = a|\sin 2x - 1| + b$ 에서 $\sin 2x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = a|t - 1| + b$$

$$t \geq 1 \text{일 때, } y = at - a + b$$

$$t < 1 \text{일 때, } y = -at + a + b$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

따라서 $y = a|t - 1| + b$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로 $t = -1$ 일 때 최댓값

$2a + b$, $t = 1$ 일 때 최솟값 b

를 갖는다.

이때 최댓값이 6, 최솟값은

-2 이므로

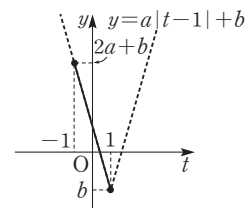
$$2a + b = 6, b = -2$$

$$b = -2 \text{를 } 2a + b = 6 \text{에 대입하면}$$

$$2a - 2 = 6, 2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

STEP3 $a + b$ 의 값 구하기

$$\therefore a + b = 4 + (-2) = 2$$



09-6 15

해결전략 $\cos x$ 의 범위를 구한 후 $\cos x=t$ 로 치환한다.

STEP1 $\cos x$ 의 범위 구하기

$$\frac{a^2+b^2}{3ab} = \frac{a}{3b} + \frac{b}{3a} \text{이고}$$

$a>0, b>0$ 에서 $\frac{a}{3b}>0, \frac{b}{3a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x>0, y>0$ 일 때, $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$$\cos x = \frac{a^2+b^2}{3ab} = \frac{a}{3b} + \frac{b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{3b} \times \frac{b}{3a}} = \frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $\frac{a}{3b} = \frac{b}{3a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.)

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\frac{2}{3} \leq \cos x \leq 1$$

STEP2 $\cos x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 식으로 나타내기

$$y = -6|\cos x - 1| + 5 \text{에서 } \cos x = t \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1 \right) \text{로 놓으면}$$

오른쪽 그림에서

$$y = -6|t-1| + 5$$

$$= 6(t-1) + 5 \left(\because \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \right)$$

$$= 6t - 1$$

STEP3 최댓값과 최솟값의 곱 구하기

$$\frac{2}{3} \leq t \leq 1 \text{에서 } y = 6t - 1 \text{의 그래프}$$

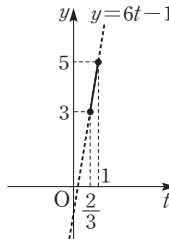
는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$ 일

때 최댓값은 5, $t=\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값

은 3이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$5 \times 3 = 15$$



STEP2 $\cos x=t$ 로 치환하여 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

이때 $\cos x=t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = 2t^2 - 2t - 1$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

이므로 오른쪽 그림에서

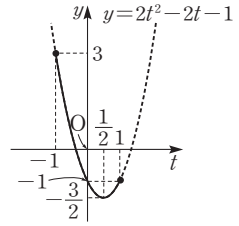
$t=-1$ 일 때 최댓값은 3,

$t=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

STEP3 $M+m$ 의 값 구하기

따라서 $M=3, m=-\frac{3}{2}$ 이므로

$$M+m = 3 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$



10-2 4

해결전략 $\sin x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 $\sin x=t$ 로 치환하여 t 의 값의 범위를 구하고 주어진

식을 t 에 대한 식으로 나타내기

$$y = \frac{3\sin x + 12}{\sin x + 2} \text{에서 } \sin x = t \text{로 놓으면}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = \frac{3t + 12}{t + 2} = \frac{3(t+2) + 6}{t+2} = \frac{6}{t+2} + 3$$

STEP2 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

오른쪽 그림에서

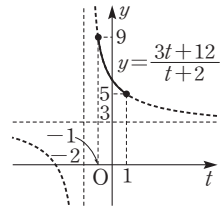
$t=-1$ 일 때 최댓값은 9,

$t=1$ 일 때 최솟값은 5이다.

STEP3 $M-m$ 의 값 구하기

따라서 $M=9, m=5$ 이므로

$$M-m = 9-5 = 4$$



필수유형 10

235쪽

10-1 2

해결전략 $\cos x$ 에 대한 함수식으로 변형한 후 $\cos x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{이므로}$$

$$y = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2\cos x$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$$

10-3 8

해결전략 $\cos x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 $\cos x=t$ 로 치환하여 t 의 값의 범위를 구하고 주어진

식을 t 에 대한 식으로 나타내기

$$y = \frac{\cos x + 4}{\cos x - 2} \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{에서 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = \frac{t+4}{t-2} = \frac{(t-2)+6}{t-2} = \frac{6}{t-2} + 1$$

STEP2 함수의 치역 구하기

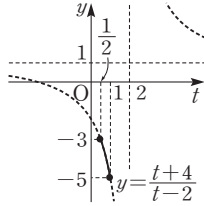
오른쪽 그림에서

$t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은 -3 ,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 -5 이므로

치역은

$$\{y \mid -5 \leq y \leq -3\}$$



STEP3 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $a = -5$, $b = -3$ 이므로

$$a+b = -5 + (-3) = -8$$

10-4 ㉮ 8

해결전략 $\cos x$ 에 대한 함수식으로 변형한 후 $\cos x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 그래프를 그려 본다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ 이므로}$$

$$y = a \sin^2 x - a \cos x + b$$

$$= a(1 - \cos^2 x) - a \cos x + b$$

$$= -a \cos^2 x - a \cos x + a + b$$

STEP2 $\cos x = t$ 로 치환하여 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

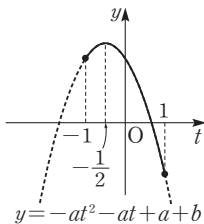
$$y = -at^2 - at + a + b$$

$$= -a\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b$$

이므로 오른쪽 그림에서

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}a + b$,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 $-a + b$ 이다.



STEP3 ab 의 값 구하기

주어진 함수의 최댓값이 7, 최솟값은 -2 이므로

$$\frac{5}{4}a + b = 7, -a + b = -2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 2$$

$$\therefore ab = 4 \times 2 = 8$$

10-5 ㉮ $\frac{5}{2}$

해결전략 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ 로 치환할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP1 주어진 함수를 사인에 대한 이차함수로 나타내기

$y = f(x)$ 라 하고 $x - \frac{3}{4}\pi = \theta$ 로 놓으면

$$x - \frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$y = \cos^2 \theta - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + k$$

$$= \cos^2 \theta + \sin \theta + k$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta + k$$

$$= -\sin^2 \theta + \sin \theta + k + 1$$

STEP2 $\sin \theta = t$ 로 치환하여 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내기

이때 $\sin \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + k + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은 $k + \frac{5}{4}$,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 $k - 1$ 이다.

STEP3 $k+m$ 의 값 구하기

따라서 $k + \frac{5}{4} = 3$, $k - 1 = m$ 이므로

$$k = \frac{7}{4}, m = \frac{3}{4}$$

$$\therefore k + m = \frac{5}{2}$$

◆ 다른 풀이

STEP1 주어진 함수를 코사인에 대한 이차함수로 나타내기

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

STEP2 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ 로 치환하여 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내기

$y = f(x)$ 라 하고 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ 이고}$$

$$y = -t^2 - t + k + 1$$

$$= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 y 는 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은

$k + \frac{5}{4}$, $t = 1$ 일 때 최솟값은 $k - 1$ 이다.

10-6 0

해결전략 $\frac{\cos x}{\sin x + 2 \cos x}$ 의 분모와 분자를 각각 $\cos x$ 로 나누어 $\tan x$ 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 식 변형하기

$$y = -\frac{\cos x}{\sin x + 2 \cos x} + k = -\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 2} + k$$

$$= -\frac{1}{\tan x + 2} + k$$

STEP 2 $\tan x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 식으로 나타내기

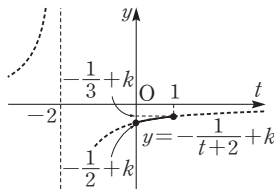
$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -\frac{1}{t+2} + k$$

STEP 3 함수의 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내기

$y = -\frac{1}{t+2} + k$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$t=1$ 일 때 최댓값은 $-\frac{1}{3} + k$, $t=0$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2} + k$ 이다.



STEP 4 k 의 값 구하기

이때 최댓값과 최솟값의 합이 $-\frac{5}{6}$ 이므로

$$\left(-\frac{1}{3} + k\right) + \left(-\frac{1}{2} + k\right) = -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{5}{6} + 2k = -\frac{5}{6} \quad \therefore k = 0$$

유형 특강

237쪽

1 ① (1) 1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$

$f(x-2) = f(x+4)$ 에서 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이므로

$$f(t) = f(t+6) \quad \dots\dots ①$$

(1) ①에 의하여 $f(7) = f(6+1) = f(1)$

조건 ㉞에 의하여

$$f(7) = f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

(2) ①에 의하여

$$f(-8) = f(-8+6) = f(-2) = f(-2+6) = f(4)$$

조건 ㉞에 의하여

$$f(-8) = f(4) = \sin 2\pi = 0$$

(3) ①에 의하여

$$f\left(-\frac{53}{3}\right) = f\left(6 + \frac{35}{3}\right) = f\left(\frac{35}{3}\right) = f\left(6 + \frac{17}{3}\right)$$

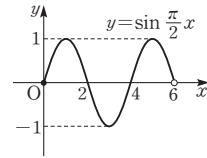
$$= f\left(\frac{17}{3}\right)$$

조건 ㉞에 의하여

$$f\left(\frac{53}{3}\right) = f\left(\frac{17}{3}\right) = \sin \frac{17}{6}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

참고 $0 \leq x < 6$ 일 때 함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



2 1

조건 ㉞에 의하여

$$f\left(\frac{13}{4}\pi\right) = f\left(\pi + \frac{9}{4}\pi\right) = f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = f\left(\pi + \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$= f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = f\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

조건 ㉞에 의하여

$$f\left(\frac{13}{4}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

실전 연습 문제

238~240쪽

01 ④	02 $\frac{1}{2}$	03 ②	04 ③	05 ②
06 9	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ②
11 14	12 $3 - \frac{\pi}{3}$	13 1	14 -1.7685	
15 ③	16 4	17 ④	18 ⑤	

01

해결전략 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이면 $f(x+p) = f(x)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

이 식은 $x=0$ 일 때도 성립하므로

$$f(p) = f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

02

해결전략 | 평행이동한 그래프의 식에 $x=\frac{5}{6}$, $y=a$ 를 대입한다.

STEP1 평행이동한 그래프의 식 구하기

$y=\sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sin \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \cdots ①$$

STEP2 a 의 값 구하기

$y=\sin \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}, a\right)$ 를 지나므로

$$\begin{aligned} a &= \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

채점 요소	배점
① 평행이동한 그래프의 식 구하기	50 %
② a 의 값 구하기	50 %

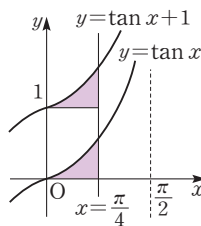
03

해결전략 | 평행이동한 그래프에서 넓이가 같은 부분을 찾아 구하는 부분의 넓이를 구한다.

STEP1 넓이가 같은 부분 찾기

곡선 $y=\tan x+1$ 은 곡선

$y=\tan x$ 를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림의 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.



STEP2 넓이 구하기

따라서 구하는 도형의 넓이는 네 점

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), (0, 1)$$

을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

04

해결전략 | 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 성질을 이용하여 옳지 않은 것을 찾는다.

$$① \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\begin{aligned} ② \text{ 최댓값은 } 3, \text{ 최솟값은 } -3 \text{ 이므로} \\ -3 \leq f(x) \leq 3 \end{aligned}$$

③ $f(0)=3\cos 0=3\times 1=3$ 이므로 그래프는 원점을 지나지 않는다.

$$④ f(0)+f(\pi)=3\cos 0+3\cos \frac{\pi}{2}=3+0=3$$

$$⑤ f(x)=3\cos \frac{x}{2}=3\cos \left(-\frac{x}{2}\right)=f(-x)$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

05

해결전략 | 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여

$\frac{x_1+x_2}{2}$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 의 값 구하기

함수 $y=\cos x$ 의 그래프는 $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$x_2=\pi+\alpha$ 라고 하면

$x_1=\pi-\alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{2} &= \frac{(\pi-\alpha)+(\pi+\alpha)}{2} \\ &= \frac{2\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

STEP2 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 의 값 구하기

$$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(\pi)=\cos \pi=-1$$

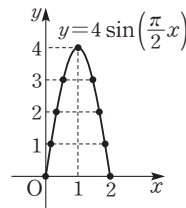
06

해결전략 | $y=4\sin \left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 의 그래프를 그려 y 좌표가 정수인 점의 y 좌표를 구한다.

STEP1 곡선 $y=4\sin \left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 를 좌표평면 위에 나타내기

함수 $y=4\sin \left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 -4, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ 이므로 $0\leq x\leq 2$ 에서 곡선 $y=4\sin \left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 는

다음 그림과 같다.



STEP2 y 좌표가 정수인 점의 개수 구하기

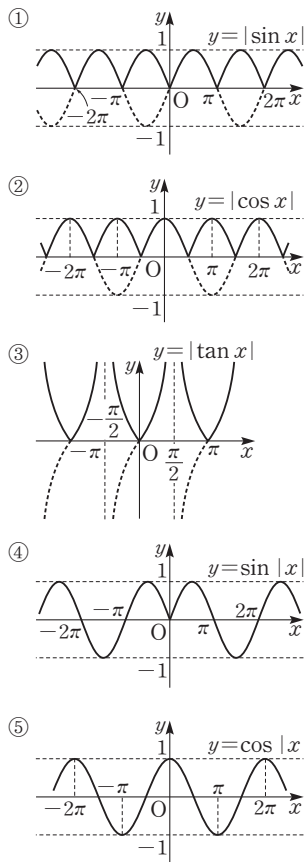
따라서 y 좌표가 정수인 점의 y 좌표가 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는

$$2\times 4+1=9$$

07

해결전략 | 보기의 함수의 그래프를 각각 그려 주기함수가 아닌 것을 찾는다.

STEP 1 함수의 그래프 그리기



STEP 2 주기함수가 아닌 것 찾기

①, ②, ③은 주기가 π 인 주기함수이고, ⑤는 주기가 2π 인 주기함수이다.

따라서 주기함수가 아닌 것은 ④이다.

08

해결전략 | 주어진 두 함수의 주기를 구하여 서로 비교한다.

STEP 1 함수 $y = |\sin ax|$ 의 주기 구하기

양수 a 에 대하여 함수 $y = \sin ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ 이고,

함수 $y = |\sin ax|$ 의 주기는 $y = \sin ax$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{a}$$

STEP 2 $y = 3 \tan 2x$ 의 주기 구하기

한편, $y = 3 \tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

STEP 3 a 의 값 구하기

두 함수 $y = |\sin ax|$, $y = 3 \tan 2x$ 의 주기가 같으므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

09

해결전략 | 함수 $f(x)$ 의 주기를 이용하여 b 의 값을 구하고, 최솟값을 이용하여 a 의 값을 구한다.

STEP 1 b 의 값 구하기

함수 $f(x) = a \cos bx + 3$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

STEP 2 $a+b$ 의 값 구하기

$-1 \leq \cos bx \leq 1$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a \leq a \cos bx \leq a$$

$$\therefore -a + 3 \leq a \cos bx + 3 \leq a + 3$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로

$$-a + 3 = -1 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b = \frac{9}{2}$$

10

해결전략 | 함수 $f(x)$ 의 주기를 이용하여 a 의 값을 구하고, 점근선의 방정식을 이용하여 b 의 값을 구한다.

STEP 1 a 의 값 구하기

함수 $y = \tan(ax + b) + 2$ 의 주기가 2π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

STEP 2 $2ab$ 의 값 구하기

$y = \tan\left(\frac{1}{2}x + b\right) + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{1}{2}x + b = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{는 정수})$$

$$\frac{1}{2}x = k\pi + \frac{\pi}{2} - b$$

$$\text{즉, } x = 2k\pi + \pi - 2b$$

위의 식이 $x = 2n\pi$ 와 일치하므로

$$\pi - 2b = 0 \quad (\because 0 < b < \pi) \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2ab = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

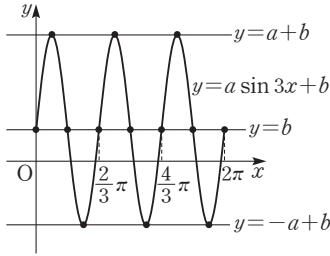
→ k 가 정수이므로 위의 식을 $x = 2n\pi + \pi - 2b$ 로 생각할 수 있다.

11

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키도록 $y = a \sin 3x + b$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

STEP1 $y=a\sin 3x+b$ 의 그래프의 개형 나타내기

함수 $y=a\sin 3x+b$ ($a>0, b>0$)의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이고, $y=a\sin 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 $0\leq x\leq 2\pi$ 에서 $y=a\sin 3x+b$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



STEP2 b 의 값 구하기

$y=a\sin 3x+b$ 의 그래프가 직선 $y=9$ 와 만날 때 교점의 개수가 3이므로

$$a+b=9 \text{ 또는 } -a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 직선 $y=2$ 와 만날 때 교점의 개수가 7이므로

$$b=2$$

STEP3 ab 의 값 구하기

$b=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-a+2=9 \text{ 또는 } a+2=9$$

$$\therefore a=-7 \text{ 또는 } a=7$$

이때 a 가 양수이므로 $a=7$

$$\therefore ab=7\times 2=14$$

12

해결전략 | 주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값, 지나는 한 점을 이용하여 상수 a, b, c, d 의 값을 구한다.

STEP1 a, d 의 값 구하기

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4 이고 $a>0$ 이므로

$$(\text{최댓값})=a+d=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{최솟값})=-a+d=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면

$$a=3, d=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 b 의 값 구하기

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고

$b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=2\pi \quad \therefore b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore y=3\cos(x+c)-1$$

STEP3 $a+b+c+d$ 의 값 구하기

$y=3\cos(x+c)-1$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2=3\cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)-1, \cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)=1$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq c\leq 0 \text{이므로 } \frac{\pi}{3}+c=0, c=-\frac{\pi}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore a+b+c+d=3+1+\left(-\frac{\pi}{3}\right)+(-1)=3-\frac{\pi}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

채점 요소	배점
① a, d 의 값 구하기	30 %
② b 의 값 구하기	30 %
③ c 의 값 구하기	30 %
④ $a+b+c+d$ 의 값 구하기	10 %

13

해결전략 | 적당히 짝을 지어 같은 각의 삼각함수가 되도록 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta} \text{이므로}$$

$$\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ}$$

$\vdots$

$$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \\ = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 44^\circ \times \tan 45^\circ \\ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \\ = \tan 45^\circ = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

채점 요소	배점
① $\tan 46^\circ, \tan 47^\circ, \cdots, \tan 89^\circ$ 변형하기	70 %
② 식의 값 구하기	30 %

14

해결전략 | 주어진 삼각함수표를 이용할 수 있도록 각을 변형한다.

STEP1 삼각함수의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sin(-100^\circ) &= -\sin 100^\circ = -\sin(90^\circ+10^\circ) \\ &= -\cos 10^\circ = -0.9848 \end{aligned}$$

$$\cos 192^\circ = \cos (180^\circ + 12^\circ) = -\cos 12^\circ = -0.9781$$

$$\tan 371^\circ = \tan (360^\circ + 11^\circ) = \tan 11^\circ = 0.1944$$

STEP2 $\sin (-100^\circ) + \cos 192^\circ + \tan 371^\circ$ 의 값 구하기

$$\therefore \sin (-100^\circ) + \cos 192^\circ + \tan 371^\circ$$

$$= -0.9848 + (-0.9781) + 0.1944$$

$$= -1.7685$$

15

해결전략 | 점 A의 좌표를 삼각함수로 나타내고, 각 점의 대칭성을 이용한다.

STEP1 점 A의 좌표를 삼각함수로 나타내기

점 A의 좌표를 (a, b) 라고 하면 $\overline{OA}=1$ 이고 $\overline{OA}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이므로 $\overline{OA}$ 는 원의 반지름이므로 $\overline{OA}=1$

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta$$

$$\therefore A(\cos \theta, \sin \theta)$$

STEP2 $\cos (\pi - \theta)$ 와 같은 좌표 구하기

직사각형 ABCD에서 두

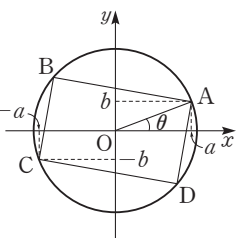
점 A와 C는 원점에 대하여

대칭이므로 직선 AC는 원점을 지나고 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 이므로 두 점 A와 C는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$= -a$$

이므로 $\cos (\pi - \theta)$ 와 같은 것은 점 C의 x 좌표이다.



16

해결전략 | 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내어 그 합이 8임을 이용한다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x$$

이므로

$$y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 3 \cos x + k$$

$$= -2 \cos x + 3 \cos x + k$$

$$= \cos x + k \quad \dots\dots ①$$

STEP2 $\cos x$ 의 범위를 이용하여 y 의 값의 범위 구하기

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 + k \leq \cos x + k \leq 1 + k$$

$$\therefore -1 + k \leq y \leq 1 + k \quad \dots\dots ②$$

STEP3 k 의 값 구하기

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1 + k$, 최솟값은 $-1 + k$ 이고 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$$(1 + k) + (-1 + k) = 8, 2k = 8$$

$$\therefore k = 4 \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① 주어진 함수식을 간단히 하기	30 %
② y 의 값의 범위를 k 에 대한 식으로 나타내기	50 %
③ k 의 값 구하기	20 %

17

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 $\sin^2 x$ 를 $\cos x$ 에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 $\sin^2 x$ 의 값의 범위 구하기

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{에서 } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

이때 $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ 에서

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2 x \leq 1, -1 \leq -\cos^2 x \leq -\frac{1}{4}$$

$$0 \leq 1 - \cos^2 x \leq \frac{3}{4} \quad \therefore 0 \leq \sin^2 x \leq \frac{3}{4}$$

STEP2 $\sin^2 x$ 의 최댓값 구하기

따라서 $\sin^2 x$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

18

해결전략 | $\cos x$ 에 대한 함수식으로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x + 3k - 1$$

$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x + 3k - 1$$

$$= -\cos^2 x + \cos x + 3k$$

STEP2 $\cos x = t$ 로 치환하여 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

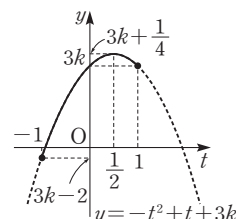
$$y = -t^2 + t + 3k$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3k + \frac{1}{4}$$

이므로 오른쪽 그림에서

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때 최댓값은 } 3k + \frac{1}{4}, t = -1 \text{일 때 최솟값은}$$

$$3k - 2 \text{이다.}$$



STEP 3 $f(x)$ 의 최댓값 구하기

즉, $3k-2=-\frac{1}{4}$ 이므로
 $3k=\frac{7}{4} \quad \therefore k=\frac{7}{12}$ $\rightarrow f(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$3 \times \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 2$$

상위권 도약 문제

241~242쪽

01 ④	02 ②	03 8	04 20
05 ④	06 $\frac{99}{2}$	07 $\frac{3}{4}\pi$	08 11

01

해결전략 | 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이면 $f(x)=f(x+p)$ 가 성립함을 이용한다.

STEP 1 p 의 값을 찾기 위한 조건 알아보기

$f(x)=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+\theta)=f(x)$ 가 성립한다고 하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+\sin(x+\theta)}+\sqrt{1-\sin(x+\theta)} \\ &= \sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x} \end{aligned}$$

따라서 $\sin(x+\theta)=\pm\sin x$ 를 만족시키는 최소의 양의 θ 를 찾으면 된다.

STEP 2 $\cos \frac{p}{3}$ 의 값 구하기

그런데 $\theta=\pi$ 이면 $\sin(x+\pi)=-\sin x$ 를 만족시키므로 주기는 π 이다.

따라서 $p=\pi$ 이므로

$$\cos \frac{p}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

02

해결전략 | 사인함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 β, γ 를 α 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 β, γ 를 α 에 대한 식으로 나타내기

함수 $f(x)=\sin \pi x$ ($x \geq 0$)의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로

$$\gamma=2+\alpha$$

또, $f(x)=\sin \pi x$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}, \alpha+\beta=1 \quad \therefore \beta=1-\alpha$$

STEP 2 $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f(\alpha+\beta+\frac{1}{2})$ 의 값 구하기

$$\alpha+\beta+\gamma+1=\alpha+(1-\alpha)+(2+\alpha)+1=4+\alpha,$$

$$\alpha+\beta+\frac{1}{2}=\alpha+(1-\alpha)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\frac{2}{3}$$

($\because f(x)$ 의 주기가 2)

$$f(\alpha+\beta+\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=\sin \frac{3}{2}\pi=-1$$

$$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f(\alpha+\beta+\frac{1}{2})=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

03

해결전략 | 주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값, 평행이동을 이용하여 상수 a, b 의 값을 구한다.

STEP 1 b 의 값 구하기

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 5, 최솟값이 -1 이므로

$$3+b=5, -3+b=-1$$

$$\therefore b=2$$

STEP 2 a 의 값 구하기

주어진 그래프에서 주기는 $5-1=4$

$$f(x)=3\sin \frac{\pi(x+a)}{2}+2$$
의 그래프는

$y=3\sin \frac{\pi}{2}x+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } f(x)=3\sin \frac{\pi(x+a)}{2}+2 \text{의 그래프를 평행이}$$

동하여 $y=3\sin \frac{\pi}{2}x+2$ 의 그래프와 일치하려면 $a=4k$

(k 는 정수)이어야 한다.

이때 a 는 양수이므로 a 의 최솟값은 4이다.

STEP 3 ab 의 최솟값 구하기

따라서 ab 의 최솟값은

$$4 \times 2 = 8$$

04

해결전략 | 주어진 함수의 그래프를 그리고 대칭성을 이용한다.

STEP 1 $y=3\left|\cos \frac{\pi}{2}x\right|$ 의 그래프 그리기

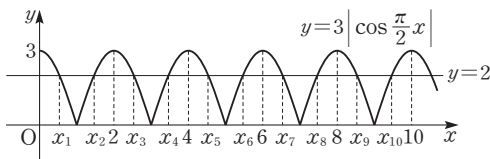
$y=3\left|\cos \frac{\pi}{2}x\right|$ 의 그래프는 $y=3\cos \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프에서

$y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

한편, 함수 $y=3\cos\frac{\pi}{2}x$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -3,

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ 이다.

함수 $y=3\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP2 $x_2+x_5+x_6+x_9$ 의 값 구하기

위의 그림에서 $x_2=2-x_1$, $x_5=4-x_1$, $x_6=6-x_1$,

$x_9=8-x_1$ 이므로

$$x_2+x_5+x_6+x_9$$

$$=(2-x_1)+(4-x_1)+(6-x_1)+(8-x_1)$$

$$=20$$

05

해결전략 | 삼각형 ABC의 넓이를 삼각함수를 포함한 식으로 나타내어 그 넓이가 12보다 작은 경우의 수를 모두 구한다.

STEP1 삼각형 ABC의 넓이를 식으로 나타내기

$\overline{AB}=8$ 이고 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이는 점 C의 x 좌표의 절댓값과 같다. 즉,

$$\overline{CH}=\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|$$

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면 $\overline{AB}=8$ 이고 m 은 자연수이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$$

$$=\frac{1}{2}\times 8\times\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|$$

$$=4m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$$

STEP2 n 의 값에 따른 $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$ 의 값 구하기

$n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 일 때 $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$ 의 값은 각각

$$\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|=\left|\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|-\cos\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\left|\cos\pi\right|=\left|-1\right|=1,$$

$$\left|\cos\frac{4\pi}{3}\right|=\left|\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|-\cos\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\left|\cos\frac{5\pi}{3}\right|=\left|\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\left|\cos 2\pi\right|=1$$

이므로 $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$ 의 값은 $\frac{1}{2}$ 또는 1이다.

STEP3 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 경우의 수 구하기

$$4m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|<12\text{에서 }m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|<3$$

(i) $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}$ 일 때, 즉 $n=1, 2, 4, 5$ 일 때

$$m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}m<3$$

$$\therefore m<6$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 12보다 작게 하는 m 의

개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이므로 구하는 경우의 수는

$$4\times 5=20 \rightarrow (n\text{의 개수})\times(m\text{의 개수})$$

(ii) $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=1$ 일 때, 즉 $n=3, 6$ 일 때

$$m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=m<3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 12보다 작게 하는 m

의 개수는 1, 2이므로 구하는 경우의 수는

$$2\times 2=4$$

(i), (ii)에 의하여 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작은 경우의 수는

$$20+4=24$$

STEP4 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 확률 구하기

주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6^2=36$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

🎯 풀법의 비법

어떤 실험이나 관찰에서 일어나는 모든 경우의 수가 n 이고 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A 가 일어나는 경우의 수가 a 이면 사건 A 가 일어날 확률 p 는 $p=\frac{a}{n}$ 이다.

06

해결전략 | $\angle P_{n-1}OP_n=\theta$ 로 놓고 $f(n)$ 을 삼각함수로 나타낸다.

STEP1 $f(n)$ 을 삼각함수로 나타내기

$A=P_0$, $B=P_{100}$ 이라 하고,

$\angle P_{n-1}OP_n = \theta$ ($n=1, 2, 3, \dots, 100$)라고 하면

$$100\theta = \frac{\pi}{2}$$

$\angle P_nOA = n\theta$ 이므로 $f(n) = \sin n\theta$

STEP2 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \dots + \{f(99)\}^2 \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 99\theta \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 50\theta \\ &\quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 49\theta\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 48\theta\right) \\ &\quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 47\theta\right) + \dots + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 50\theta \\ &\quad + \cos^2 49\theta + \cos^2 48\theta + \cos^2 47\theta + \dots + \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &\quad + \dots + (\sin^2 49\theta + \cos^2 49\theta) + \sin^2 50\theta \\ &= 1 \times 49 + \sin^2 \frac{\pi}{4} \left(\because 50\theta = \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 49 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{99}{2} \end{aligned}$$

07

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 함수의 식을 변형한다.

STEP1 함수의 식 변형하기

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $-1 \leq \tan x \leq 1$ 이고,

$$\begin{aligned} y &= \tan x - \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \tan x - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan x - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 - 1 \\ &= -\tan^2 x + \tan x - 1 \end{aligned}$$

STEP2 $\tan x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 함수의 최솟값 구하기

$\tan x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t - 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

이므로 함수 $y = -t^2 + t - 1$ 은 $t = -1$, 즉 $\tan x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

STEP3 ab 의 값 구하기

$\tan x = -1$ 에서 $x = -\frac{\pi}{4}$ ($\because -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)이므로

$$a = -\frac{\pi}{4}, b = -3$$

$$\therefore ab = \frac{3}{4}\pi$$

08

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여

$9\sin^2(\pi + \alpha + \beta) + 9\cos \gamma$ 를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 이므로 $\alpha + \beta = \pi - \gamma$

$$\begin{aligned} \therefore 9\sin^2(\pi + \alpha + \beta) + 9\cos \gamma \\ &= 9\sin^2(2\pi - \gamma) + 9\cos \gamma \\ &= 9\sin^2 \gamma + 9\cos \gamma \\ &= 9(1 - \cos^2 \gamma) + 9\cos \gamma \quad (\because \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1) \\ &= -9\cos^2 \gamma + 9\cos \gamma + 9 \end{aligned}$$

STEP2 $\cos \gamma = t$ 로 치환하여 t 의 값의 범위 구하기

$f(\cos \gamma) = -9\cos^2 \gamma + 9\cos \gamma + 9$ 라 하고

$\cos \gamma = t$ 라고 하면

$$f(t) = -9t^2 + 9t + 9$$

$\cos \gamma = t$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

..... ㉠

이때 $a^2 + b^2 = 3ab \cos \gamma$ 에서

$$\cos \gamma = t = \frac{a^2 + b^2}{3ab} = \frac{a}{3b} + \frac{b}{3a}$$

$a > 0, b > 0$ 에서 $\frac{a}{3b} > 0, \frac{b}{3a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} t = \frac{a}{3b} + \frac{b}{3a} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{3b} \times \frac{b}{3a}} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉡ \\ &\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{3b} = \frac{b}{3a}, \text{ 즉 } a=b \text{ 일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

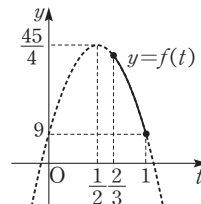
㉠, ㉡에서 t 의 값의 범위는

$$\frac{2}{3} \leq t \leq 1$$

STEP3 최댓값 구하기

$$f(t) = -9t^2 + 9t + 9 = -9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4}$$

$\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ 이므로 다음 그림에서 $f(t)$ 는 $t = \frac{2}{3}$ 일 때, 최댓값을 갖는다.



따라서 구하는 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -9\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4} = 11$$

09 삼각방정식과 삼각부등식

개념확인

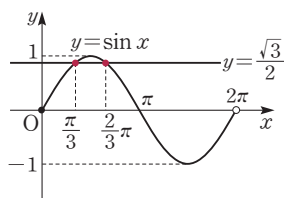
244~245쪽

01 답 (1) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$

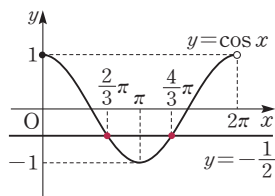
(2) $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

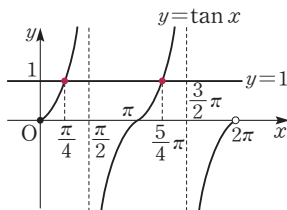
(1) 주어진 방정식의 해는 다음 그림에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$



(2) 주어진 방정식의 해는 다음 그림에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$



(3) 주어진 방정식의 해는 다음 그림에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로
 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

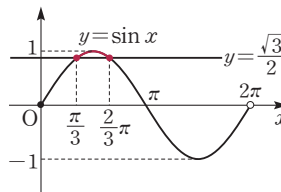


02 답 (1) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$

(3) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

(1) 주어진 부등식의 해는 다음 그림과 같이 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.

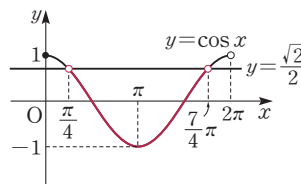


따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

(2) 주어진 부등식의 해는 다음 그림과 같이 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.

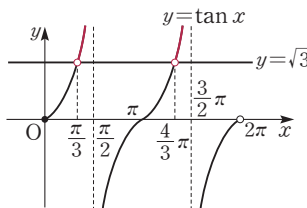


따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$$

(3) 주어진 부등식의 해는 다음 그림과 같이 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = \sqrt{3}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이다.



따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

필수유형 01

247쪽

01-1 답 $\frac{2}{3}\pi$

해결전략 $|2x - \frac{\pi}{6}| = t$ 로 놓고 t 에 대한 삼각방정식의 해를 구한다.

STEP1 $2x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$2x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서

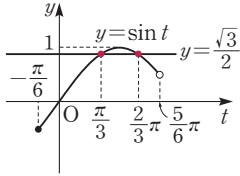
$$-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$$

STEP2 방정식을 만족시키는 t 의 값 구하기

주어진 방정식은

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



위의 그림과 같이 $-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표가 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}\pi$$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

즉, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

01-2 ㉮ 3π

해결전략 $|x + \frac{\pi}{2}| = t$ 로 놓고 t 에 대한 삼각방정식의 해를 구한다.

STEP1 $x + \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$x + \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi$$

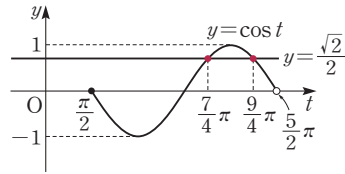
$$\therefore \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{5}{2}\pi$$

STEP2 방정식을 만족시키는 t 의 값 구하기

주어진 방정식은

$$2\cos t = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{5}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t 좌표가 $\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$t = \frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } t = \frac{9}{4}\pi$$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

즉, $x + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{4}\pi$ 또는 $x + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 3\pi$$

01-3 ㉮ 2π

해결전략 $|x - \frac{\pi}{6}| = t$ 로 놓고 t 에 대한 삼각방정식의 해를 구한다.

STEP1 $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

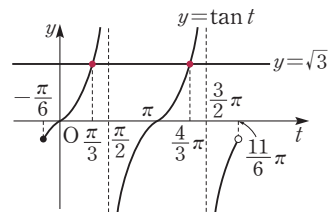
$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

STEP2 방정식을 만족시키는 t 의 값 구하기

주어진 방정식은

$$\tan t = \sqrt{3}$$



위의 그림과 같이 $-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의

그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 t 좌표가 $\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{4}{3}\pi$$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

즉, $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

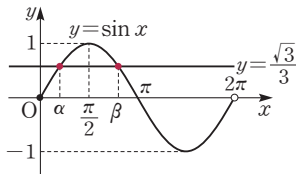
$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$$

01-4 **답 -1**

해결전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha + \beta$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 그리면 다음 그림과 같다.



방정식 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 두 근이 α, β ($\alpha < \beta$)이므로 α, β

는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이다. 즉,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

STEP2 $\cos(\alpha + \beta)$ 의 값 구하기

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \pi = -1$$

01-5 **답 $\frac{13}{6}\pi$**

해결전략 $\pi \sin x = t$ 로 놓고 $\sin x$ 의 값을 구한 후 삼각방정식을 푼다.

STEP1 $\pi \sin x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기

$\pi \sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -\pi \leq \pi \sin x \leq \pi$$

$$\therefore -\pi \leq t \leq \pi$$

STEP2 $\sin x$ 의 값 구하기

주어진 방정식은 $\cos t = 0$ 이고 이를 만족시키는 t 의 값은

$$t = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2} \quad (\because -\pi \leq t \leq \pi)$$

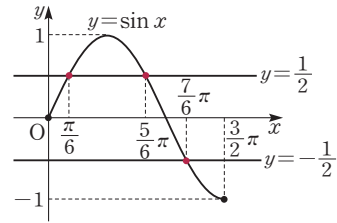
즉, $\pi \sin x = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi \sin x = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



$\sin x = -\frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{7}{6}\pi$

$\sin x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{7}{6}\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi$$

01-6 **답 8**

해결전략 절댓값의 성질을 이용하여 $\sin 2x$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\sin 2x$ 의 값 구하기

$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 에서 $\sin 2x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

STEP2 방정식의 실근의 개수 구하기

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq 2x < 4\pi$ 이므로

(i) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ 에서

$$2x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{13}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$2x = \frac{17}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{17}{12}\pi$$

(ii) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ 에서

$$2x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{19}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$2x = \frac{23}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{19}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{12}\pi$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 개수는 8이다.

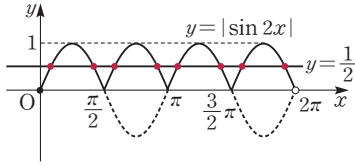
● **다른 풀이**

STEP1 함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프 그리기

주어진 방정식의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = |\sin 2x|$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표이다.

함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프는 주기가 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 인 함수
 $y = \sin 2x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여
 대칭이동하여 얻은 그래프이므로 다음 그림과 같다.



STEP2 방정식의 실근의 개수 구하기
 따라서 곡선과 직선의 교점이 8개이므로 방정식
 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 의 모든 실근의 개수는 8이다.

필수유형 02

249쪽

02-1 ㉡ 2π

해결전략 | 주어진 방정식을 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여
 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = 0$$

$$\therefore 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$$

STEP2 $\cos x = t$ 로 놓고 t 의 값 구하기

$\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,
 주어진 방정식은

$$2t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$(2t - 1)(t + 3) = 0$$

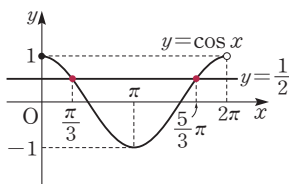
$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

그런데 $-1 \leq t \leq 1$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

즉, $\cos x = \frac{1}{2}$ 이므로 다음 그림에서

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$



따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$$

02-2 ㉡ $\frac{3}{2}\pi$

해결전략 | 주어진 방정식을 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여
 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 3 \text{에서}$$

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0$$

$$\therefore 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

STEP2 $\sin x = t$ 로 놓고 t 의 값 구하기

$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,
 주어진 방정식은

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

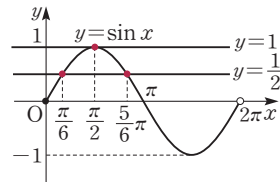
$$(2t - 1)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

STEP3 주어진 방정식의 모든 근의 합 구하기

즉, $\sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$ 이므로 다음 그림에서

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6}$$



따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

02-3 ㉡ ③

해결전략 | 주어진 방정식을 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여
 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형하여 해를 구한다.

STEP1 $\cos x$ 의 값 구하기

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0 \text{에서}$$

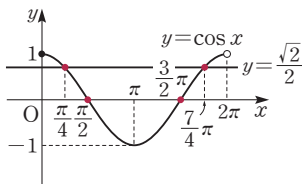
$$2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

STEP2 주어진 방정식의 해가 아닌 것 찾기



$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

(i) $\cos x = 0$ 일 때, $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3\pi}{2}$

(ii) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7\pi}{4}$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

02-4 ㉠ 2

해결전략 | 주어진 방정식의 양변에 $\tan x$ 를 곱하여 $\tan x$ 에 대한 이차방정식의 해를 구한다.

STEP1 식 변형하기

$$\tan x + \frac{\sqrt{3}}{\tan x} = 1 + \sqrt{3} \text{의 양변에 } \tan x \text{를 곱하면}$$

$$\tan^2 x + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})\tan x$$

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

STEP2 $\tan x$ 의 값 구하기

$$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan x = 1 \text{ 또는 } \tan x = \sqrt{3}$$

STEP3 실근의 개수 구하기

$\pi < x < 2\pi$ 이므로

(i) $\tan x = 1$ 일 때, $x = \frac{5\pi}{4}$

(ii) $\tan x = \sqrt{3}$ 일 때, $x = \frac{4\pi}{3}$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{5\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{4\pi}{3}$ 이므로 실근의 개수는 2이다.

02-5 ㉠ 6π

해결전략 | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 를 변형하여 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 식 변형하기

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{이므로}$$

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0 \text{에서}$$

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

STEP2 방정식의 해 구하기

$$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

이때 $0 \leq x < 4\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{13\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{17\pi}{6}$$

STEP3 방정식의 모든 해의 합 구하기

따라서 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$$

02-6 ㉠ $\frac{7}{4}\pi$

해결전략 | $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 주어진 방정식을

$\sin x$ 와 $\cos x$ 에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 삼각함수의 값 구하기

$$\tan^2 x = 2\sin^2 x \text{에서}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 2\sin^2 x = 0$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sin^2 x = 0$$

양변에 $\cos^2 x$ 를 곱하면

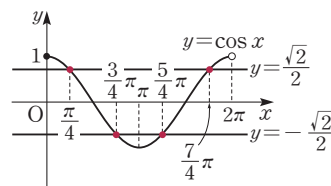
$$\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \text{ 또는 } \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

STEP2 방정식의 해 구하기



$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

(i) $\sin x = 0$ 일 때, $x = 0$ 또는 $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7\pi}{4}$

(iii) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $x = \frac{3\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{4}$

STEP3 $M - m$ 의 값 구하기

따라서 $M = \frac{7}{4}\pi$, $m = 0$ 이므로

$$M - m = \frac{7}{4}\pi$$

03-1 ㉡ $-2 \leq k \leq 2$

해결전략 | 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한 후 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 존재함을 이용한다.

STEP1 방정식이 실근을 가질 조건 알기

방정식 $\cos^2 x + 2\sin x - k = 0$, 즉

$\cos^2 x + 2\sin x = k$ 가 실근을 가지려면 함수

$y = \cos^2 x + 2\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 교점을 가져야 한다.

STEP2 $y = \cos^2 x + 2\sin x$ 의 식 변형하기

$y = \cos^2 x + 2\sin x$ 에서

$y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x$

$= -\sin^2 x + 2\sin x + 1$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$y = -t^2 + 2t + 1$

$= -(t-1)^2 + 2$

STEP3 k 의 값의 범위 구하기

오른쪽 그림에서

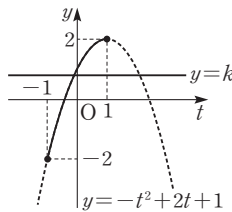
$t = -1$ 일 때, $y = -2$

$t = 1$ 일 때, $y = 2$

이므로 $-2 \leq y \leq 2$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$-2 \leq k \leq 2$

03-2 ㉡ $-1 \leq k \leq \frac{5}{4}$

해결전략 | 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한 후 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 존재함을 이용한다.

STEP1 방정식이 실근을 가질 조건 알기

방정식 $\sin^2 x - \sin x + k - 1 = 0$, 즉

$\sin^2 x - \sin x = 1 - k$ 가 실근을 가지려면 함수

$y = \sin^2 x - \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = 1 - k$ 가 교점을 가져야 한다.

STEP2 k 의 값의 범위 구하기

$y = \sin^2 x - \sin x$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

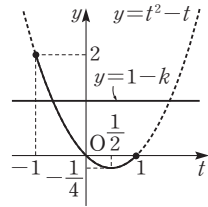
$-1 \leq t \leq 1$ 이고

$y = t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{4} \leq 1 - k \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq k \leq \frac{5}{4}$$



03-3 ㉡ 1

해결전략 | 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한 후 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 존재함을 이용한다.

STEP1 방정식이 실근을 가질 조건 알기

방정식 $4\sin^2 x - 4\cos x - k = 0$, 즉

$4\sin^2 x - 4\cos x = k$ 가 실근을 가지려면 함수

$y = 4\sin^2 x - 4\cos x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 교점을 가져야 한다.

STEP2 $y = 4\sin^2 x - 4\cos x$ 의 식 변형하기

$y = 4\sin^2 x - 4\cos x$

$= 4(1 - \cos^2 x) - 4\cos x$

$= -4\cos^2 x - 4\cos x + 4$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$y = -4t^2 - 4t + 4$

$= -4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$

STEP3 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

따라서 오른쪽 그림에서 주

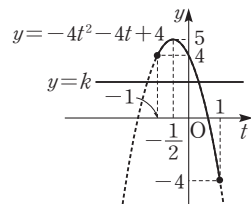
어진 방정식이 실근을 갖도

록 하는 k 의 값의 범위는

$-4 \leq k \leq 5$

즉, $\alpha = -4$, $\beta = 5$ 이므로

$\alpha + \beta = 1$



03-4 ㉡ 9

해결전략 | 방정식 $f(x)=a$ 를 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나야 함을 이용한다.

STEP1 실수 x 가 존재하는 조건 알기

$2\sin^2 x + 4\cos x + n - 1 = 0$ 에서

$2(1 - \cos^2 x) + 4\cos x + n - 1 = 0$

$\therefore 2\cos^2 x - 4\cos x - 1 = n$

주어진 방정식을 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 함수 $y=2\cos^2 x-4\cos x-1$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 의 교점이 존재해야 한다.

STEP 2 n 의 값의 범위 구하기

이때 $\cos x=t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y=2t^2-4t-1$$

$$=2(t-1)^2-3$$

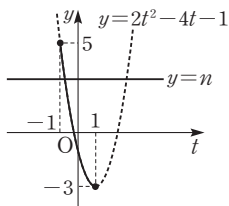
오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 n 의 값의 범위는

$$-3 \leq n \leq 5$$

STEP 3 정수 n 의 개수 구하기

따라서 정수 n 은

$-3, -2, -1, \dots, 5$ 의 9개이다.



03-5 ㉠ 0

해결전략 방정식 $f(x)=a$ 가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 함을 이용한다.

STEP 1 방정식이 서로 다른 2개의 실근을 가질 조건 알기

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$2\sin^2 x-2\sin x=-\frac{a}{4}$$

주어진 방정식이 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin^2 x-2\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{a}{4}$ 의 교점이 2개 존재해야 한다.

STEP 2 a 의 최솟값 구하기

$y=2\sin^2 x-2\sin x$ 에서 $\sin x=t$ 로 놓으면

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y=2t^2-2t$$

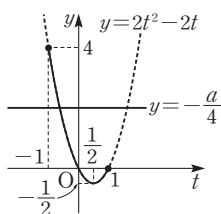
$$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 서로 다른 2개의 실근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} < -\frac{a}{4} \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a < 2$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 0이다.



03-6 ㉠ 30

해결전략 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프를 이용하여 k 의 값을 구한다.

STEP 1 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프 그리기

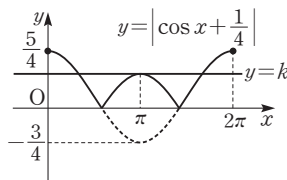
함수 $y=\cos x+\frac{1}{4}$ 의 그래프는 주기가 2π 인 함수

$y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 그래프이므로 이 함수의 치역은 $\left\{y \mid -\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{4}\right\}$ 이다.

이때 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프는 함수

$y=\cos x+\frac{1}{4}$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동하여 얻은 그래프이므로 함수

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP 2 k 의 값 구하기

함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

STEP 3 $40a$ 의 값 구하기

따라서 $a=\frac{3}{4}$ 이므로

$$40a=40 \times \frac{3}{4}=30$$

필수유형 04

253쪽

04-1 ㉠ $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

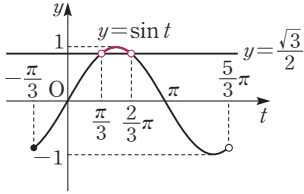
해결전략 $2x-\frac{\pi}{3}=t$ 로 놓고 사인함수의 그래프를 이용한다.

STEP 1 $2x-\frac{\pi}{3}=t$ 로 놓고 t 에 대한 삼각부등식으로 나타내기

$$2x-\frac{\pi}{3}=t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < \pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi \text{이고}$$

주어진 부등식은 $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

STEP2 부등식의 해 구하기



위의 그림과 같이 $-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3}$ 에서 부등식

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin t$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}\pi < 2x < \pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

04-2 ▣ $\frac{\pi}{4} < x < \pi$

해결전략 | $x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓고 탄젠트함수의 그래프를 이용한다.

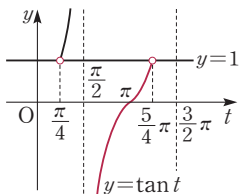
STEP1 $x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓고 예 대한 삼각부등식으로 나타내기

$x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 < x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$ 이고

주어진 부등식은

$$\tan t < 1$$

STEP2 부등식의 해 구하기



위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$ 에서 부등식 $\tan t < 1$ 의

해는 함수 $y = \tan t$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{4}\pi$$

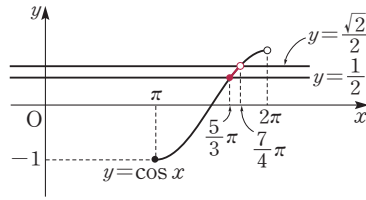
$$\text{즉, } \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \pi$$

04-3 ▣ $\frac{5\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4}$

해결전략 | 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

사이의 위치 관계를 이용하여 부등식의 해를 구한다.



부등식 $\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 위의 그림에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있

고 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범

위와 같으므로

$$\frac{5\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4}$$

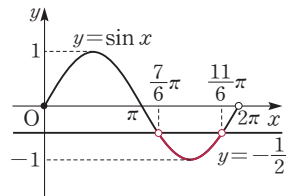
🔍 풀법의 비법

함수 $f(x)$ 에 대하여 부등식 $a \leq f(x) \leq b$ 의 해는 두 부등식 $f(x) \geq a$, $f(x) \leq b$ 를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위와 같다. (단, a, b 는 상수이다.)

04-4 ▣ $-\frac{1}{2}$

해결전략 | 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

STEP1 α, β 의 값 구하기



$2 \sin x + 1 < 0$ 에서 $\sin x < -\frac{1}{2}$ 이므로 부등식의 해는

$$\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}\pi, \beta = \frac{11\pi}{6}\pi$$

STEP2 $\cos(\beta - \alpha)$ 의 값 구하기

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

해결전략 | 두 삼각함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 그래프의 위치 관계를 이용하여 부등식의 해를 구한다.

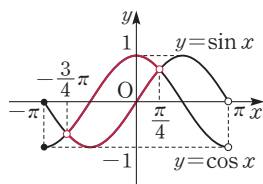
STEP1 두 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 그래프의 위치 관계 파악하기

부등식 $\sin x < \cos x$ 의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 함수 $y = \sin x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.

STEP2 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

다음 그림에서 구하는 부등식의 해는

$$-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}$$



따라서 $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$

04-6 $\text{답 } \frac{5}{6}\pi < \alpha < \pi$

해결전략 | β 를 α 에 대한 식으로 나타내어 주어진 부등식을 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 나타내기

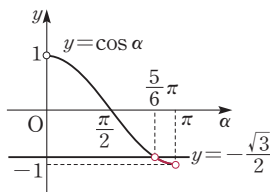
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{에서 } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cos \alpha + \sin \beta < -\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\cos \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) < -\sqrt{3}, \cos \alpha + \cos \alpha < -\sqrt{3}$$

$$2 \cos \alpha < -\sqrt{3} \quad \therefore \cos \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

STEP2 α 의 값의 범위 구하기



위의 그림과 같이 $0 < \alpha < \pi$ 에서 부등식 $\cos \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

의 해는 함수 $y = \cos \alpha$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다

아래쪽에 있는 부분의 α 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{5}{6}\pi < \alpha < \pi$$

05-1 $\text{답 } \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$2 \sin^2 x - 7 \cos x - 5 \geq 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 7 \cos x - 5 \geq 0$$

$$2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 \leq 0$$

STEP2 $\cos x$ 의 값의 범위 구하기

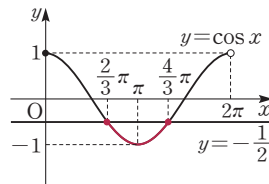
$$(2 \cos x + 1)(\cos x + 3) \leq 0$$

$$0 \leq \pi < 2\pi \text{에서 } \cos x + 3 > 0 \text{이므로}$$

$$2 \cos x + 1 \leq 0$$

$$\therefore \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

STEP3 부등식의 해 구하기



위의 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$$

05-2 $\text{답 } 0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$4 \cos^2 x - 8 \sin x - 7 < 0 \text{에서}$$

$$4(1 - \sin^2 x) - 8 \sin x - 7 < 0$$

$$4 \sin^2 x + 8 \sin x + 3 > 0$$

STEP2 $\sin x$ 의 값의 범위 구하기

$$(2 \sin x + 3)(2 \sin x + 1) > 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } 2 \sin x + 3 > 0 \text{이므로}$$

$$2 \sin x + 1 > 0$$

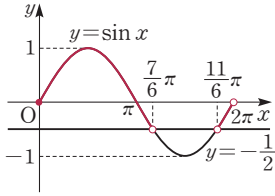
$$\therefore \sin x > -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5$$

$$\therefore 2 \sin x + 3 > 0$$

STEP3 부등식의 해 구하기



위의 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin x > -\frac{1}{2}$

의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

05-3 답 $\frac{4}{3}\pi$

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 한 종류의 삼각 함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 식 변형하기

$$2\sin^2 x + 5\cos x < 4 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 < 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0$$

STEP2 $\cos x$ 의 값의 범위 구하기

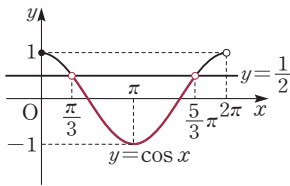
$$(2\cos x - 1)(\cos x - 2) > 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \cos x - 2 < 0 \text{이므로}$$

$$2\cos x - 1 < 0$$

$$\therefore \cos x < \frac{1}{2}$$

STEP3 $\beta - \alpha$ 의 값 구하기



위의 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 의

해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{4}{3}\pi$$

05-4 답 -1

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 한 종류의 삼각 함수에 대한 식으로 변형하여 α, β 의 값을 구한다.

STEP1 식 변형하기

$$2\cos^2 x - 3\sin x < 0 \text{에서 } 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x < 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$$

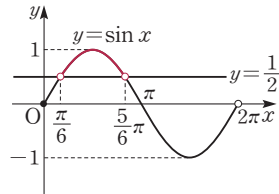
STEP2 $\sin x$ 의 값의 범위 구하기

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) > 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \sin x + 2 > 0 \text{이므로}$$

$$2\sin x - 1 > 0 \quad \therefore \sin x > \frac{1}{2}$$

STEP3 $\cos(\alpha + \beta)$ 의 값 구하기



위의 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의

해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \pi = -1$$

05-5 답 18

해결전략 | 주어진 부등식의 해를 구하여 $\frac{m}{6}\pi < \theta < \frac{n}{6}\pi$ 와 비교한다.

STEP1 $\sin \theta$ 의 값의 범위 구하기

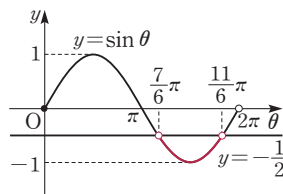
$$2\sin^2 \theta > 1 + \sin \theta \text{에서 } 2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 > 0$$

$$(2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 1) > 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } \sin \theta - 1 \leq 0 \text{이므로}$$

$$2\sin \theta + 1 < 0 \quad \therefore \sin \theta < -\frac{1}{2}$$

STEP2 $m + n$ 의 값 구하기



앞의 그림과 같이 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin \theta < -\frac{1}{2}$ 의

해는 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래
쪽에 있는 부분의 θ 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $m=7, n=11$ 이므로

$$m+n=18$$

05-6 0

해결전략 $|\tan^2 x| = (|\tan x|)^2$ 임을 이용하여 주어진 부등
식에서 $\tan x$ 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 $\tan x$ 의 값의 범위 구하기

$$\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)|\tan x| + \sqrt{3} \leq 0$$

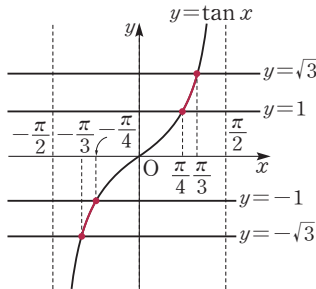
$$(|\tan x|)^2 - (\sqrt{3}+1)|\tan x| + \sqrt{3} \leq 0$$

$$(|\tan x| - 1)(|\tan x| - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$1 \leq |\tan x| \leq \sqrt{3} \quad \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \text{ 일 때 } a \leq |x| \leq b \text{ 이면} \\ a \leq x \leq b \text{ 또는 } -b \leq x \leq -a \text{ (단, } a < b) \end{array}$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq \tan x \leq -1 \text{ 또는 } 1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$$

STEP2 부등식의 해 구하기



위의 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 주어진 부등식의

해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 만나거나
직선 $y=1$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y=\sqrt{3}$ 과 만나거나 직
선 $y=\sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있는 부분 또는 직선 $y=-\sqrt{3}$ 과
만나거나 직선 $y=-\sqrt{3}$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y=-1$
과 만나거나 직선 $y=-1$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x
의 값의 범위이다.

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

STEP3 최댓값과 최솟값의 합 구하기

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$, 최솟값은 $-\frac{\pi}{3}$ 이므로 최댓값

과 최솟값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

발전유형 06

257쪽

06-1 06 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$

해결전략 이차부등식이 성립할 조건을 이용하여 θ 의 값의
범위를 구한다.

STEP1 식 세우기

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로

이차방정식 $x^2 - 2x \sin \theta - \cos \theta + 1 = 0$ 의 판별식을 D
라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-\cos \theta + 1) < 0$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값의 범위 구하기

$$\sin^2 \theta + \cos \theta - 1 < 0, (1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 1 < 0$$

$$\cos^2 \theta - \cos \theta > 0, \cos \theta (\cos \theta - 1) > 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } \cos \theta - 1 \leq 0 \text{이므로}$$

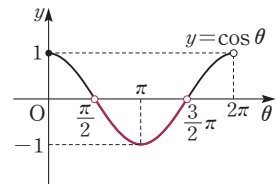
$$\cos \theta < 0$$

STEP3 θ 의 값의 범위 구하기

따라서 오른쪽 그림에서

구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



공식의 비법

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

$$(\text{단, } D = b^2 - 4ac)$$

$$\textcircled{1} ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$$

$$\textcircled{2} ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$$

06-2 06 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

해결전략 이차부등식이 성립할 조건을 이용하여 θ 의 값의
범위를 구한다.

STEP1 식 세우기

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로

이차방정식 $3x^2 - 2\sqrt{2}x \cos \theta + \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D
라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{2} \cos \theta)^2 - 3 \sin \theta < 0$$

STEP2 $\sin \theta$ 의 값의 범위 구하기

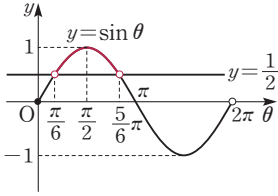
$$2 \cos^2 \theta - 3 \sin \theta < 0, 2(1 - \sin^2 \theta) - 3 \sin \theta < 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 > 0, (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$

STEP 3 θ 의 값의 범위 구하기



따라서 위의 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

06-3 ㉮ 7

해결전략 | $\cos \theta = t$ 로 놓고 t 에 대한 함수의 그래프를 그린다.

STEP 1 $\cos \theta = t$ 로 놓고 t 에 대한 식 구하기

주어진 부등식에서 $\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $t^2 - 3t - a + 9 \geq 0$ 에서 $t^2 - 3t \geq a - 9$

이때

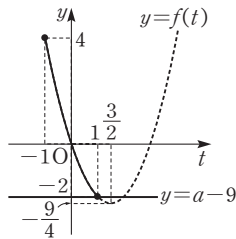
$$f(t) = t^2 - 3t = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

라고 하면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서

$y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$-2 \leq f(t) \leq 4$$



STEP 2 a 의 최댓값 구하기

모든 θ 에 대하여 $\cos^2 \theta - 3 \cos \theta \geq a - 9$ 이라면 $f(t)$ 의 최솟값이 $a - 9$ 보다 크거나 같아야 한다.

즉, $-2 \geq a - 9$ 이므로

$$a \leq 7$$

따라서 a 의 최댓값은 7이다.

06-4 ㉮ $\frac{4}{3}\pi$

해결전략 | 이차방정식의 판별식을 이용하여 삼각부등식을 세운다.

STEP 1 이차방정식이 실근을 갖지 않을 조건을 이용하여 부등식 세우기

이차방정식 $6x^2 + (4 \cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2 \cos \theta)^2 - 6 \sin \theta < 0$$

$$4 \cos^2 \theta - 6 \sin \theta < 0$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 6 \sin \theta < 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 > 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

STEP 2 θ 의 값의 범위 구하기

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

STEP 3 $3\alpha + \beta$ 의 값 구하기

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$ 이므로

$$3\alpha + \beta = 3 \times \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

06-5 ㉮ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

해결전략 | 이차방정식의 판별식을 이용하여 삼각부등식을 세운다.

STEP 1 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이용하여 $\sin \theta$ 의 값의 범위 구하기

이차방정식 $x^2 + 2x \cos \theta + 1 - \sin \theta = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \cos^2 \theta - (1 - \sin \theta) > 0$$

$$(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 1 > 0$$

$$\sin^2 \theta - \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta (\sin \theta - 1) < 0$$

$$\therefore 0 < \sin \theta < 1$$

STEP 2 θ 의 값의 범위 구하기

이때 $0 \leq \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

06-6 ㉮ $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$ 또는 $\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

해결전략 | 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 a 가 있으면 $f(a) < 0$ 임을 이용한다.

STEP 1 두 근 사이에 1이 존재하도록 부등식 세우기

$f(x) = 2x^2 + 3x \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 1$ 이라고 하면 방정식

$f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 1이 존재하므로 $f(1) < 0$

$$\text{즉, } f(1) = 2 + 3 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 1 < 0$$

STEP 2 $\cos \theta$ 의 값의 범위 구하기

$$2 + 3 \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) + 1 < 0$$

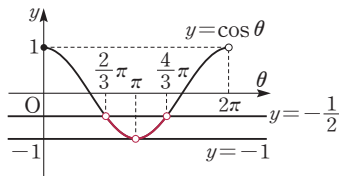
$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1 < 0$$

$$(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < \cos \theta < -\frac{1}{2}$$

STEP 3 θ 의 값의 범위 구하기

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $-1 < \cos \theta < -\frac{1}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프가 직선 $y = -1$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 θ 의 값의 범위와 같다.



따라서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \text{ 또는 } \pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

실전 연습 문제

258~259쪽

01 ②	02 1	03 7	04 ④	05 2
06 ③	07 ④	08 ③	09 π	10 ③
11 ②	12 ①			

01

해결전략 | 여러 가지 각의 삼각함수의 성질을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP 1 $\sin x$ 에 대한 식으로 나타내기

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$3 \sin x - \sin x = 1 \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

STEP 2 방정식의 해 구하기

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

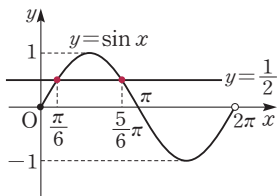
$y = \sin x$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌

표가 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$



02

해결전략 | $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 주어진 식을

$\tan x$ 에 대한 식으로 변형한다.

STEP 1 $\tan x$ 에 대한 식으로 나타내기

$$0 \leq x < \pi \text{에서 } 0 < \cos x \leq 1$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \text{에서}$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x$$

양변을 $\cos x$ 로 나누어 정리하면

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan x = -\sqrt{3}$$

STEP 2 실근의 개수 구하기

오른쪽 그림과 같이

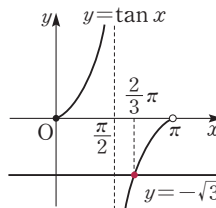
$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$

의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$ 의

교점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 실근의 개수는 1이다.



채점 요소	배점
① $\tan x$ 에 대한 식으로 나타내기	50 %
② 방정식의 해 구하기	40 %
③ 실근의 개수 구하기	10 %

03

해결전략 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용해서 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한다.

STEP 1 $\sin x$ 의 값 구하기

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

STEP 2 방정식의 근 구하기

이때 $0 < x < 2\pi$ 이므로

$$(i) \sin x = 0 \text{일 때, } x = \pi$$

$$(ii) \sin x = -1 \text{일 때, } x = \frac{3}{2}\pi$$

STEP 3 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 방정식의 모든 실근의 합은

$$\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore p+q = 2+5 = 7$$

04

해결전략 | $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 주어진 식을 $\tan x$

에 대한 식으로 변형한다.

STEP1 $\tan x$ 에 대한 식으로 변형하기

$4\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ 의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누면

$$\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$4\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 3 \times \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$4\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$$

STEP2 $\tan \alpha$ 의 값 구하기

$$(4\tan x + 1)(\tan x - 1) = 0$$

이때 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 $\tan x < 0$ 이므로

$$\tan x = -\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 방정식의 해 α 에 대하여

$$\tan \alpha = -\frac{1}{4}$$

05

해결전략 | 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형한 후, 두 함수의 그래프의 교점이 존재함을 이용한다.

STEP1 식 변형하기

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$\sin^2 x - 2\sin x - 1 = k$$

$$\therefore \sin^2 x - 2\sin x - 1 = k \quad \dots\dots ①$$

STEP2 k 의 최댓값 구하기

주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = \sin^2 x - 2\sin x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다. ②

$y = \sin^2 x - 2\sin x - 1$ 에서

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = t^2 - 2t - 1$$

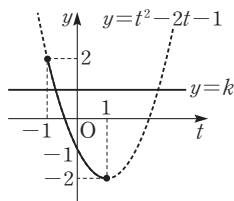
$$= (t-1)^2 - 2$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어

진 방정식이 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k \leq 2$$

이어야 하므로 k 의 최댓값은 2이다. ③



채점 요소	배점
① 주어진 방정식 변형하기	40 %
② 실근을 갖는 조건 알기	20 %
③ k 의 최댓값 구하기	40 %

06

해결전략 | 두 함수 $y = \cos x$, $y = |\sin x|$ 의 그래프를 그려 x 의 값의 범위를 구한다.

STEP1 부등식의 해 구하기

부등식 $\cos x \geq |\sin x|$ 의

해는 오른쪽 그림에서 함수

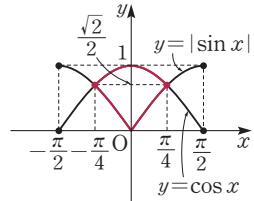
$y = \cos x$ 의 그래프가 함수

$y = |\sin x|$ 의 그래프와 만

나거나 위쪽에 있는 부분의

x 의 값의 범위와 같으므로

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$



STEP2 최솟값 구하기

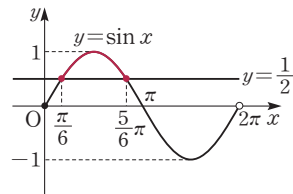
따라서 x 의 최솟값은 $-\frac{\pi}{4}$ 이다.

07

해결전략 | 그래프를 이용하여 두 부등식의 해를 각각 구한 후 공통부분을 찾는다.

STEP1 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기

(i) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x \geq \frac{1}{2}$

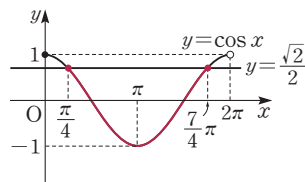


위의 그림에서 부등식 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

STEP2 $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기

(ii) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



앞의 그림에서 부등식 $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$$

STEP3 $\theta_1 - \theta_2$ 의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 두 부등식을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\theta_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\theta_1 - \theta_2 = \frac{7}{12}\pi$

08

해결전략 $AB < 0$ 이면 $A > 0$, $B < 0$ 또는 $A < 0$, $B > 0$ 임을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

STEP1 주어진 부등식의 해 구하기

$0 < x < \pi$ 에서

(i) $2^x - 8 < 0$ 이고 $\cos x - \frac{1}{2} > 0$ 인 경우

$$2^x - 8 < 0 \text{에서}$$

$$2^x < 8, 2^x < 2^3$$

$$\therefore 0 < x < 3 \quad \rightarrow \begin{matrix} 0 < x < \pi \text{에서 } 3 < \pi \text{이므로} \\ 0 < x < 3 \end{matrix}$$

..... ㉠

$$\cos x - \frac{1}{2} > 0 \text{에서 } \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 < x < \frac{\pi}{3}$

(ii) $2^x - 8 > 0$ 이고 $\cos x - \frac{1}{2} < 0$ 인 경우

$$2^x - 8 > 0 \text{에서}$$

$$2^x > 8, 2^x > 2^3$$

$$\therefore 3 < x < \pi \quad \rightarrow \begin{matrix} \text{밑이 1보다 크므로} \\ \text{부등호의 방향이 그대로이다.} \end{matrix}$$

..... ㉢

$$\cos x - \frac{1}{2} < 0 \text{에서 } \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

..... ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위는 $3 < x < \pi$

(i), (ii)에 의하여 부등식의 해는

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 3 < x < \pi$$

STEP2 $(b-a) + (d-c)$ 의 값 구하기

$$b < c \text{이므로 } 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 3 < x < \pi \text{에서}$$

$$a=0, b=\frac{\pi}{3}, c=3, d=\pi$$

$$\therefore (b-a) + (d-c) = \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + (\pi - 3) = \frac{4}{3}\pi - 3$$

09

해결전략 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 변형하여 부등식의 해를 구한다.

STEP1 식 변형하기

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 \geq 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 \geq 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0$$

..... ①

STEP2 $\alpha + \beta$ 의 값의 범위 구하기

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

$0 \leq x < \pi$ 일 때 오른쪽 그림

에서 x 의 값의 범위는

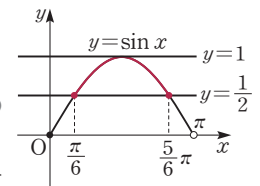
$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

..... ②

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \pi$$

..... ③



채점 요소	배점
① 주어진 부등식을 한 종류의 삼각함수로 나타내기	40 %
② 부등식의 해 구하기	40 %
③ $\alpha + \beta$ 의 값 구하기	20 %

10

해결전략 $\sin \theta = t$ 로 놓고 t 에 대한 함수의 그래프를 그린 다.

STEP1 $\sin \theta = t$ 로 놓고 t 에 대한 식 구하기

$$\sin^2 \theta - 4\sin \theta - k \geq 0 \text{에서 } \sin \theta = t \text{로 놓으면}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고 } t^2 - 4t - k \geq 0$$

STEP2 k 의 최댓값 구하기

$$f(t) = t^2 - 4t - k \text{라고 하면}$$

$$f(t) = (t-2)^2 - k - 4$$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 1$ 에서

$f(t)$ 는 $t=1$ 일 때, 최솟값 $-k-3$

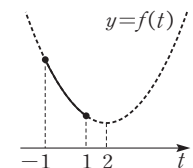
을 갖는다.

즉, $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립하려면

$$(f(t) \text{의 최솟값}) = -k-3 \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$k \leq -3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.



11

해결전략 | 이차방정식의 판별식이 0임을 이용하여 식을 세우고 방정식의 해를 구한다.

STEP1 $\sin \theta$ 에 대한 식 구하기

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(\sin \theta - 1)\}^2 - 1 = 0$$

$$4\sin^2 \theta - 8\sin \theta + 3 = 0$$

STEP2 모든 θ 의 값의 합 구하기

$$(2\sin \theta - 1)(2\sin \theta - 3) = 0$$

이때 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 θ 의 값은

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$\rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 를 만족시키는

12 θ 의 값은 $\frac{\pi}{6}$ 뿐이다.

해결전략 | 이차방정식의 판별식을 이용하여 삼각부등식을 세운다.

STEP1 이차방정식이 실근을 갖는 조건을 이용하여 부등식 세우기

$$\text{이차방정식 } x^2 - (2\sin \theta)x - 3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5 = 0$$

이 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$\text{이때 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

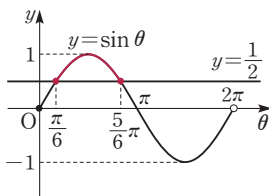
$$2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2 \leq 0$$

$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) \leq 0$$

STEP2 θ 의 값의 범위 구하기

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } \sin \theta - 2 < 0 \text{이므로}$$

$$2\sin \theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$



위의 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

STEP3 $4\beta - 2\alpha$ 의 값의 구하기

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5\pi}{6} \text{이므로}$$

$$4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{10}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = 3\pi$$

상위권 도약 문제

260쪽

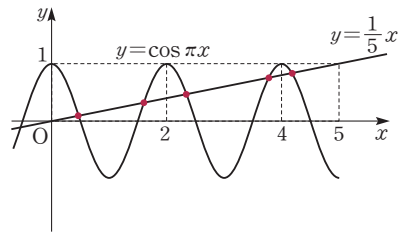
01 ② **02** ③ **03** ⑤ **04** $\frac{\pi}{6}$

01

해결전략 | 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{5}x$ 의 교점의 개수를 구한다.

방정식 $\cos \pi x = \frac{1}{5}x$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수는

$x > 0$ 일 때, 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{5}x$ 의 교점의 개수와 같다.



위의 그림에서 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{5}x$ 의

교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식 $\cos \pi x = \frac{1}{5}x$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수는 5이다.

02

해결전략 | 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하여 주어진 직선의 방정식에 대입한다.

STEP1 포물선의 꼭짓점의 좌표 구하기

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \cos \theta - \sin^2 \theta \\ &= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (x - \cos \theta)^2 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (x - \cos \theta)^2 - 1 \end{aligned}$$

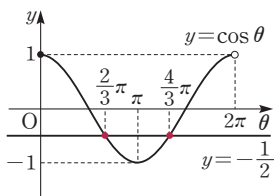
이때 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(\cos \theta, -1)$ 이다.

STEP2 모든 θ 의 값의 합 구하기

꼭짓점 $(\cos \theta, -1)$ 이 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$-1 = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 함수
 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직
 선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 θ
 좌표는 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 이므로



$$\theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 구하는 모든 θ 의 값들의 합은

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$$

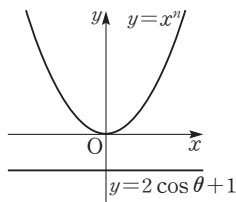
03

해결전략 | 각 조건에 맞는 실근의 개수를 구한다.

STEP1 a 의 값 구하기

조건 (가)에서 $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$ 일 때, $2\cos \theta + 1 < 0$ 이고 n

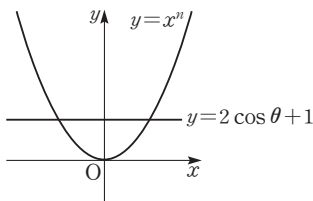
이 짝수이므로 근이 존재하지 않는다. $\therefore a = 0$



STEP2 b 의 값 구하기

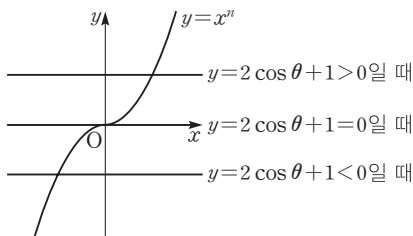
조건 (나)에서 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 일 때, $2\cos \theta + 1 > 0$ 이고 n

이 짝수이므로 서로 다른 두 실근이 존재한다. $\therefore b = 2$



STEP3 c 의 값 구하기

조건 (다)에서 n 이 홀수이므로 $2\cos \theta + 1$ 의 부호에 상관
 없이 항상 한 개의 실근이 존재한다. $\therefore c = 1$



STEP4 $a + 2b + 3c$ 의 값 구하기

$$\therefore a + 2b + 3c = 0 + 4 + 3 = 7$$

04

해결전략 | 삼각형의 결정 조건과 둔각삼각형이 되기 위한 조
 건을 이용하여 부등식을 세운다.

STEP1 삼각형의 결정 조건을 이용하여 부등식 세우기

$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{에서 } 0 < \cos x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $0 < 2\cos x < 2$ 이고, 삼각형 ABC의 세 변의 길이가
 1, 2, $2\cos x$ 이므로 가장 긴 변의 길이는 2이다.

삼각형의 결정 조건에 의하여

(가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)

$$2 < 1 + 2\cos x$$

$$\therefore \cos x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

STEP2 둔각삼각형이 되기 위한 조건을 이용하여 부등식 세우
 기

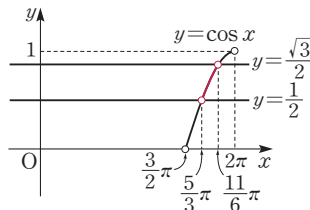
삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되려면

$$1^2 + (2\cos x)^2 < 2^2 \text{에서 } 4\cos^2 x < 3$$

$$\cos^2 x < \frac{3}{4} \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

STEP3 $\beta - \alpha$ 의 값 구하기

$$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C} \text{에서 } \frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 위의 그림

과 같으므로 x 의 값의 범위는

$$\frac{5}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{3}\pi, \beta = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$$



삼각함수의 활용

개념확인

262~263쪽

01 답 2√2

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, b \sin 30^\circ = 2 \sin 45^\circ$$

$$\therefore b = 2 \sin 45^\circ \times \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

02 답 3√2

외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ 이므로 } \frac{6}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{3}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$$

03 답 2√21

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos 60^\circ \\ &= 64 + 100 - 80 = 84 \end{aligned}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 2\sqrt{21}$

04 답 60°

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 60^\circ$$

05 답 (1) 3 (2) 8√2

$$(1) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$(2) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

06 답 (1) 12√3 (2) 3/2

$$(1) \square ABCD = 4 \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$= 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$(2) \square ABCD = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

필수유형 01

265쪽

01-1 답 (1) 4√3 (2) 75°

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이와 A 의 크기를 구한다. 또, 삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 임을 이용하여 C 의 크기를 구한다.

(1) 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이다.

(2) **STEP1** A 의 크기 구하기

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{12}{\sin A} = \frac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} \text{ 이므로}$$

$$4\sqrt{6} \sin A = 12 \sin 45^\circ$$

$$\sin A = 12 \sin 45^\circ \times \frac{1}{4\sqrt{6}} = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

STEP2 C 의 크기 구하기 → 삼각형 ABC 는 예각삼각형

$$A + B + C = 180^\circ \text{ 이므로}$$

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

01-2 답 21

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15$$

$$\therefore \overline{AC} = 30 \sin B = 30 \times \frac{7}{10} = 21$$

01-3 답 12π

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 외접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

STEP2 외접원의 넓이 구하기

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

01-4 답 $\sqrt{2}$

해결전략 | 외접원의 반지름의 길이를 R 로 놓고 사인법칙을 이용하여 $\sin A, \sin B, \sin C$ 를 R 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\sin A, \sin B, \sin C$ 에 대한 식 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

STEP2 $\sin A + \sin B + \sin C$ 의 값 구하기

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 12이므로

$$a + b + c = 12$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ &= \frac{a+b+c}{2R} \\ &= \frac{12}{2 \times 3\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

01-5 답 8

해결전략 | 원주각의 성질을 이용하여 $\angle BAC$ 의 크기를 구한 후 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용한다.

STEP1 $\angle BAC$ 의 크기 구하기

$\widehat{BC}$ 에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle BAC = \angle BDC = 45^\circ$

STEP2 $\overline{AB}$ 의 길이 구하기

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = \frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\overline{AB} \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 8$$

● → 다른 풀이

STEP1 외접원의 반지름의 길이 구하기

주어진 원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R$

$$\therefore R = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 8$$

STEP2 $\overline{AB}$ 의 길이 구하기

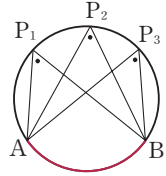
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} &= 2 \times 8 \\ \therefore \overline{AB} &= 16 \times \frac{1}{2} = 8 \end{aligned}$$

풍뎡의 비법

한 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle AP_1B \\ &= \angle AP_2B \\ &= \angle AP_3B \end{aligned}$$



01-6 답 $\frac{9}{5}$

해결전략 | 네 점 A, Q, P, R가 한 원 위의 점임을 이용한다.

STEP1 $\frac{\overline{QR}}{\sin A}$ 의 값 구하기

$\overline{AQ} \perp \overline{PQ}$, $\overline{AR} \perp \overline{PR}$ 이므로 네 점 A, Q, P, R는 한 원 위의 점이다. 즉, 선분 AP는 삼각형 AQR의 외접원의 지름이다.

삼각형 AQR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin A} = \overline{AP} = 3$$

$$\therefore \overline{QR} = 3 \sin A$$

..... ㉠

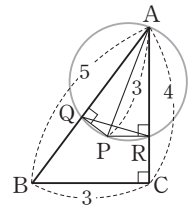
STEP2 $\overline{QR}$ 의 길이 구하기

직각삼각형 ABC에서

$$\sin A = \frac{3}{5}$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$\overline{QR} = 3 \sin A = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$



필수유형 01

267쪽

02-1 답 4 : 10 : 5

해결전략 | $a : b : c$ 를 이용하여 ab, bc, ca 를 한 문자에 대한 식으로 나타내어 본다.

STEP1 $a : b : c$ 구하기

사인법칙의 변형에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$$

STEP2 $ab : bc : ca$ 구하기

$a = 2k, b = 4k, c = 5k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$ab = 2k \times 4k = 8k^2$$

$$bc=4k \times 5k=20k^2$$

$$ca=5k \times 2k=10k^2$$

$$\therefore ab : bc : ca = 8k^2 : 20k^2 : 10k^2 \\ = 4 : 10 : 5$$

▶참고 비례식은 가장 간단한 수의 비로 나타내기로 한다.

02-2 ㉡ 1 : √3 : 2

해결전략 | 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 세 내각의 크기를 구한다.

STEP1 A, B, C 의 크기 구하기

$A+B+C=180^\circ$ 이고, $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ$$

$$B=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ$$

STEP2 $a:b:c$ 구하기

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C \\ = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ \\ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

02-3 ㉡ 6 : 3 : 5

해결전략 | 삼각형의 내각의 크기의 합은 π 임을 이용한다.

STEP1 $\sin A : \sin B : \sin C$ 구하기

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$$

$$= \sin(\pi-C) : \sin(\pi-A) : \sin(\pi-B)$$

$$= \sin C : \sin A : \sin B$$

$$= c : a : b$$

$$= 5 : 6 : 3$$

STEP2 $a:b:c$ 구하기

$$\therefore a:b:c=6:3:5$$

→ a, b, c 의 순서에 주의한다.

02-4 ㉡ 1 : 2 : 3

해결전략 | $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{4} = k$ 로 놓고 a, b, c 를 k

에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $a+b+c$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기

$$\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{4} = k \quad (k>0) \text{로 놓으면}$$

$$a+b=3k, \quad b+c=5k, \quad c+a=4k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c)=12k$$

$$\therefore a+b+c=6k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 $\sin A : \sin B : \sin C$ 구하기

①에서 ②의 각 식을 빼면

$$a=k, \quad b=2k, \quad c=3k$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \\ = 1 : 2 : 3$$

02-5 ㉡ $\frac{7}{5}$

해결전략 | 주어진 두 식을 연립하여 a, b 를 c 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a, b 를 c 에 대한 식으로 나타내기

$$a+b-2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a-3b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } 4b-3c=0 \quad \therefore b=\frac{3}{4}c$$

$$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \text{을 하면 } 4a-5c=0 \quad \therefore a=\frac{5}{4}c$$

STEP2 $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$ 의 값 구하기

따라서 $a:b:c = \frac{5}{4}c : \frac{3}{4}c : c = 5:3:4$ 이고

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 5 : 3 : 4$ 이므로

$\sin A=5k, \sin B=3k, \sin C=4k \quad (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{3k+4k}{5k} = \frac{7}{5}$$

02-6 ㉡ 15 : 9 : 5

해결전략 | 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 $a:b:c$ 를 구한다.

STEP1 $a:b:c$ 구하기

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$\frac{1}{2} \times a \times h_1 = \frac{1}{2} \times b \times h_2 = \frac{1}{2} \times c \times h_3 = S$$

$$\therefore a:b:c = \frac{2S}{h_1} : \frac{2S}{h_2} : \frac{2S}{h_3} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} \\ = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{9} \quad \leftarrow 45 \text{를 곱한다.} \\ = 15 : 9 : 5$$

STEP2 $\sin A : \sin B : \sin C$ 구하기

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \\ = 15 : 9 : 5$$

03-1 답 $40\sqrt{6}$ m

해결전략 | 삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 임을 이용하여 C의 크기를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

STEP1 C의 크기 구하기

$$A+B+C=180^\circ \text{이므로}$$

$$C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

STEP2 두 지점 A, C 사이의 거리 구하기

이때 $\overline{AB}=120$ m이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{120}{\sin 60^\circ}$$

$$\overline{AC} \sin 60^\circ = 120 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} = 120 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $40\sqrt{6}$ m이다.

03-2 답 $18\pi \text{ km}^2$

해결전략 | 호수의 반지름의 길이를 R km로 놓고 사인법칙을 이용한다.

STEP1 호수의 반지름의 길이 구하기

호수의 반지름의 길이를 R km

라고 하면 사인법칙에 의하여

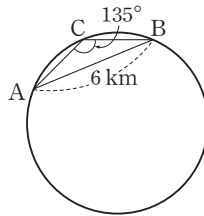
$$\frac{6}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{3}{\sin 135^\circ} = 3\sqrt{2}$$

STEP2 호수의 넓이 구하기

따라서 호수의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ km이므로 호수의 넓이는

$$\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 18\pi \text{ (km}^2\text{)}$$

03-3 답 $(16+16\sqrt{3})$ m

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한 다음 애드벌룬의 높이를 구한다.

STEP1 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

애드벌룬의 C 지점에서

$\overline{AB}$ 의 연장선에 내린 수

선의 발을 H라 하고 애드

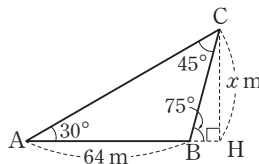
벌룬의 높이를

$\overline{CH}=x$ m라고 하면

삼각형 ABC에서

$$\angle ACB = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{64}{\sin 45^\circ}, \overline{BC} \sin 45^\circ = 64 \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 64 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 32\sqrt{2} \text{ (m)}$$

STEP2 애드벌룬의 높이 구하기

삼각형 BHC에서 $\angle BCH = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

$$\therefore x = \overline{BC} \sin 75^\circ = 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = 16 + 16\sqrt{3} \text{ (m)}$$

따라서 애드벌룬의 높이는 $(16 + 16\sqrt{3})$ m이다.

03-4 답 $10\sqrt{2}$ m

해결전략 | 선분 AQ의 길이를 구한 후 직각삼각형 PQA에서 선분 PQ의 길이를 구한다.

STEP1 $\overline{AQ}$ 의 길이 구하기

$\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$ 이므로

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{30}{\sin 60^\circ}$$

$$\overline{AQ} \sin 60^\circ = 30 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AQ} = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

STEP2 나무의 높이 구하기

직각삼각형 PQA에서

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} \tan 30^\circ = 10\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{2} \text{ (m)}$$

따라서 나무의 높이는 $10\sqrt{2}$ m이다.

04-1 답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 에 대입하면

$$\frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

04-2 답 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

$A+B+C=180^\circ$ 이므로 $\rightarrow$ 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이다.
 $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$

$a \sin A + b \sin B = c \sin(A+B)$ 에서

$$a \sin A + b \sin B = c \sin C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R} \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

04-3 $\textcircled{B}$ $a=c$ 인 이등변삼각형

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

STEP1 주어진 식 변형하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 $c \sin C - a \sin A = (c-a) \sin B$ 에 대입하면

$$c \times \frac{c}{2R} - a \times \frac{a}{2R} = (c-a) \times \frac{b}{2R}$$

$$c^2 - a^2 = (c-a)b$$

$$(c-a)(c+a) - (c-a)b = 0$$

$$\therefore (c-a)\{(c+a)-b\} = 0$$

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

그런데 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로 $\rightarrow c+a > b$ 이므로 $(c+a)-b > 0$

$$(c+a)-b > 0 \quad \therefore a=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

04-4 $\textcircled{B}$ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

STEP1 주어진 식의 좌변을 간단히 하기

$$A+B+C=180^\circ \text{이므로}$$

$$\cos^2(A+B) + (\sin A + \cos B)(\sin A - \cos B)$$

$$= \cos^2(180^\circ - C) + (\sin^2 A - \cos^2 B)$$

$$= \cos^2 C + \sin^2 A - \cos^2 B$$

$$= (1 - \sin^2 C) + \sin^2 A - (1 - \sin^2 B)$$

$$= -\sin^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B$$

$$\therefore -\sin^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B = 0$$

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 $-\sin^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B = 0$ 에 대입하면

$$-\left(\frac{c}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

04-5 $\textcircled{B}$ $4\sqrt{3}$

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구하여 삼각형의 모양을 판별한다.

STEP1 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 $a \sin A = b \sin B = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$\therefore a^2 = b^2 = c^2$$

$$a, b, c \text{는 양수이므로 } a=b=c$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

STEP2 삼각형의 넓이 구하기

이때 삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4이므로

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

04-6 $\textcircled{B}$ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 이차함수와 직선의 식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용하여 식을 세운다.

STEP1 삼각함수에 대한 식 구하기

이차함수

$$y = (\cos A + \cos C)x^2 - x \sin B + (\cos A - \cos C) \text{의}$$

그래프와 직선 $y = x \sin B$ 가 접하므로 이차방정식

$$(\cos A + \cos C)x^2 - x \sin B + (\cos A - \cos C) = x \sin B, \text{ 즉}$$

$$(\cos A + \cos C)x^2 - 2x \sin B + (\cos A - \cos C) = 0$$

$$(\cos A + \cos C)x^2 - 2x \sin B + (\cos A - \cos C) = 0$$

이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (-\sin B)^2 - (\cos A + \cos C)(\cos A - \cos C) \\ &= \sin^2 B - \cos^2 A + \cos^2 C \\ &= \sin^2 B - (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 C) \\ &= \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C\end{aligned}$$

이므로

$$\sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C = 0 \quad \dots\dots ㉑$$

STEP 2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2 &= 0 \\ \therefore a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

필수유형 05

273쪽

05-1 ㉑ 4

해결전략 | $\overline{AC}=x$ 로 놓고 코사인법칙을 이용한다.

$\overline{AC}=x$ 라고 하면 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 120^\circ$$

$$28 = 4 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

따라서 $\overline{AC}$ 의 길이는 4이다.

05-2 ㉑ $\sqrt{21}$

해결전략 | $\overline{AB}=a, \overline{BC}=2a$ ($a>0$)로 놓고 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP 1 $\overline{AC}^2$ 의 값 구하기

사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $B+D=180^\circ$

$$\therefore D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 63 \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

STEP 2 $\overline{AB}=a, \overline{BC}=2a$ 로 놓고 a 의 값 구하기

$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{AB}=a, \overline{BC}=2a$ ($a>0$)로

놓으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \cos 60^\circ \\ &= a^2 + 4a^2 - 2 \times a \times 2a \times \frac{1}{2} = 3a^2 \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉑, ㉒이 같아야 하므로

$$63 = 3a^2, a^2 = 21$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=\sqrt{21}$

$$\therefore \overline{AB}=a=\sqrt{21}$$

05-3 ㉑ π

해결전략 | 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$ 의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP 1 $\overline{AB}$ 의 길이 구하기

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ \\ &= 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{3} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

STEP 2 외접원의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = 1$$

따라서 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

▶참고 삼각형 ABC가 원에 내접하므로 $A=90^\circ$ 이다. 이때 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ 임을 구할 수도 있다.

05-4 ㉑ $\frac{45}{2}$

해결전략 | $\overline{CP}=x$ 로 놓고 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BP}^2$ 을 x 에 대한 식으로 나타낸다.

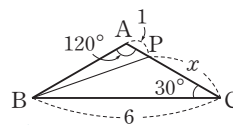
STEP 1 C의 크기 구하기

오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형

ABC에서 $A=120^\circ$ 이므로

$$C=30^\circ \quad \rightarrow B=C=\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$$



STEP 2 $\overline{CP}=x$ 로 놓고 $\overline{BP}^2$ 을 x 에 대한 식으로 나타내기

$\overline{CP}=x$ 라고 하면 삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= x^2 + 6^2 - 2 \times x \times 6 \times \cos 30^\circ \\ &= x^2 - 6\sqrt{3}x + 36\end{aligned}$$

STEP3 $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 - 6\sqrt{3}x + 36) + x^2 \\ &= 2x^2 - 6\sqrt{3}x + 36 \\ &= 2\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{45}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{45}{2}$ 이다.

05-5 ㉮ 15

해결전략 | $\angle BCE$ 의 크기를 θ 에 대한 식으로 나타낸 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{DG}$, $\overline{BE}$ 의 길이를 각각 $\cos \theta$ 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\cos^2 \theta$ 의 값 구하기

삼각형 DCG에서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

STEP2 $\overline{DG} \times \overline{BE}$ 의 값 구하기

$\angle DCG = \theta$ 이고 $\angle BCD = \angle ECG = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle BCE = \pi - \theta$$

삼각형 DCG에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{DG}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 25 - 24 \cos \theta\end{aligned}$$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BE}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos (\pi - \theta) \\ &= 25 - 24 \cos (\pi - \theta) \\ &= 25 + 24 \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{DG} \times \overline{BE} &= \sqrt{25 - 24 \cos \theta} \sqrt{25 + 24 \cos \theta} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2 \times \frac{25}{36}} \\ &= \sqrt{25\left(25 - \frac{24^2}{36}\right)} \\ &= 5\sqrt{25 - 16} \\ &= 5 \times 3 = 15\end{aligned}$$

필수유형 06

275쪽

06-1 ㉮ $\frac{3}{5}$

해결전략 | 삼각형 AEF에서 코사인법칙의 변형을 이용한다.

STEP1 선분의 길이 구하기

$$\overline{BE} = \overline{FD} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{EC} = \overline{CF} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{EF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값 구하기

삼각형 AEF에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{10 + 10 - 8}{20} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

06-2 ㉮ 120°

해결전략 | 가장 큰 각의 대변의 길이를 찾아 코사인법칙의 변형을 이용한다.

STEP1 가장 큰 각의 코사인의 값 구하기

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 세 내각 중 가장 크므로 가장 큰 각의 크기를 θ 라고 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

STEP2 θ 의 값 구하기

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

06-3 ㉮ 90°

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 변의 길이의 비를 구한 후 이것을 코사인법칙에 대입한다.

STEP1 $a : b : c$ 구하기

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$a : b : c = 3 : 4 : 5$$

STEP2 C 의 크기 구하기

$a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (4k)^2 - (5k)^2}{2 \times 3k \times 4k} = 0$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 90^\circ$

06-4 ㉮ $\sqrt{6}$

해결전략 | 삼각형 ABD에서 $\cos B$ 의 값을 구한 후 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 $\cos B$ 의 값 구하기

삼각형 ABD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{7}{8}$$

STEP2 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos B \\ &= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{7}{8} = 6\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{6} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

06-5 ㉮ 41

해결전략 | 코사인법칙을 이용하여 $\cos(\angle BAD)$ 의 값을 구한 후 삼각형 ABC에서 다시 코사인법칙을 적용한다.

STEP1 $\cos(\angle BAD)$ 의 값 구하기

삼각형 ABD에서 $\angle BAD = \theta$ 로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos \theta = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{19}{24}$$

STEP2 k^2 의 값 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}k^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos \theta \\ &= 36 + 100 - 120 \times \frac{19}{24} \\ &= 41\end{aligned}$$

06-6 ㉮ $\frac{3}{5}$

해결전략 | 직선 $x=3$ 이 주어진 두 직선과 만나는 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들어 생각한다.

STEP1 선분의 길이 구하기

직선 $x=3$ 이 두 직선 $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$ 와 만나는 두 점을

각각 A, B라고 하면

A(3, 9), B(3, 1)

이때 원점 O에 대하여

$$\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{AB} = 9 - 1 = 8$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값 구하기

따라서 삼각형 OAB에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}} \\ &= \frac{(3\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 8^2}{2 \times 3\sqrt{10} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

→ y축에 평행한 직선을 그려 주어진 두 직선과의 교점을 이용한다.

필수유형 07

277쪽

07-1 ㉮ 70 m

해결전략 | 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AB의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos 120^\circ \\ &= 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 4900\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 70 \text{ m} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 70 m이다.

07-2 ㉮ $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

해결전략 | 두 선분 BC, AC의 길이를 구하여 코사인법칙의 변형을 이용한다.

STEP1 두 선분 AC, BC의 길이 구하기

삼각형 ACD가 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \overline{DC} = 30 \text{ (m)}$$

삼각형 BCD에서 $\angle DBC = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{\tan 60^\circ} = 30 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ (m)}$$

STEP2 $\cos \theta$ 의 값 구하기

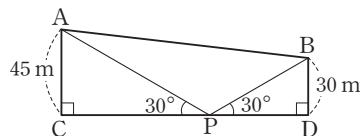
따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{BC}} = \frac{30^2 + (10\sqrt{3})^2 - 40^2}{2 \times 30 \times 10\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

07-3 ㉮ $30\sqrt{19} \text{ m}$

해결전략 | 삼각함수의 정의를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ 의 길이를 구한 후 삼각형 APB에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 두 선분 AP, BP의 길이 구하기



직각삼각형 ACP에서

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} = 45 \times 2 = 90 \text{ (m)}$$

직각삼각형 BPD에서

$$\overline{BP} = \frac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ} = 30 \times 2 = 60 \text{ (m)}$$

STEP2 두 지점 A, B 사이의 거리 구하기

삼각형 APB에서

$$\angle APB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 90^2 + 60^2 - 2 \times 90 \times 60 \times \cos 120^\circ \\ &= 8100 + 3600 - 2 \times 90 \times 60 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 17100\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 30\sqrt{19} \text{ (m)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $30\sqrt{19}$ m이다.

07-4 답 $15\sqrt{21}$ m

해결전략 | 삼각함수의 정의를 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ 의 길이를 구한 후 삼각형 ADC에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 두 선분 AC, AD의 길이 구하기

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = 90 \tan 30^\circ = 90 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3} \text{ (m)}$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ \text{ 이므로}$$

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{AD} = 90 \sin 60^\circ = 90 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3} \text{ (m)}$$

STEP2 두 지점 C, D 사이의 거리 구하기

$$\angle CAD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

이므로 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2 &= (30\sqrt{3})^2 + (45\sqrt{3})^2 - 2 \times 30\sqrt{3} \times 45\sqrt{3} \times \cos 60^\circ \\ &= 2700 + 6075 - 2 \times 30\sqrt{3} \times 45\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= 4725\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CD} = 15\sqrt{21} \text{ (m)} \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $15\sqrt{21}$ m이다.

07-5 답 $\frac{11}{8}$ km

해결전략 | $\overline{BC} = x$ km로 놓고 선분 AC의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낸 후 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 [코스 2]의 전체 길이 구하기

[코스 1]의 길이가 $3+6=9$ (km)이므로 산책하는데 걸리는 시간은 $\frac{3+6}{3}=3$ (시간)

[코스 2]로 산책하는데 걸리는 시간은 2시간 50분, 즉 $\frac{17}{6}$ 시간이므로 [코스 2]의 전체 길이를 a km라고 하면

$$\frac{a}{3} = \frac{17}{6} \quad \therefore a = \frac{17}{2}$$

STEP2 $\overline{BC} = x$ km로 놓고, $\overline{AC}$ 의 길이를 x 에 대한 식으로

나타내기

$\overline{BC} = x$ km라고 하면 $\overline{CD} = (6-x)$ km이므로

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \frac{17}{2} \text{ 에서}$$

$$\overline{AC} = \frac{17}{2} - \overline{CD} = \frac{17}{2} - (6-x) = \frac{5}{2} + x \text{ (m)}$$

STEP3 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{5}{2} + x\right)^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos 120^\circ$$

$$\frac{25}{4} + 5x + x^2 = 9 + x^2 + 3x$$

$$2x = \frac{11}{4} \quad \therefore x = \frac{11}{8}$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이는 $\frac{11}{8}$ km이다.

필수유형 08

279쪽

08-1 답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

위의 식을 $a \cos B = b \cos A + c$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + c$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2$$

$$2a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

08-2 답 $b=c$ 인 이등변삼각형

해결전략 | 삼각형의 내각의 크기의 합이 π 임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로 $A+B=\pi-C$

$$\begin{aligned}\therefore \sin\left(\frac{A+B-C}{2}\right) &= \sin\frac{\pi-2C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right) \\ &= \cos C\end{aligned}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\sin A = 2 \cos C \sin B$$

..... ㉠

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②을 ③에 대입하면

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \times \frac{b}{2R}$$

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2, b^2 = c^2$$

b, c 는 양수이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

🔗 풀법의 비법

삼각형 ABC의 세 내각 A, B, C 에 대한 관계식이 주어질 때

(1) 사인에 대한 식

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{임을}$$

이용하여 a, b, c 에 대한 식으로 나타낸다.

(단, R 는 외접원의 반지름의 길이이다.)

(2) 코사인에 대한 식

$\Rightarrow$ 코사인법칙을 이용하여 a, b, c 에 대한 식으로 나타낸다.

08-3 📐 $a=c$ 인 이등변삼각형

해결전략 | 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

STEP1 주어진 식 간단히 하기

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B, \sin(\pi - C) = \sin C$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\sin B = 2 \sin C \cos A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②을 ③에 대입하면

$$\frac{b}{2R} = 2 \times \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = b^2 + c^2 - a^2, a^2 = c^2$$

a, c 는 양수이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

08-4 📐 80°

해결전략 | 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

STEP1 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 $2 \sin A \cos B = \sin A - \sin B + \sin C$ 에 대입하면

$$2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a}{2R} - \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = ac - bc + c^2$$

$$a^2 - b^2 - ac + bc = 0, (a-b)(a+b-c) = 0$$

이때 삼각형의 결정조건에 의하여 $a+b-c > 0$ 이므로

$a-b=0 \rightarrow$ 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$$\therefore a=b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

STEP2 B의 크기 구하기

삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이므로

$$B=A=80^\circ$$

08-5 📐 $\triangle, \triangle$

해결전략 | $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$ 임을 이용하여 주어진 식을 정리한 후 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용한다.

여 주어진 식을 정리한 후 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용한다.

STEP1 주어진 식 정리하기

$$a^2 \tan B = b^2 \tan A \text{에서 } a^2 \times \frac{\sin B}{\cos B} = b^2 \times \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\therefore a^2 \sin B \cos A = b^2 \sin A \cos B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \dots\dots \textcircled{B}$$

㉔, ㉕을 ㉔에 대입하면

$$a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$$

$$a^4 - b^4 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a + b)(a - b) = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \text{ 또는 } a = b (\because a + b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 또는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

08-6 ㉔ $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해결전략 | 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 변 a, b, c 사이의 관계를 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \dots\dots \textcircled{1}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 } \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \cos B + \cos C \text{에 대입하면}$$

$$\frac{\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b + c = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

$$2bc(b + c) = b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$b^3 + b^2c + c^3 + bc^2 - a^2b - a^2c = 0$$

$$b^2(b + c) + c^2(b + c) - a^2(b + c) = 0$$

$$\therefore (b + c)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$$

$$\text{그런데 } b + c > 0 \text{이므로 } b^2 + c^2 - a^2 = 0 \quad \therefore b^2 + c^2 = a^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

필수유형 09

281쪽

09-1 ㉔ $3\sqrt{3}$

해결전략 | 변 BC의 길이를 구하여 삼각형의 넓이를 구한다.

STEP1 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

$\overline{BC} = x$ 라고 하면 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 4 (\because x > 0)$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이 구하기

즉, $\overline{BC} = 4$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

09-2 ㉔ $-\frac{\sqrt{11}}{6}$

해결전략 | 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 의 길이와 넓이가 주어진다면 $\sin B$ 의 값을 구할 수 있다.

STEP1 $\sin B$ 의 값 구하기

삼각형 ABC의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin B = 5 \quad \therefore \sin B = \frac{5}{6}$$

STEP2 $\cos B$ 의 값 구하기

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

$$\therefore \cos B = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

그런데 $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ 에서 $-1 < \cos B < 0$ 이므로

$$\cos B = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

09-3 ㉔ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

해결전략 | 삼각형 ABC의 넓이를 $\sin \theta$ 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 삼각형 ABC의 넓이를 $\sin \theta$ 에 대한 식으로 나타내기

$\overline{AB} = 2, \overline{AC} = \sqrt{7}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin \theta = \sqrt{7} \sin \theta$$

STEP2 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값 구하기

즉, $\sqrt{7} \sin \theta = \sqrt{6}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

이때 $\angle A$ 는 예각이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

09-4 답 $25(3+\sqrt{3})$

해결전략 호의 길이의 비는 중심각의 크기의 비와 같음을 이용하여 중심각의 크기를 구한다.

STEP1 $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ 의 크기 구하기

$$\begin{aligned}\angle AOB : \angle BOC : \angle COA &= \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} \\ &= 4 : 3 : 5\end{aligned}$$

이므로

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \\ &\quad \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \\ &= 25(3 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

09-5 답 $\frac{48\sqrt{3}}{7}$

해결전략 $\widehat{AD}=x$ 라 하고 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 임을 이용한다.

$\widehat{AD}=x$ 라고 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times x \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 16 \times x \times \sin 30^\circ \\ 48\sqrt{3} &= 3x + 4x, \quad 7x = 48\sqrt{3} \\ \therefore x &= \frac{48\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

● → 다른 풀이

$\widehat{BD} : \widehat{CD} = \widehat{AB} : \widehat{AC} = 12 : 16 = 3 : 4$ 이므로

$$\widehat{BD} = \frac{3}{7} \widehat{BC}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABD &= \frac{3}{7} \triangle ABC \\ &= \frac{3}{7} \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \sin 60^\circ \right) \\ &= \frac{144\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

$\widehat{AD}=x$ 라고 하면

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 12 \times x \times \sin 30^\circ = 3x$$

$$\text{이므로 } 3x = \frac{144\sqrt{3}}{7}$$

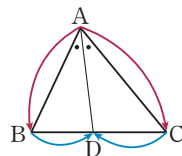
$$\therefore x = \frac{48\sqrt{3}}{7}$$

◎ 풍선의 비법

각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 $\widehat{BC}$ 와 만나는 점을 D라고 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

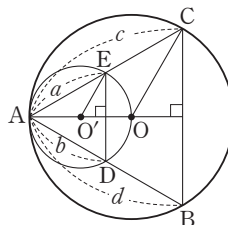


09-6 답 4

해결전략 두 삼각형 AO'E와 AOC가 서로 닮음임을 이용하여 선분의 길이 사이의 관계를 구한다.

STEP1 선분의 길이 사이의 관계 구하기

$\overline{AE}=a, \overline{AD}=b, \overline{AC}=c, \overline{AB}=d$ 라 하고 다음 그림과 같이 두 원이 만나는 점 A에서 선분 ED, CB에 수선을 그으면 그 수선은 두 원의 중심 O, O'을 지나므로 세 점 A, O, O'은 한 직선 위에 있다.



$\triangle AO'E$ 와 $\triangle AOC$ 가 각각 이등변삼각형이고

$\angle AEO' = \angle ACO$ 이므로 $\triangle AO'E$ 와 $\triangle AOC$ 는 닮음이다.

이때 닮음비는

$$\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AO'} : \overline{AO} = 1 : 2$$

이므로 $c = 2a, d = 2b$

STEP2 $\frac{S_2}{S_1}$ 의 값 구하기

$$S_2 = \triangle ABC = \frac{1}{2} cd \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 2a \times 2b \times \sin A$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2} ab \sin A \right)$$

$$= 4 \triangle ADE = 4S_1$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = 4$$

10-1 $\frac{160}{3}\pi$

해결전략 | 삼각형의 넓이를 이용하여 외접원과 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 삼각형 ABC의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$$

STEP2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{이므로}$$

$$14\sqrt{3} = \frac{13 \times 8 \times 7}{4R}$$

$$\therefore R = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

STEP3 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{이므로}$$

$$14\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(13+8+7)$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

STEP4 $S_1 - S_2$ 의 값 구하기

따라서

$$S_1 = \pi R^2 = \pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{169}{3}\pi,$$

$$S_2 = \pi r^2 = \pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

이므로

$$S_1 - S_2 = \frac{169}{3}\pi - 3\pi = \frac{160}{3}\pi$$

10-2 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

해결전략 | 삼각형의 넓이를 이용하여 외접원과 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 삼각형 ABC의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$$

STEP2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{이므로}$$

$$8\sqrt{2} = \frac{6 \times 6 \times 4}{4R}$$

$$\therefore R = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

STEP3 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{이므로}$$

$$8\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(6+6+4)$$

$$\therefore r = \sqrt{2}$$

STEP4 $R - r$ 의 값 구하기

$$\therefore R - r = \frac{9\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

10-3 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

해결전략 | 삼각형의 넓이를 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구한 후 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 $\sin B$ 의 값 구하기

삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin B = 4\sqrt{6}$$

$$\therefore \sin B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

STEP2 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

$90^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = -\frac{1}{5}$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos B \\ &= 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 49 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 7 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

STEP3 내접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{이므로}$$

$$4\sqrt{6} = \frac{1}{2}r(4+5+7)$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

10-4 $4\sqrt{3}$

해결전략 | 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 할 때, $\triangle ABC = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ 임을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

STEP1 B, C 의 크기 구하기

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$B=A=30^\circ$$

$$\therefore C=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= 2 \times 4^2 \times \sin 30^\circ \times \sin 30^\circ \times \sin 120^\circ \\ &= 2 \times 16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

10-5 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

해결전략 | 삼각형의 넓이는 일정함을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

삼각형 ABC의 넓이를 S , 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{이므로}$$

$$\frac{6 \times 10 \times 14}{4R} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (6+10+14)$$

$$\frac{210}{R} = 15\sqrt{3}$$

$$\therefore R = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

10-6 2

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 사인함수에 대한 식으로 나타내어 본다.

STEP1 $a+b+c$ 를 사인함수에 대한 식으로 나타내기

$$\triangle ABC = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{이므로}$$

$$a=2R \sin A, b=2R \sin B, c=2R \sin C$$

$$\therefore a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이를 사인함수에 대한 식으로 나타내기

$\triangle ABC$ 의 내접원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{2}r \times 2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$= Rr(\sin A+\sin B+\sin C) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 상수 k 의 값 구하기

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{2R^2}{Rr} = \frac{2R}{r}$$

$$\therefore k=2$$

필수유형 11

285쪽

11-1 $3\sqrt{3}$

해결전략 | 선분 BC의 길이를 구한 후 평행사변형의 넓이 공식을 이용한다.

STEP1 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

$\overline{BC}=x$ 라고 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$7 = 4 + x^2 - 2x, x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=3 (\because x>0)$$

STEP2 평행사변형 ABCD의 넓이 구하기

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

11-2 100

해결전략 | 사각형의 넓이 공식을 이용하여 ab 의 값을 구한 후 곱셈 공식을 이용한다.

STEP1 ab 의 값 구하기

사각형 ABCD의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}ab \sin 30^\circ = 12, \frac{1}{4}ab = 12$$

$$\therefore ab=48$$

STEP2 a^2+b^2 의 값 구하기

이때 $a+b=14$ 이므로

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=14^2-2 \times 48=100$$

11-3 $9\sqrt{2}$

해결전략 | $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 $\sin \theta$ 의 값을 구한다.

STEP1 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

STEP2 사각형 ABCD의 넓이 구하기

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times 3 \times 9 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2}$$

11-4 6

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 사각형 ABCD의 넓이를 선분 AC에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 사각형 ABCD의 넓이를 식으로 나타내기

조건 (가)에 의하여 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} \quad \leftarrow \text{등변사다리꼴 ABCD의 두 대각선은 } \overline{AC}, \overline{BD}$$

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \overline{AC}^2 \end{aligned}$$

STEP2 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

조건 (다)에서 사각형 ABCD의 넓이가 $9\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \times \overline{AC}^2 = 9\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}^2 = 36 \quad \therefore \overline{AC} = 6 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

11-5 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

해결전략 | 코사인법칙을 이용하여 C의 크기를 구한 후 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합으로 사각형 ABCD의 넓이를 구한다.

STEP1 $\overline{BD}$ 의 길이 구하기

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 25 + 9 + 15 = 49 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 7 \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

STEP2 C의 크기 구하기

삼각형 BCD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore C = 60^\circ \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

STEP3 사각형 ABCD의 넓이 구하기

사각형 ABCD의 넓이를 S,

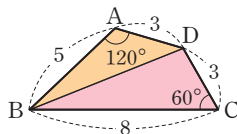
두 삼각형 ABD, BCD의 넓

이를 각각 S_1, S_2 라고 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin 60^\circ$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$



따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$S = S_1 + S_2 = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

11-6 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

해결전략 | 두 삼각형 ABC, ACP의 넓이를 각각 구하여 사각형 ABCP의 넓이를 구한다.

STEP1 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

오른쪽 그림과 같이 원의 중심

을 O라고 하면 삼각형 OAC

에서

$$\angle AOC = \frac{2}{3}\pi$$

두 점 A, C는 원을
6등분한 점이므로

$$\angle AOC = 2\pi \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 9 + 9 - 2 \times 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 27 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

STEP2 삼각형 ACP의 넓이 구하기

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의

$\frac{1}{2}$ 이므로 호 AC에 대하여

$$\angle APC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

$\overline{AP} = a, \overline{CP} = b$ 라고 하면 삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3}$$

$$27 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 + b^2 - ab = 27$$

$$\therefore (a+b)^2 - 3ab = 27$$

$$a+b=8 \text{이므로}$$

$$8^2 - 3ab = 27 \quad \therefore ab = \frac{37}{3}$$

$$\therefore \triangle ACP = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{37}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{12}$$

STEP3 삼각형 ABC의 넓이 구하기

두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = 3 \quad \rightarrow \overline{OB} = \overline{OC} \text{이고 } \angle BOC = 2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{이므로 } \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle OAC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

STEP 4 사각형 ABCP의 넓이 구하기

따라서 사각형 ABCP의 넓이는

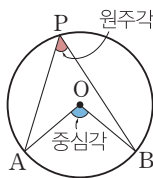
$$\triangle ABC + \triangle ACP = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{37\sqrt{3}}{12} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

🔗 뚱뚱의 비법

원주각과 중심각

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\Rightarrow \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



실전 연습 문제

286~288쪽

01 ③	02 ⑤	03 ③	04 $90\sqrt{2}$ m
05 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형	06 21	07 ①	
08 $\frac{5}{7}$	09 $5\sqrt{13}$ m	10 52	11 ③
12 5	13 ①	14 $2\sqrt{3}$	15 ④
16 16π	17 ③	18 ④	

01

해결전략 | 사인법칙을 이용한다.

$$A+B+C=180^\circ \text{이므로 } C=180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$$

$$\overline{BC} \sin 120^\circ = 8 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

02

해결전략 | 사인법칙을 이용한다.

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} \text{이므로}$$

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

🔗 다른 풀이

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$$

$$= 4 : 6 : 3$$

따라서 양수 k 에 대하여 $\sin A = 4k$, $\sin B = 6k$ 라고 하면

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{6k}{4k} = \frac{3}{2}$$

03

해결전략 | $a : b : c$ 를 이용하여 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 를 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $\sin A : \sin B : \sin C$ 구하기

사인법칙의 변형에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 3$$

STEP 2 $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$ 의 값 구하기

$\sin A = 2k$, $\sin B = 4k$, $\sin C = 3k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{3k}{2k + 4k} = \frac{1}{2}$$

04

해결전략 | 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180° 임을 이용하여 C 의 크기를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

STEP 1 C 의 크기 구하기

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

STEP 2 두 지점 A, C 사이의 거리 구하기

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{90}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} \sin 30^\circ = 90 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} = 90 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 90\sqrt{2} \text{ (m)}$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $90\sqrt{2}$ m이다.

05

해결전략 | $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 식을 간단히 한 후 사인법칙을 이용하여 세 변 a , b , c 사이의 관계를 구한다.

STEP 1 식 간단히 하기

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \cos^2 B = 1 - \sin^2 B \text{이므로}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C = 2 \text{에 대입하면}$$

$$(1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) + \sin^2 C = 2$$

$$\therefore \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 삼각형의 모양 판별하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

위의 식을 ①에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots ②$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

③

채점 요소	배점
① 식 간단히 하기	40 %
② 세 변 사이의 관계식 구하기	50 %
③ 삼각형의 모양 판별하기	10 %

06

해결전략 | 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 각각 변 BC의 길이를 구한 후 이를 비교한다.

STEP1 사인법칙을 이용하여 변 BC의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$$

$$\therefore \overline{BC} = 14 \sin \frac{\pi}{3} = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

STEP2 코사인법칙을 이용하여 변 BC의 길이 구하기

$$\overline{AC} = k \text{이고 } \overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1 \text{이므로 } \overline{AB} = 3k$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= (3k)^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2} \\ &= 7k^2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overline{BC} > 0 \text{이므로 } \overline{BC} = \sqrt{7}k$$

STEP3 k^2 의 값 구하기

$$\text{즉, } 7\sqrt{3} = \sqrt{7}k \text{이므로 } k = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{21}$$

$$\therefore k^2 = 21$$

07

해결전략 | $\overline{BD} = x$ 라 하고 두 삼각형 ABD, BCD에서 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 삼각형 ABD에서 $\overline{BD}^2$ 을 $\cos \theta$ 에 대한 식으로 나타내기

오른쪽 그림의 삼각형 ABD에서

$\overline{BD} = x$ 라고 하면

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 &= 6^2 + 1^2 - 2 \times 6 \times 1 \times \cos \theta \\ &= 37 - 12 \cos \theta \end{aligned}$$

STEP2 삼각형 BCD에서 $\overline{BD}^2$ 을

$\cos \theta$ 에 대한 식으로 나타내기

사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$$\angle BCD = 180^\circ - \theta$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

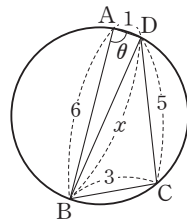
$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 34 + 30 \cos \theta \end{aligned}$$

STEP3 $\cos \theta$ 의 값 구하기

$$\text{즉, } 37 - 12 \cos \theta = 34 + 30 \cos \theta \text{이므로}$$

$$42 \cos \theta = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{14}$$



08

해결전략 | $A + B + C = \pi$ 임을 이용하여 주어진 비례식을 간단히 한다.

STEP1 주어진 비례식 간단히 하기

$$A + B + C = \pi \text{이므로}$$

$$\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$$

$$\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\sin(C + A) = \sin(\pi - B) = \sin B$$

$$\therefore \sin(A + B) : \sin(B + C) : \sin(C + A)$$

$$= \sin C : \sin A : \sin B$$

$$= c : a : b$$

$$= 7 : 5 : 6$$

사인법칙의 변형을
이용하였다.

①

STEP2 최소인 각 구하기

$a = 5k, b = 6k, c = 7k$ ($k > 0$)로 놓으면 길이가 가장 짧은 변의 마주 보는 각이 최소인 각이므로 A가 최소인 각이다.

②

STEP3 $\cos \theta$ 의 값 구하기

따라서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(6k)^2 + (7k)^2 - (5k)^2}{2 \times 6k \times 7k} \\ &= \frac{60k^2}{84k^2} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

③

채점 요소	배점
① 비례식 간단히 하기	40 %
② 최소인 각 구하기	20 %
③ $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %

09

해결전략 | 10초 후의 두 사람의 위치를 각각 A, B로 나타내고 코사인법칙을 이용하여 선분 AB의 길이를 구한다.

STEP1 10초 동안 두 사람이 이동한 거리 구하기

10초 후의 수현이와 지수의 위치를 각각 A, B라고 하면 $\overline{OA} = 1.5 \times 10 = 15$ (m), $\overline{OB} = 2 \times 10 = 20$ (m)

STEP2 두 사람 사이의 거리 구하기

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \cos 60^\circ \\ &= 225 + 400 - 2 \times 15 \times 20 \times \frac{1}{2} = 325\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 5\sqrt{13} \text{ (m)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 10초 후 두 사람 사이의 거리는 $5\sqrt{13}$ m이다.

10

해결전략 | 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 7 \quad (\because \overline{AC} > 0) \quad \dots\dots ①$$

STEP2 외접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{7}{\sin 120^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= 7 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

STEP3 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = \frac{49}{3}\pi$ 이므로

$$p = 3, q = 49$$

$$\therefore p+q = 52 \quad \dots\dots ③$$

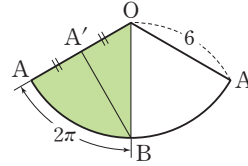
채점 요소	배점
① $\overline{AC}$ 의 길이 구하기	40 %
② 외접원의 반지름의 길이 구하기	20 %
③ $p+q$ 의 값 구하기	40 %

11

해결전략 | 원뿔의 전개도에 최단거리를 나타낸 후 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 옆면의 전개도를 이용하여 나타내기

주어진 원뿔의 전개도를 그린 후 두 점 A', B를 나타내면 다음과 같다.



호 AB의 길이는 원뿔의 밑면의 둘레의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\widehat{AB} = 4\pi \times \frac{1}{2} = 2\pi$$

이때 $\overline{OA} = 6$ 이므로 부채꼴 OAB에서

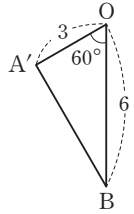
$$\angle AOB = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

STEP2 최단 거리 구하기

점 P가 움직이는 최단 거리는 $\overline{A'B}$ 이므로

삼각형 OA'B에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{A'B}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 27 \\ \therefore \overline{A'B} &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{A'B} > 0)\end{aligned}$$



12

해결전략 | $A+B+C=\pi$ 임을 이용하여 $\sin(B+C)$ 를 간단히 한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

STEP1 $\sin(B+C)$ 간단히 하기

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{4}$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이 구하기

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{1}{4} = 5$$

13

해결전략 | $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$ 의 길이를 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 대한 식으로 나타낸 후 삼각형의 넓이를 비교한다.

STEP1 $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$ 의 길이를 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 대한 식으로 나타내기

$\overline{AB'}$ 의 길이는 $\overline{AB}$ 의 길이를 10 % 늘린 것이므로

$$\overline{AB'} = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \overline{AB} = 1.1 \overline{AB}$$

$\overline{AC'}$ 의 길이는 $\overline{AC}$ 의 길이를 10 % 줄인 것이므로

$$\overline{AC'} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \overline{AC} = 0.9 \overline{AC}$$

STEP2 두 삼각형의 넓이 사이의 관계식 구하기

$$\begin{aligned} \triangle AB'C' &= \frac{1}{2} \times \overline{AB'} \times \overline{AC'} \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 1.1 \overline{AB} \times 0.9 \overline{AC} \times \sin A \\ &= 0.99 \times \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \\ &= 0.99 \triangle ABC \end{aligned}$$

STEP3 삼각형 $AB'C'$ 의 넓이의 변화 구하기

따라서 $\triangle AB'C'$ 의 넓이는 $\triangle ABC$ 의 넓이의 $\frac{99}{100}$ 배이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이보다 1 % 감소한다.

14

해결전략 | 코사인법칙과 곱셈 공식을 이용하여 bc 의 값을 구한다.

STEP1 bc 의 값 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} 5^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \\ \therefore 25 &= b^2 + c^2 - bc \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

한편, $b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc$ 이므로

$$b^2 + c^2 = 7^2 - 2bc = 49 - 2bc \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$25 = 49 - 3bc \quad \therefore bc = 8$$

STEP2 삼각형 ABC의 넓이 구하기

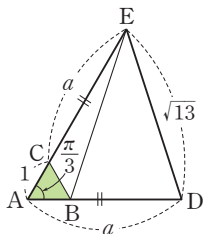
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

15

해결전략 | 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구한 후 $\triangle BDE = \triangle ADE - \triangle ABE$ 임을 이용한다.

STEP1 선분 AD의 길이 구하기



$\overline{AD} = \overline{CE} = a$ ($a > 0$)라고 하면

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = a^2 + (a+1)^2 - 2a \times (a+1) \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$13 = a^2 + a^2 + 2a + 1 - a(a+1)$$

$$a^2 + a - 12 = 0, (a+4)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

STEP2 삼각형 BDE의 넓이 구하기

$$\begin{aligned} \triangle ADE &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \\ \triangle ABE &= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle BDE = \triangle ADE - \triangle ABE$$

$$= 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

16

해결전략 | 사인법칙을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이의 합을 구한 후 내접원의 반지름의 길이가 주어졌을 때의 삼각형의 넓이 공식을 이용한다.

STEP1 $a+b+c$ 의 값 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙의 변형에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ &= \frac{a+b+c}{2R} = \frac{a+b+c}{16} = \frac{5}{4} \\ \therefore a+b+c &= 20 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

STEP2 삼각형 ABC의 내접원의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r(a+b+c) = \frac{1}{2} r \times 20 = 10r$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 40이므로

$$10r = 40 \quad \therefore r = 4 \quad \text{..... ㉡}$$

따라서 내접원의 넓이는

$$\pi r^2 = 16\pi \quad \text{..... ㉢}$$

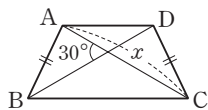
채점 요소	배점
㉠ $a+b+c$ 의 값 구하기	50 %
㉡ 내접원의 반지름의 길이 구하기	40 %
㉢ 내접원의 넓이 구하기	10 %

17

해결전략 | 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이가 서로 같음을 이용하여 사각형 ABCD의 넓이를 구한다.

STEP1 식 세우기

$\overline{AC}=x$ 라고 하면 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이가 서로 같으므로 $\overline{BD}=x$



두 대각선이 이루는 각의 크기가 30° 이고, 등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 36이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 30^\circ = 36$$

STEP2 한 대각선의 길이 구하기

$$\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{2} = 36$$

$$x^2 = 144 \quad \therefore x = 12 \quad (\because x > 0)$$

따라서 등변사다리꼴 ABCD의 한 대각선의 길이는 12이다.

18

해결전략 | 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합임을 이용하여 $S(\theta)$ 를 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이 구하기

삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

삼각형 BCD는 정삼각형이므로 삼각형 BCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{BD}^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (2 - 2 \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

STEP2 $S(\theta)$ 구하기

따라서 사각형 ABCD의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

STEP3 $4\left\{S\left(\frac{\pi}{6}\right)+S\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \quad \leftarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ S\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4\left\{S\left(\frac{\pi}{6}\right)+S\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 4\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

🔗 문제의 비법

정삼각형의 넓이

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이다.

상위권 도약 문제

289~290쪽

- 01 $\frac{49}{3}\pi$ 02 ⑤ 03 $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ 04 $\frac{32\sqrt{15}}{15}$ cm
05 ② 06 500 m 07 116 08 $2\sqrt{5}$

01

해결전략 | 선분 BC의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 $\overline{BC}$ 의 길이 구하기

원 O_1 의 중심을 P라고 하면 $\overline{PA} = \overline{PC} = 3$ 이므로 $\triangle PAC$ 는 정삼각형이다.

$$\therefore \angle CAP = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = 7 \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

STEP2 외접원의 넓이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{7}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R$ 이므로

$$R = 7 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi$$

02

해결전략 | 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP1 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 삼각형 BFG에서

$$\angle BFG = 180^\circ - (120^\circ + \theta) = 60^\circ - \theta$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BFG + \angle GFE$$

$$= (60^\circ - \theta) + 30^\circ$$

$$= 90^\circ - \theta \text{ (참)}$$

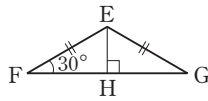
STEP2 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 이등변

삼각형 EFG의 한 꼭짓점

E에서 변 FG에 내린 수선

의 발을 H라고 하면



$$\overline{FH} = \overline{EF} \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{FG} = 2\overline{FH} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 BFG에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{FG}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{BF}}{\sin \theta}$$

$$\therefore \overline{BF} = \frac{\overline{FG}}{\sin 120^\circ} \times \sin \theta = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sin \theta$$

$$= 4 \sin \theta \text{ (참)}$$

STEP3 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{FE}^2 - 2 \times \overline{FB} \times \overline{FE} \times \cos (90^\circ - \theta)$$

$$= (4 \sin \theta)^2 + 2^2 - 2 \times 4 \sin \theta \times 2 \times \sin \theta$$

$$= 4$$

따라서 $\overline{BE} = 2$ 이므로 선분 BE의 길이는 항상 일정

하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03

해결전략 | $\overline{CP} = x$ 라 하고 원의 접선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

STEP1 $\overline{CP}$ 의 길이 구하기

$\overline{CP} = \overline{CQ}$ 이므로 삼각형

PCQ는 이등변삼각형이다.

$\overline{CP} = x$ 로 놓으면

$$\overline{BP} = 8 - x$$

이때 삼각형 ABC에 내접하

는 원이 선분 AB와 만나는

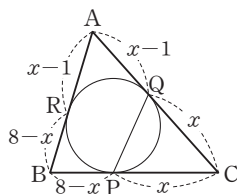
점을 R라고 하면

$$\overline{BR} = 8 - x \text{이므로 } \overline{AR} = 7 - (8 - x) = x - 1$$

$$\overline{AQ} = x - 1 \text{이므로 } \overline{CQ} = 9 - (x - 1) = 10 - x$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \text{에서 } x = 10 - x, 2x = 10 \quad \therefore x = 5$$

STEP2 $\cos C$ 의 값 구하기



한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

STEP3 $\overline{PQ}$ 의 길이 구하기

따라서 삼각형 PCQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2 \times \overline{CP} \times \overline{CQ} \times \cos C$$

$$= 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{50}{3}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

04

해결전략 | 주어진 상황을 단순화하여 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

STEP1 $\sin C$ 의 값 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C = \frac{12^2 + 8^2 - 16^2}{2 \times 12 \times 8} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{이므로 } \sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

STEP2 접시의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{16}{\sin C} = 2R$$

$$\therefore R = 16 \times \frac{4}{\sqrt{15}} \times \frac{1}{2} = \frac{32\sqrt{15}}{15}$$

따라서 접시의 반지름의 길이는 $\frac{32\sqrt{15}}{15}$ cm이다.

05

해결전략 | 주어진 조건에서 a, b 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 $\cos C$ 의 값 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin C} = 2 \times 3\sqrt{5} \quad \therefore \sin C = \frac{10}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$$

STEP2 조건을 만족시키는 a, b 사이의 관계식 구하기

$$\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3} \text{에서 } \frac{a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab}{ab} = \frac{4}{3}$$

$$3a^2 + 3b^2 - 2ab = 4ab, 3(a-b)^2 = 0 \quad \therefore a = b$$

STEP3 ab 의 값 구하기

코사인법칙에 의하여

$$10^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + a^2 - 2a^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}a^2$$

$$100 = \frac{2}{3}a^2, a^2 = 150 \quad \therefore ab = a^2 = 150$$

06

해결전략 | 전망대의 꼭대기를 점 P로 놓고 주어진 상황을 단 순화 하여 선분 AP의 길이를 구한다.

STEP1 선분의 길이 구하기

오른쪽 그림과 같이 전망대의

꼭대기를 점 P라 하고

$\overline{PA} = x$ km라고 하자.

직각삼각형 PAB에서

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{\overline{AB}}$$

$$\therefore \overline{AB} = x \text{ km}$$

직각삼각형 PAC에서

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\overline{AC}} \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{3}x \text{ km}$$

STEP2 전망대의 높이 구하기

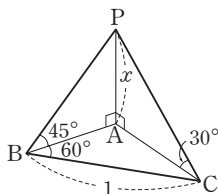
삼각형 ABC에서 $\angle ABC = 60^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의 하여

$$(\sqrt{3}x)^2 = x^2 + 1^2 - 2x \cos 60^\circ$$

$$2x^2 + x - 1 = 0, (x+1)(2x-1) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{1}{2}$$

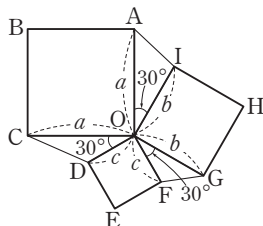
따라서 전망대의 높이는 $\frac{1}{2}$ km, 즉 500 m이다.



07

해결전략 | 세 정사각형의 각 변의 길이를 a, b, c 로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 세 삼각형의 넓이의 합과 세 정사각형의 둘레의 길이의 합을 이용하여 식 세우기



세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 한 변의 길이를 각각 a, b, c 라고 하면

$$\triangle OCD = \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{OD} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4}ac$$

$$\triangle OFG = \frac{1}{2} \times \overline{OF} \times \overline{OG} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4}bc$$

$$\triangle OIA = \frac{1}{2} \times \overline{OI} \times \overline{OA} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4}ab$$

이때 세 삼각형의 넓이의 합이 26이므로

$$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}bc + \frac{1}{4}ca = 26 \quad \therefore ab + bc + ca = 104$$

세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 둘레의 길이의 합이 72이므로

$$4a + 4b + 4c = 72 \quad \therefore a + b + c = 18$$

STEP2 곱셈 공식을 이용하여 세 정사각형의 넓이의 합 구하기

세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 넓이의 합은

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 18^2 - 2 \times 104 = 116$$

08

해결전략 | 삼각형의 결정 조건을 이용하여 x 의 값의 범위를 구한 후 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구한다.

STEP1 x 의 값의 범위 구하기

삼각형의 세 변의 길이는 4, $x+1$, $5-x$ 이고, 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$$4 + (x+1) > 5-x \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$4 + (5-x) > x+1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$x+1 + (5-x) > 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C} \text{에서 } 0 < x < 4$$

STEP2 삼각형의 넓이의 최댓값 구하기

삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하자.

헤론의 공식에 의하여

$$s = \frac{4 + (x+1) + (5-x)}{2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$S = \sqrt{5(5-4)\{5-(x+1)\}\{5-(5-x)\}} \\ \rightarrow S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ = \sqrt{-5x^2 + 20x} = \sqrt{-5(x-2)^2 + 20}$$

따라서 $0 < x < 4$ 에서 S 의 최댓값은 $x=2$ 일 때

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ 이다.}$$

>참고 삼각형 ABC의 넓이를 S , 길이가 4, $x+1$ 인 두 변 사이의 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{4^2 + (x+1)^2 - (5-x)^2}{2 \times 4 \times (x+1)} = \frac{3x-2}{2x+2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 4 \times (x+1) \times \sin \theta = (2x+2) \sin \theta \\ = (2x+2) \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = (2x+2) \sqrt{1 - \left(\frac{3x-2}{2x+2}\right)^2} \\ = \sqrt{(2x+2)^2 - (3x-2)^2} = \sqrt{-5x^2 + 20x} \\ = \sqrt{-5(x-2)^2 + 20}$$

11 등차수열

개념확인

292~293쪽

01 (1) $a_2 = -2$, $a_5 = 10$ (2) $a_2 = 3$, $a_5 = 81$

02 (1) $a_n = -5n + 11$ (2) $a_n = 4n - 11$

(1) 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 6 + (n-1) \times (-5) = -5n + 11$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 -7, 공차가

$$-3 - (-7) = 4 \text{인 등차수열이므로 일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = -7 + (n-1) \times 4 = 4n - 11$$

03 (1) 7 (2) 5

(1) 세 수 3, x , 11이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x 는 3과 11의 등차중항이므로

$$x = \frac{3+11}{2} = 7$$

(2) 세 수 -5, x , $3x$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루면 x 는 -5와 $3x$ 의 등차중항이므로

$$x = \frac{-5+3x}{2}$$

$$2x = -5 + 3x \quad \therefore x = 5$$

04 (1) 500 (2) 490

(1) 첫째항이 6, 제20항이 44인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20(6+44)}{2} = 500$$

(2) 첫째항이 -4, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20\{2 \times (-4) + (20-1) \times 3\}}{2} = 490$$

05 (1) $a_n = 2n - 4$ (2) $a_1 = 4$, $a_n = 2n$ ($n \geq 2$)

(1) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2$ ㉠

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 2n - 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠은 $n=1$ 을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 4$

(2) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 2 = 4$ ㉠

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + n + 2) - \{(n-1)^2 + (n-1) + 2\}$$

$$= 2n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠은 $n=1$ 을 ㉡에 대입하여 얻은 값 2와 같지 않으므로 구하는 일반항 a_n 은 $a_1 = 4$, $a_n = 2n$ ($n \geq 2$)

필수유형 01

295쪽

01-1 ㉡ (1) -2 (2) -34 (3) 15

해결전략 | $a_4 = -2$, $a_9 = -12$ 를 각각 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

(1) STEP1 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 = a + 3d = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_9 = a + 8d = -12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 공차 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 4, d = -2$$

따라서 수열의 공차는 -2이다.

(2) 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 + (n-1) \times (-2) = -2n + 6$$

$$\therefore a_{20} = -2 \times 20 + 6 = -34$$

(3) $a_m = -2m + 6 = -24$ 에서

$$-2m = -30 \quad \therefore m = 15$$

01-2 ㉡ 2

해결전략 | 수열의 일반항을 이용하여 $3(a_5 - a_3) = a_8$ 을 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a_3 , a_5 , a_8 을 d 에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면 첫째항이 -2이므로 $a_3 = -2 + 2d$, $a_5 = -2 + 4d$, $a_8 = -2 + 7d$

STEP2 공차 구하기

이것을 $3(a_5 - a_3) = a_8$ 에 대입하면

$$3\{-2 + 4d - (-2 + 2d)\} = -2 + 7d$$

$$6d = -2 + 7d \quad \therefore d = 2$$

따라서 수열의 공차는 2이다.

▶참고 위의 풀이처럼 $a_5 - a_3$ 을 계산하지 않고 $a_3 + 2d = a_5$ 에서

$a_5 - a_3 = 2d$ 임을 바로 이용해도 된다.

01-3 ㉡ 28

해결전략 | 수열의 일반항을 이용하여 주어진 두 식을 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 + a_4 = 14 \text{에서 } (a+d) + (a+3d) = 14$$

$$2a + 4d = 14, \text{ 즉 } a + 2d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 + a_8 = 41 \text{에서 } (a+6d) + (a+7d) = 41$$

$$2a + 13d = 41 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 첫째항과 공차 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, d=3$$

STEP3 a_{10} 의 값 구하기

$$\therefore a_{10} = a + 9d = 1 + 9 \times 3 = 28$$

$$\rightarrow a_n = 1 + (n-1) \times 3$$

01-4 답 65

해결전략 | 비례식을 a_6 과 a_9 에 대한 관계식으로 고쳐서 생각한다.

STEP1 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 = a + 3d = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 : a_9 = 7 : 10 \text{에서 } 10a_6 = 7a_9 \text{이므로}$$

$$10(a+5d) = 7(a+8d)$$

$$3a - 6d = 0, \text{ 즉 } a - 2d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 첫째항과 공차 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=10, d=5$$

STEP3 a_{12} 의 값 구하기

$$\therefore a_{12} = a + 11d = 10 + 11 \times 5 = 65$$

$$\rightarrow a_n = 10 + (n-1) \times 5$$

01-5 답 -72

해결전략 | 두 수열의 첫째항이 같으므로 주어진 식에서 두 수열의 공차 사이의 관계를 찾는다.

STEP1 두 수열의 공차 사이의 관계식 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 k , 공차를 d , 등차수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 k , 공차를 d' 이라고 하면

$$a_4 = k + 3d, b_4 = k + 3d'$$

이므로 $a_4 - b_4 = -18$ 에서

$$(k+3d) - (k+3d') = -18$$

$$3d - 3d' = -18 \quad \therefore d - d' = -6$$

STEP2 $a_{13} - b_{13}$ 의 값 구하기

$$\therefore a_{13} - b_{13} = (k+12d) - (k+12d')$$

$$= 12(d - d')$$

$$= 12 \times (-6) = -72$$

01-6 답 19

해결전략 | 공차가 주어졌으므로 $a_3a_7=64$ 를 첫째항에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 첫째항에 대한 식 세우기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면

$$a_3 = a + 2 \times (-3) = a - 6$$

$$a_7 = a + 6 \times (-3) = a - 18$$

이므로 $a_3a_7=64$ 에서

$$(a-6)(a-18)=64$$

$$a^2 - 24a + 44 = 0$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$(a-2)(a-22)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=22$$

이때 $a_8 = a + 7 \times (-3) > 0$ 이므로 $a > 21$ 이어야 한다.

$$\therefore a=22$$

STEP3 a_2 의 값 구하기

$$\therefore a_2 = a + d = 22 + (-3) = 19$$

필수유형 02

297쪽

02-1 답 제16항

해결전략 | 일반항 a_n 을 구한 다음 문제의 조건에 알맞은 식을 세운다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = -10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_8 = a + 7d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -14, d = 2$$

$$\therefore a_n = -14 + (n-1) \times 2 = 2n - 16$$

STEP2 절댓값이 16인 항 구하기

$$\text{따라서 } |a_n| = |2n - 16| = 16 \text{에서}$$

$$2n - 16 = \pm 16$$

$$2n - 16 = 16 \text{에서 } n = 16$$

$$2n - 16 = -16 \text{에서 } n = 0$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=16$

즉, 절댓값이 16인 항은 제16항이다.

02-2 답 제17항

해결전략 | 일반항 a_n 을 구한 다음 문제의 조건에 알맞은 식을 세운다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 = a + 3d = -49 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = a + 5d = -41 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -61, d = 4$$

$$\therefore a_n = -61 + (n-1) \times 4 = 4n - 65$$

STEP 2 처음으로 양수가 되는 항 구하기

항이 양수가 되려면 $a_n > 0$ 에서

$$4n - 65 > 0 \quad \therefore n > 16.25$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제17항이다.

02-3 ㉮ 제24항

해결전략 | 일반항 a_n 을 구한 다음 부등식 $a_n < -10$ 을 푼다.

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_5 = a + 4d = 27 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_2 + a_9 = 52 \text{에서}$$

$$(a + d) + (a + 8d) = 52$$

$$2a + 9d = 52 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 35, d = -2$$

$$\therefore a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$$

STEP 2 처음으로 -10 보다 작아지는 항 구하기

항이 -10 보다 작으려면 $a_n < -10$ 에서

$$-2n + 37 < -10 \quad \therefore n > 23.5$$

따라서 처음으로 -10 보다 작아지는 항은 제24항이다.

02-4 ㉮ 제29

해결전략 | 200보다 작은 항 중 200에 가장 가까이 있는 항과 200보다 큰 항 중 200에 가장 가까이 있는 항을 찾아서 두 항을 비교한다.

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_2 + a_5 + a_6 = 88 \text{에서}$$

$$(6 + d) + (6 + 4d) + (6 + 5d) = 88$$

$$10d = 70 \quad \therefore d = 7$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times 7 = 7n - 1$$

STEP 2 200에 가까운 항 2개 구하기

$$a_n < 200 \text{에서 } 7n - 1 < 200$$

$$\therefore n < 28.7 \dots$$

따라서 200보다 작으면서 200에 가장 가까운 항은 a_{28} , 200보다 크면서 200에 가장 가까운 항은 a_{29} 이다.

STEP 3 k 의 값 구하기

이때 $a_{28} = 195$, $a_{29} = 202$ 이므로 200에 가장 가까운 항은 a_{29} 이다.

$$\therefore k = 29$$

▶참고 $n < 28.7 \dots$ 에서 200에 가장 가까운 항을 a_{28} 이라고 생각하지 않도록 한다. 200에 가장 가까운 항은 200보다 작으면서 가장 가까운 항과 200보다 크면서 가장 가까운 항을 찾아서 두 항을 비교해야 한다.

02-5 ㉮ 31

해결전략 | a_4 와 a_7 의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_4 + a_7 = 0 \text{을 이용한다.}$$

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_{11} = a + 10d = 11 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

a_4 와 a_7 은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_4 + a_7 = 0$$

$$(a + 3d) + (a + 6d) = 0$$

$$\therefore 2a + 9d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -9, d = 2$$

$$\therefore a_n = -9 + (n-1) \times 2 = 2n - 11$$

STEP 2 n 의 최솟값 구하기

$$a_n = 2n - 11 > 50 \text{에서}$$

$$n > 30.5$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 31이다.

02-6 ㉮ 제16항

해결전략 | 0에 가까울수록 절댓값이 작아지므로 등차수열에서 항의 부호가 바뀔 때를 찾는다.

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_5 = a + 4d = -43 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_{10} = a + 9d = -23 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -59, d = 4$$

$$\therefore a_n = -59 + (n-1) \times 4 = 4n - 63$$

STEP 2 각 항의 절댓값의 크기 비교하기

$$a_n > 0 \text{에서 } 4n - 63 > 0$$

$$\therefore n > 15.75$$

따라서 수열의 항 중 양수인 항은 a_{16} , a_{17} , ...이므로

$$|a_1| > |a_2| > \dots > |a_{15}|, |a_{16}| < |a_{17}| < \dots$$

STEP 3 절댓값이 최소인 항 구하기 ▶ 음수는 작을수록 절댓값이 크다.

이때 $a_{15} = -3$, $a_{16} = 1$ 이므로

$$|a_{15}| > |a_{16}|$$

따라서 절댓값이 최소인 항은 제16항이다.

03-1 답 -2

해결전략 | 수를 넣어서 만든 수열에서 끝항이 제몇 항인지 찾는다.

STEP1 공차 구하기

두 수 사이에 9개의 수를 넣었으므로 항은 모두 11개이다. 즉, 등차수열의 첫째항이 8, 제11항이 -12이므로 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_{11} = 8 + 10d = -12 \quad \therefore d = -2$$

STEP2 제6항 구하기

따라서 구하는 제6항은

$$a_6 = a_1 + 5d = 8 + 5 \times (-2) = -2$$

●→ 다른 풀이

주어진 등차수열의 항은 모두 11개이므로 제6항은 등차수열의 한 가운데에 있는 항이다.

$$\text{따라서 제6항은 } \frac{8 + (-12)}{2} = -2$$

03-2 답 19

해결전략 | 수를 넣어서 만든 수열에서 x_2 는 제3항, x_7 은 제8항이다.

STEP1 공차 구하기

두 수 사이에 7개의 수를 넣었으므로 항은 모두 9개이다. 즉, 등차수열의 첫째항이 -4, 제9항이 20이므로 공차를 d , 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_9 = -4 + 8d = 20 \quad \therefore d = 3$$

STEP2 $x_2 + x_7$ 의 값 구하기

따라서 x_2 , x_7 의 값은 각각 수열의 제3항, 제8항과 같으므로

$$x_2 = a_3 = -4 + 2 \times 3 = 2$$

$$x_7 = a_8 = -4 + 7 \times 3 = 17$$

$$\therefore x_2 + x_7 = 2 + 17 = 19$$

03-3 답 7

해결전략 | 61이 제($n+2$)항임을 이용하여 n 에 대한 식을 세운다.

STEP1 n 에 대한 식 세우기

전체 항수는 $n+2$ 이므로 61은 제($n+2$)항이다.

수열의 일반항을 b_n 이라고 하면 공차가 7이고, $b_1=5$ 이므로

$$b_{n+2} = 5 + (n+1) \times 7 = 61$$

STEP2 n 의 값 구하기

$$7n + 12 = 61 \quad \therefore n = 7$$

03-4 답 -3

해결전략 | 먼저 두 항 15와 3을 이용하여 공차를 구한다.

STEP1 공차 구하기

15와 3 사이에 5개의 수를 넣었으므로 3은 제7항이다.

공차를 d 라고 하면

$$a_7 = 15 + 6d = 3 \quad \therefore d = -2$$

STEP2 y_3 의 값 구하기

따라서 y_3 의 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 제10항과 같으므로

$$y_3 = a_{10} = 15 + 9 \times (-2) = -3$$

03-5 답 43

해결전략 | 3, a_1 , a_2 , ..., a_{2n} , 88인 등차수열의 전체 항수는 $(2n+2)$ 이다.

STEP1 n 에 대한 식 세우기

전체 항수는 $2n+2$ 이므로 88은 제($2n+2$)항이다.

수열의 일반항을 b_n 이라고 하면 공차가 5이고 $b_1=3$ 이므로

$$b_{2n+2} = 3 + (2n+1) \times 5 = 88$$

STEP2 n 의 값 구하기

$$10n + 8 = 88 \quad \therefore n = 8$$

STEP3 a_8 의 값 구하기

3과 88 사이에 넣은 항수는 $2n=16$ 이고 전체 항수는 18이다.

따라서 a_8 의 값은 수열 $\{b_n\}$ 의 제9항과 같으므로

$$a_8 = b_9 = 3 + 8 \times 5 = 43$$

a_1 앞에 첫째항 3이 있으므로 전체적으로는 9번째 항이다.

03-6 답 2

해결전략 | 먼저 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 두 항 -1과 -23을 이용하여 공차를 구한다.

STEP1 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 은 -1과 -23 사이에 10개의 수가 있으므로 전체 항수는 12이다. 즉, -23은 제12항이다.

공차를 d 라고 하면

$$a_{12} = -1 + 11d = -23 \quad \therefore d = -2$$

STEP2 등차수열 $\{b_n\}$ 에서 n 의 값 구하기

등차수열 $\{b_n\}$ 은 18과 -4 사이에 n 개의 수가 있으므로 전체 항수는 $n+2$ 이다. 즉, -4는 제($n+2$)항이다.

공차가 -2이고 $b_1=18$ 이므로

$$b_{n+2} = 18 + (n+1) \times (-2) = -4$$

$$-2n + 16 = -4 \quad \therefore n = 10$$

STEP3 y_8 의 값 구하기

y_8 의 값은 수열 $\{b_n\}$ 의 제9항과 같으므로

$$y_8 = b_9 = 18 + 8 \times (-2) = 2$$

04-1 ㉔ -2

해결전략 | 등차중항의 조건을 나타내는 식을 이용한다.

STEP1 등차중항의 조건을 나타내는 식 세우기

$a-4$ 는 $-a^2+13$ 과 -6 의 등차중항이므로

$$2(a-4) = (-a^2+13) + (-6)$$

$$\therefore a^2+2a-15=0$$

STEP2 모든 a 의 값의 합 구하기

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a 의 값의 합은 -2 이다.

04-2 ㉔ $\frac{1}{7}$

해결전략 | 등차중항의 조건을 나타내는 식을 이용한다.

STEP1 등차중항의 조건을 나타내는 식 세우기

x 는 -5 와 y 의 등차중항이므로 $2x = -5 + y$

$$\therefore 2x - y = -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

y 는 x 와 13 의 등차중항이므로 $2y = x + 13$

$$\therefore x - 2y = -13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 $\frac{x}{y}$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=7$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{7}$$

04-3 ㉔ 12

해결전략 | 등차중항과 이차방정식의 두 근의 합을 이용한다.

STEP1 k 를 α, β 에 대한 식으로 나타내기

k 는 α 와 β 의 등차중항이므로

$$2k = \alpha + \beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 k 의 값 구하기

이차방정식 $x^2-24x+10=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 24$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2k = 24 \quad \therefore k = 12$$

04-4 ㉔ -3

해결전략 | 다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지가 $f(a)$ 임을 이용하여 등차수열을 이루는 세 항을 구한다.

STEP1 등차수열을 이루는 세 항 구하기

$f(x) = x^2 + ax + 3$ 이라고 하면 등차수열을 이루는 세 항은 순서대로 $f(1), f(-1), f(-2)$ 이다. → 나머지를 정리하여 이용한다.

$$\text{즉, } f(1) = a+4, f(-1) = -a+4, f(-2) = -2a+7$$

STEP2 등차중항의 조건을 나타내는 식 세우기

$f(-1)$ 이 $f(1)$ 과 $f(-2)$ 의 등차중항이므로

$$2f(-1) = f(1) + f(-2)$$

$$2(-a+4) = (a+4) + (-2a+7)$$

STEP3 a 의 값 구하기

$$-2a+8 = -a+11 \quad \therefore a = -3$$

04-5 ㉔ 7

해결전략 | 등차수열의 연속한 세 항이면 가운데 항은 나머지 두 항의 등차중항이다.

STEP1 수열 $\{a_n\}$ 에서 등차중항의 조건을 나타내는 식 세우기
 x 는 -1 과 y 의 등차중항이므로

$$2x = -1 + y \quad \therefore 2x - y = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 수열 $\{b_n\}$ 에서 등차중항의 조건을 나타내는 식 세우기
 $y-5$ 는 $2x$ 와 -4 의 등차중항이므로

$$2(y-5) = 2x + (-4) \quad \therefore x - y = -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 $x+y$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=5 \quad \therefore x+y=7$$

04-6 ㉔ 2

해결전략 | 세 수 a_2, a_3, a_4 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_3 은 a_2 와 a_4 의 등차중항이다.

STEP1 a_3 의 값 구하기

a_3 은 a_2 와 a_4 의 등차중항이므로

$$2a_3 = a_2 + a_4$$

이것을 $a_2 + a_3 + a_4 = 18$ 에 대입하면

$$2a_3 + a_3 = 18, 3a_3 = 18 \quad \therefore a_3 = 6$$

STEP2 b 의 값 구하기

a_3 은 -1 과 $5b+3$ 의 등차중항이므로

$$2 \times 6 = -1 + (5b+3)$$

$$5b = 10 \quad \therefore b = 2$$

05-1 ㉔ (1) 5, 8, 11 (2) -3, 2, 7

해결전략 | 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓고 식을 세운다.

(1) STEP1 세 수 중 가운데 수 구하기

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면

세 수의 합이 24이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 24$$

$$3a = 24 \quad \therefore a = 8$$

STEP2 공차 구하기

세 수의 곱이 440이므로

$$(a-d)a(a+d) = 440$$

$$a(a^2 - d^2) = 440, 8(64 - d^2) = 440$$

$$d^2 = 9 \quad \therefore d = \pm 3$$

STEP3 세 수 구하기

(i) $a=8$, $d=-3$ 일 때, 세 수는 11, 8, 5

(ii) $a=8$, $d=3$ 일 때, 세 수는 5, 8, 11

따라서 구하는 세 수는 5, 8, 11이다.

(2) STEP1 세 수 중 가운데 수 구하기

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면

세 수의 합이 6이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 6$$

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

STEP2 공차 구하기

세 수의 제곱의 합이 62이므로

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 62$$

$$3a^2 + 2d^2 = 62, 12 + 2d^2 = 62$$

$$d^2 = 25 \quad \therefore d = \pm 5$$

STEP3 세 수 구하기

(i) $a=2$, $d=-5$ 일 때, 세 수는 7, 2, -3

(ii) $a=2$, $d=5$ 일 때, 세 수는 -3, 2, 7

따라서 구하는 세 수는 -3, 2, 7이다.

05-2 ㉠ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

해결전략 | 세 내각의 크기를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓고 삼각형의 세 내각의 크기의 합을 이용한다.

STEP1 두 번째로 큰 각의 크기 구하기

세 내각의 크기를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 180^\circ$$

$$3a = 180^\circ \quad \therefore a = 60^\circ$$

STEP2 $\sin \alpha$ 의 값 구하기

이때 60° 는 두 번째로 큰 각이므로 $\alpha = 60^\circ$

$$\therefore \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

05-3 ㉡ 5, 11, 17

해결전략 | 나머지 세 수의 합을 이용하여 먼저 두 번째로 작은 수를 구한다.

STEP1 두 번째로 작은 수 구하기

나머지 세 수의 합은 $56 - 23 = 33$ 이므로 나머지 세 수를

$a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면

$$(a-d) + a + (a+d) = 33$$

$$3a = 33 \quad \therefore a = 11$$

STEP2 공차 구하기

두 번째로 작은 수가 11, 가장 큰 수가 23이므로

$$11 + 2d = 23 \quad \therefore d = 6$$

STEP3 나머지 세 수 구하기 네 번째 수 23은 두 번째 수보다 2d가 크다.

따라서 가장 작은 수는 $11 - 6 = 5$, 두 번째로 큰 수는

$11 + 6 = 17$ 이므로 구하는 세 수는 5, 11, 17이다.

05-4 ㉢ 11

해결전략 | 세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP1 세 수 중 가운데 수와 공차 구하기

세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(a-d)a(a+d) = -21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } a(a^2 - d^2) = -21, 3(9 - d^2) = -21$$

$$d^2 = 16 \quad \therefore d = \pm 4$$

STEP2 세 실근 구하기

(i) $a=3$, $d=-4$ 일 때, 세 실근은 7, 3, -1

(ii) $a=3$, $d=4$ 일 때, 세 실근은 -1, 3, 7

STEP3 k의 값 구하기

따라서 세 실근이 -1, 3, 7이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k = -1 \times 3 + 3 \times 7 + (-1) \times 7 = 11$$

● 다른 풀이

세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 9$$

$$3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

이때 $a=3$ 은 방정식 $x^3 - 9x^2 + kx + 21 = 0$ 의 한 근이므로 $x=3$ 을 대입하면

$$27 - 81 + 3k + 21 = 0 \quad \therefore k = 11$$

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

05-5 ㉔ 8

해결전략 | 연속한 네 항을 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 로 놓고 문제의 조건에 알맞은 식을 세운다.

STEP1 a, d 의 값 구하기

연속한 네 항을 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 로 놓으면 네 항의 합이 -4 이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=-4$$

$$4a=-4 \quad \therefore a=-1$$

네 항의 제곱의 합이 24이므로

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=24$$

$$4a^2+20d^2=24, 4+20d^2=24$$

$$d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1$$

STEP2 네 항 구하기

(i) $a=-1, d=-1$ 일 때, 네 항은 2, 0, $-2, -4$

(ii) $a=-1, d=1$ 일 때, 네 항은 $-4, -2, 0, 2$

STEP3 네 항의 절댓값의 합 구하기

따라서 네 항은 $-4, -2, 0, 2$ 이므로 네 항의 절댓값의 합은 $|-4|+|-2|+|0|+|2|=4+2+0+2=8$

05-6 ㉔ 15

해결전략 | 직육면체의 가로, 세로, 높이를 $a-d, a, a+d$ 로 놓고 모서리의 길이의 합, 겉넓이에 대한 식을 세운다.

STEP1 세 수 중 가운데 수와 공차 구하기

직육면체의 가로, 세로, 높이를 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$$4(a-d)+4a+4(a+d)=36$$

$$12a=36 \quad \therefore a=3$$

겉넓이가 46이므로

$$2(a-d)a+2a(a+d)+2(a-d)(a+d)=46$$

$$6a^2-2d^2=46, 54-2d^2=46$$

$$d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$$

STEP2 직육면체의 가로, 세로, 높이 구하기

(i) $a=3, d=-2$ 일 때, 가로, 세로, 높이는 5, 3, 1

(ii) $a=3, d=2$ 일 때, 가로, 세로, 높이는 1, 3, 5

STEP3 부피 구하기

따라서 직육면체의 부피는 $1 \times 3 \times 5 = 15$

필수유형 06

305쪽

06-1 ㉔ 660

해결전략 | 먼저 등차수열의 항수를 구한다.

STEP1 71이 제몇 항인지 구하기

71을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 -5 , 공차가 4이므로 $-5+(n-1) \times 4=71$

$$4n=80 \quad \therefore n=20$$

즉, 71은 제20항이다.

STEP2 수열의 합 구하기

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20(-5+71)}{2}=660$$

06-2 ㉔ 3

해결전략 | 첫째항을 -2 , 끝항을 25로 생각하고 항수를 구한다.

STEP1 n 의 값 구하기

첫째항이 -2 , 끝항이 25, 항수가 $n+2$ 이므로

$$\frac{(n+2)(-2+25)}{2}=115 \quad \therefore n=8$$

STEP2 공차 구하기

즉, -2 와 25 사이에 8개의 수를 넣었으므로 25는 제10항이다.

이때 공차를 d 라고 하면 $-2+9d=25$

$$\therefore d=3$$

06-3 ㉔ 824

해결전략 | a_3 과 a_{10} 의 값을 이용하여 수열의 첫째항과 공차를 구한다.

STEP1 첫째항과 공차 구하기

첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3=a+2d=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{10}=a+9d=62 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, d=7$$

STEP2 S_{16} 의 값 구하기

$$\therefore S_{16}=\frac{16\{2 \times (-1)+15 \times 7\}}{2}=824$$

06-4 답 90

해결전략 | 주어진 두 식에서 첫째항과 제10항을 구한다.

STEP1 첫째항과 제10항 구하기

$$a_1 + 2a_{10} = 34, a_1 - a_{10} = -14 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$a_1 = 2, a_{10} = 16$$

STEP2 첫째항부터 제10항까지의 합 구하기

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(2+16)}{2} = 90$$

06-5 답 12

해결전략 | 첫째항을 구한 다음 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 첫째항 구하기

공차가 -2이므로

$$a_5 = a_1 + 4 \times (-2) = 2 \text{에서 } a_1 = 10$$

STEP2 n 의 최솟값 구하기

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n\{2 \times 10 + (n-1) \times (-2)\}}{2} \\ = n(-n+11)$$

$$\text{이므로 } n(-n+11) < 0, n(n-11) > 0$$

$$\text{이때 } n > 0 \text{이므로 } n-11 > 0 \quad \therefore n > 11$$

따라서 n 의 최솟값은 12이다.

06-6 답 -330

해결전략 | 공차가 음수이므로 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ 임을 이용하여 a_3 과 a_7 의 관계를 찾는다.

STEP1 a_1 의 값 구하기

조건에서 $|a_3| = |a_7|$ 이고 공차가 음수이므로 $a_3 > a_7$

$$\therefore a_3 = -a_7$$

→ 등차수열은 공차를 계속 더하므로
항의 값은 점점 작아진다.

$$\text{이때 } a_3 = a_1 + 2 \times (-6) = a_1 - 12,$$

$$a_7 = a_1 + 6 \times (-6) = a_1 - 36 \text{이므로}$$

$$a_1 - 12 = -(a_1 - 36) \quad \therefore a_1 = 24$$

STEP2 $a_5 + a_6 + \dots + a_{15}$ 의 값 구하기

$$\text{한편, } a_5 = 24 + 4 \times (-6) = 0,$$

$$a_{15} = 24 + 14 \times (-6) = -60$$

이고 a_5 부터 a_{15} 까지의 항수는 11이므로

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{15} = \frac{11\{0 + (-60)\}}{2} = -330$$

● → 다른 풀이

STEP2 $a_5 + a_6 + \dots + a_{15}$ 의 값 구하기

첫째항이 24, 공차가 -6이므로

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{15}$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_{15}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$= \frac{15\{2 \times 24 + 14 \times (-6)\}}{2} - \frac{4\{2 \times 24 + 3 \times (-6)\}}{2}$$

$$= -270 - 60 = -330$$

필수유형 07

307쪽

07-1 답 30

해결전략 | 문제에서 주어진 조건을 이용하여 공차를 먼저 구한다.

STEP1 공차 구하기

등차수열의 공차를 d 라고 하면 첫째항이 -2이고,

첫째항부터 제6항까지의 합이 48이므로

$$\frac{6\{2 \times (-2) + 5d\}}{2} = 48$$

$$-4 + 5d = 16 \quad \therefore d = 4$$

STEP2 제9항 구하기

따라서 첫째항이 -2, 공차가 4이므로 제9항은

$$-2 + 8 \times 4 = 30$$

07-2 답 -400

해결전략 | 문제에서 주어진 조건을 이용하여 첫째항과 공차를 먼저 구한다.

STEP1 첫째항과 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 = a + 3d = -7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{12} = \frac{12(2a + 11d)}{2} = -204 \text{에서}$$

$$2a + 11d = -34 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 5, d = -4$$

STEP2 S_{16} 의 값 구하기

따라서 구하는 S_{16} 의 값은

$$S_{16} = \frac{16\{2 \times 5 + 15 \times (-4)\}}{2} = -400$$

07-3 답 440

해결전략 | 등차수열의 합의 공식을 이용하여 첫째항과 공차에 대한 식을 세운다.

STEP1 첫째항과 공차 구하기

등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까

지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \text{에서}$$

$$2a+9d=24 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{15} = \frac{15(2a+14d)}{2} = 255 \text{에서}$$

$$a+7d=17 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, d=2$$

STEP 2 S_{20} 의 값 구하기

따라서 구하는 S_{20} 의 값은

$$S_{20} = \frac{20(2 \times 3 + 19 \times 2)}{2} = 440$$

07-4 ㉢ 43

해결전략 | 부분의 합 S_5 , S_7 을 항들의 합 꼴로 나타내어 $S_7 - S_5$ 를 계산한다.

STEP 1 $S_7 - S_5 = 50$ 의 좌변을 항들의 합 꼴로 나타내기

$$\begin{aligned} S_7 - S_5 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_7) - (a_1 + a_2 + \dots + a_5) \\ &= a_6 + a_7 \end{aligned}$$

이므로 $a_6 + a_7 = 50$

STEP 2 첫째항과 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_6 + a_7 = (a + 5d) + (a + 6d) = 50 \text{에서}$$

$$2a + 11d = 50 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, d=4$$

STEP 3 a_{11} 의 값 구하기

따라서 구하는 a_{11} 의 값은

$$a_{11} = 3 + 10 \times 4 = 43$$

07-5 ㉣ 210

해결전략 | 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 도 등차수열이 되고, 이때 공차는 $2d$ 이다.

STEP 1 첫째항 구하기

수열 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$ 도 등차수열이고 공차가 $2 \times 2 = 4$ 이므로

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}}{10} = \frac{10(2a_1 + 9 \times 4)}{2} = 190$$

$$a_1 + 18 = 19 \quad \therefore a_1 = 1$$

STEP 2 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값 구하기

수열 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ 은 첫째항이 $a_2 = 1 + 2 = 3$, 공차

가 $2 \times 2 = 4$ 인 등차수열이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{10(2 \times 3 + 9 \times 4)}{2} = 210$$

●→ 다른 풀이

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$$

$$= (a_1 + d) + (a_3 + d) + (a_5 + d) + \dots + (a_{19} + d)$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) + 10d$$

$$= 190 + 10 \times 2 = 210$$

07-6 ㉤ 264

해결전략 | 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 문제의 조건에서 $S_8 = 8$, $S_{16} = S_8 + 136$ 이다.

STEP 1 첫째항과 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 8$$

$$\therefore 2a+7d=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{16} = (a_1 + a_2 + \dots + a_8) + (a_9 + a_{10} + \dots + a_{16})$$

$$= 8 + 136 = 144$$

$$\text{이므로 } S_{16} = \frac{16(2a+15d)}{2} = 144$$

$$\therefore 2a+15d=18 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-6, d=2$$

STEP 2 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + \dots + a_{24}$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } S_{24} = \frac{24\{2 \times (-6) + 23 \times 2\}}{2} = 408 \text{이므로}$$

$$a_{17} + a_{18} + a_{19} + \dots + a_{24}$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_{24}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{16})$$

$$= S_{24} - S_{16} = 408 - 144 = 264$$

●→ 다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{16}$$

$$= (a_1 + 8d) + (a_2 + 8d) + (a_3 + 8d) + \dots + (a_8 + 8d)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8) + 8d \times 8$$

$$= 8 + 64d = 136$$

$$\therefore d=2$$

$$\therefore a_{17} + a_{18} + a_{19} + \dots + a_{24}$$

$$= (a_9 + 8d) + (a_{10} + 8d) + (a_{11} + 8d) + \dots + (a_{16} + 8d)$$

$$= (a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{16}) + 8d \times 8$$

$$= 136 + 64 \times 2 = 264$$

08-1 답 -136

해결전략 | 먼저 a_3, a_{13} 을 이용하여 일반항을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = -23 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{13} = a + 12d = 17 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -31, d = 4$$

$$\therefore a_n = -31 + (n-1) \times 4 = 4n - 35$$

STEP2 처음으로 양수가 나오는 항 구하기

한편, $a_n = 4n - 35 > 0$ 에서 $n > 8.75$ 이므로 처음으로 양수가 나오는 항은 제9항이다. $a < 0, d > 0$ 이므로 처음으로 양수가 나오는 항을 생각한다.

STEP3 S_n 의 최솟값 구하기

따라서 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이므로 S_n 의 최솟값은 $\rightarrow$ 첫째항부터 제8항까지의 항은 모두 음수이다.

$$S_8 = \frac{8\{2 \times (-31) + 7 \times 4\}}{2} = -136$$

08-2 답 187

해결전략 | 먼저 제2항과 첫째항부터 제6항까지의 합을 이용하여 일반항을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열의 일반항을 a_n , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a_1 + d = 29 \quad \cdots \textcircled{1}$$

첫째항부터 제6항까지의 합이 147이므로

$$\frac{6(2a_1 + 5d)}{2} = 147$$

$$2a_1 + 5d = 49 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a_1 = 32, d = -3$$

$$\therefore a_n = 32 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 35$$

STEP2 처음으로 음수가 나오는 항 구하기

한편, $a_n = -3n + 35 < 0$ 에서 $n > 11.6 \cdots$ 이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제12항이다. $a_1 > 0, d < 0$ 이므로 처음으로 음수가 되는 항을 생각한다.

STEP3 합의 최댓값 구하기

따라서 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이므로 합의 최댓값은

$$\frac{11\{2 \times 32 + 10 \times (-3)\}}{2} = 187$$

08-3 답 200

해결전략 | 등차수열의 합의 공식을 이용하여 S_5, S_{12} 를 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 150 \text{에서}$$

$$a + 2d = 30 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{12} = \frac{12(2a + 11d)}{2} = 192 \text{에서}$$

$$2a + 11d = 32 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 38, d = -4$$

$$\therefore a_n = 38 + (n-1) \times (-4) = -4n + 42$$

STEP2 처음으로 음수가 나오는 항 구하기

한편, $a_n = -4n + 42 < 0$ 에서 $n > 10.5$ 이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제11항이다.

STEP3 S_n 의 최댓값 구하기

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대이므로 S_n 의 최댓값은 $S_{10} = \frac{10\{2 \times 38 + 9 \times (-4)\}}{2} = 200$

08-4 답 289

해결전략 | 임의의 자연수 n 에 대하여 $S_n \leq k$ 가 성립하려면 (S_n 의 최댓값) $\leq k$ 이어야 한다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 31 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{6(2a + 5d)}{2} = 168 \text{에서}$$

$$2a + 5d = 56 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 33, d = -2$$

$$\therefore a_n = 33 + (n-1) \times (-2) = -2n + 35$$

STEP2 k 의 최솟값 구하기

임의의 자연수 n 에 대하여 $S_n \leq k$ 이려면

(S_n 의 최댓값) $\leq k$ 이어야 한다.

이때 $a_n = -2n + 35 < 0$ 에서 $n > 17.5$ 이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제18항이다.

따라서 S_n 의 최댓값은 S_{17} 이므로

$$S_{17} = \frac{17\{2 \times 33 + 16 \times (-2)\}}{2} \leq k$$

$$\therefore 289 \leq k$$

즉, k 의 최솟값은 289이다.

08-5 답 17

해결전략 | 절댓값은 항상 0 또는 양수임을 이용한다.

STEP1 S_n 을 n 에 대한 이차식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_6 = 16 + 5d = 6 \text{에서 } d = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n\{2 \times 16 + (n-1) \times (-2)\}}{2} \\ &= n(17-n) \end{aligned}$$

STEP2 $|S_n|$ 의 값이 최소일 때의 n 의 값 구하기

이때 $|S_n| \geq 0$ 이므로 $|S_n|$ 의 최솟값은 0이다.

즉, $n(17-n) = 0$ 에서 $n = 17$ ($\because n$ 은 자연수)

08-6 답 -145

해결전략 | 부분의 합 S_6, S_8 을 항들의 합 꼴로 나타내어

$S_8 - S_6$ 을 계산한다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 + a_6 = (a + 3d) + (a + 5d) = -34 \text{에서}$$

$$a + 4d = -17 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} S_8 - S_6 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_8) - (a_1 + a_2 + \dots + a_6) \\ &= a_7 + a_8 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } (a + 6d) + (a + 7d) = -19$$

$$\therefore 2a + 13d = -19 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -29, d = 3$$

$$\therefore a_n = -29 + (n-1) \times 3 = 3n - 32$$

STEP2 k 의 값 구하기

한편, $a_n = 3n - 32 > 0$ 에서 $n > 10.6 \dots$ 이므로 처음으로 양수가 나오는 항은 제11항이다.

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합이 최소이므로

$$k = 10$$

STEP3 $k+l$ 의 값 구하기

이때 최솟값 l 은

$$l = S_{10} = \frac{10\{2 \times (-29) + 9 \times 3\}}{2} = -155$$

$$\therefore k+l = 10 + (-155) = -145$$

발전유형 09

311쪽

09-1 답 (1) 735 (2) 800

해결전략 | 조건을 만족시키는 수를 작은 것부터 차례로 나열하고 규칙을 찾는다.

(1) **STEP1** 7의 배수의 규칙 알기

100보다 작은 자연수 중에서 7의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$7, 14, 21, \dots, 98$$

이므로 첫째항이 7, 공차가 7인 등차수열을 이룬다.

STEP2 총합 구하기

이때 $7 + (n-1) \times 7 = 98$ 에서 $n = 14$ 이므로 항수는 14이다.

따라서 구하는 총합은

$$\frac{14(7+98)}{2} = 735$$

(2) **STEP1** 6으로 나누었을 때 나머지가 5인 수의 규칙 알기

100보다 작은 자연수 중에서 6으로 나누었을 때 나머지가 5인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$5, 11, 17, \dots, 95$$

이므로 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열을 이룬다.

STEP2 총합 구하기

이때 $5 + (n-1) \times 6 = 95$ 에서 $n = 16$ 이므로 항수는 16이다.

따라서 구하는 총합은

$$\frac{16(5+95)}{2} = 800$$

09-2 답 12층

해결전략 | 먼저 각 층에 쌓인 블록의 수의 규칙을 알아본다.

STEP1 n 층까지 쌓을 때 필요한 블록의 수 구하기

각 층에 놓인 블록의 수를 1층부터 차례대로 나열하면

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

이 수들은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로

n 층까지 쌓을 때 필요한 블록의 수를 S_n 이라고 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \times 1 + (n-1) \times 2\}}{2} = n^2$$

STEP2 블록 150개로 쌓을 수 있는 층수 구하기

이때 $S_{12} = 12^2 = 144, S_{13} = 13^2 = 169$ 이므로 블록 150개로 탑 모양을 최대 12층까지 쌓을 수 있다.

09-3 답 810

해결전략 | (3 또는 5의 배수의 총합)

$$= (3 \text{의 배수의 총합}) + (5 \text{의 배수의 총합})$$

$$- (3 \text{과 } 5 \text{의 공배수의 총합})$$

STEP1 3의 배수의 총합 구하기

60보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

$$3, 6, 9, \dots, 57$$

이때 $3 + (n-1) \times 3 = 57$ 에서 $n=19$ 이므로 항수는 19이다.

따라서 3의 배수의 총합은

$$\frac{19(3+57)}{2} = 570$$

STEP 2 5의 배수의 총합 구하기

60보다 작은 수 중에서 5의 배수는

5, 10, 15, ..., 55

이때 $5 + (n-1) \times 5 = 55$ 에서 $n=11$ 이므로 항수는 11이다.

따라서 5의 배수의 총합은

$$\frac{11(5+55)}{2} = 330$$

STEP 3 3과 5의 공배수의 총합 구하기

60보다 작은 자연수 중에서 3과 5의 공배수는 15, 30, 45이므로 총합은

$$15 + 30 + 45 = 90$$

STEP 4 3의 배수 또는 5의 배수의 총합 구하기

따라서 3의 배수 또는 5의 배수의 총합은

$$570 + 330 - 90 = 810$$

09-4 ㉮ 170°

해결전략 | n 각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ \times (n-2)$ 이고 이것은 내각의 크기로 이루어진 등차수열의 합과 같다.

STEP 1 내각의 크기의 합을 나타내는 식 구하기

첫째항이 70, 공차가 20, 항수가 n 인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2 \times 70 + (n-1) \times 20\}}{2} = 10n^2 + 60n$$

STEP 2 n 의 값 구하기

n 각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ \times (n-2)$ 이므로

$$10n^2 + 60n = 180(n-2) \text{에서}$$

$$n^2 - 12n + 36 = 0$$

$$(n-6)^2 = 0 \quad \therefore n=6$$

→ n 각형은 한 꼭짓점에서 그은 대각선에 의하여 $(n-2)$ 개의 삼각형으로 나누어지기 때문이다.

STEP 3 가장 큰 내각의 크기 구하기

따라서 조건을 만족시키는 다각형은 육각형이므로 가장 큰 내각의 크기는

$$70^\circ + 5 \times 20^\circ = 170^\circ$$

09-5 ㉮ 23

해결전략 | 부채꼴 $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, \dots, OAB$ 는 모두 닮음임을 이용한다.

STEP 1 부채꼴 OAB 의 반지름의 길이 구하기

부채꼴 OAB 의 반지름의 길이를 r 라고 하면 넓이가 π 이

→ 반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$

므로

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \quad \therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

STEP 2 호의 길이의 규칙 알기

이때 $\widehat{AB} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi, \widehat{A_1B_1} = \frac{1}{20}\widehat{AB}$ 이고, 20개의 호

$A_1B_1, A_2B_2, \dots, AB$ 의 길이는 등차수열을 이룬다.

STEP 3 호의 길이의 총합 구하기

따라서 구하는 호의 길이의 총합은 첫째항이 $\frac{\pi}{20}$, 끝항이 π , 항수가 20인 등차수열의 합이므로

$$\frac{20\left(\frac{\pi}{20} + \pi\right)}{2} = \frac{21}{2}\pi$$

STEP 4 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=2, q=21$ 이므로

$$p+q=23$$

▶참고 부채꼴 $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, \dots, OAB$ 는 모두 닮음이고 그 닮음비는 $1:2:3:\dots:20$ 이다. 따라서 그 호의 길이의 비도

$1:2:3:\dots:20$ 이고, 호 A_1B_1 의 길이가 $\frac{\pi}{20}$ 이므로

호 $A_2B_2, A_3B_3, \dots, AB$ 의 길이는 $\frac{2}{20}\pi, \frac{3}{20}\pi, \dots, \frac{20}{20}\pi$ 이다. 즉,

호 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, AB$ 의 길이는 첫째항이 $\frac{\pi}{20}$, 공차가 $\frac{\pi}{20}$

인 등차수열을 이룬다.

09-6 ㉮ 8

해결전략 | 함수 $y=\tan x$ 는 주기함수이므로 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 의 값은 일정한 규칙으로 커진다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 알기

함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $\tan x=1$ 에서

$$x=n\pi + \frac{\pi}{4} \quad (n \text{은 정수})$$

$$\text{이때 } x>0 \text{이므로 } x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \dots$$

→ $n=0, 1, 2, \dots$ 를 대입한 값이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$, 공차가 π 인 등차수열이다.

STEP 2 n 의 값 구하기

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n\left\{2 \times \frac{\pi}{4} + (n-1) \times \pi\right\}}{2} = 30\pi$$

에서

$$n\left(n - \frac{1}{2}\right) = 60, 2n^2 - n - 120 = 0$$

$$(n-8)(2n+15)=0 \quad \therefore n=8 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

10-1 ㉔ (1) 56 (2) 2910

해결전략 | $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용한다.

(1) STEP1 $a_1, a_{10} + a_{11}$ 의 값 구하기

$$a_1 = S_1 = 1 + 5 = 6$$

$$a_{10} + a_{11} = S_{11} - S_9 = 176 - 126 = 50$$

STEP2 $a_1 + a_{10} + a_{11}$ 의 값 구하기

$$\therefore a_1 + a_{10} + a_{11} = 6 + 50 = 56$$

(2) STEP1 일반항 구하기

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 5n - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\}$$

$$= 2n + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_1 = S_1 = 6$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 4 \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{90}$ 의 값 구하기

한편, $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{90}$ 의 값은 첫째항이

$a_3 = 10$, 끝항이 $a_{90} = 184$, 항수가 30인 등차수열의

합이므로

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{90} = \frac{30(10+184)}{2} = 2910$$

10-2 ㉔ 0

해결전략 | $a_1 = S_1$ 의 값이 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)을 이용하여 얻은 a_n 의 식에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

STEP1 a_1 과 a_n ($n \geq 2$) 구하기

$$a_1 = S_1 = -1 + 3 + k = k + 2$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (-n^2 + 3n + k) - \{-(n-1)^2 + 3(n-1) + k\}$$

$$= -2n + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 k 의 값 구하기

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1 = k + 2$ 가 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 $a_1 = -2 + 4 = 2$ 와 같아야 하므로 $k + 2 = 2 \quad \therefore k = 0$

 풍샘의 비법

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 m 항까지의 합이

$S_n = An^2 + Bn + C$ (A, B, C 는 상수) 꼴일 때

(i) $C=0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

(ii) $C \neq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

10-3 ㉔ 4

해결전략 | $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한다.

STEP1 a_n 구하기

$$a_1 = S_1 = 1 - 11 = -10$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\}$$

$$= 2n - 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_1 = S_1 = -10$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 12 \quad (n \geq 1)$$

STEP2 n 의 값 구하기

이것을 $a_n + n = 0$ 에 대입하면

$$2n - 12 + n = 0 \quad \therefore n = 4$$

10-4 ㉔ 27

해결전략 | $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한다.

STEP1 a_n 구하기

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 = -1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 4n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_1 = S_1 = -1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 5 \quad (n \geq 1)$$

STEP2 n 의 최솟값 구하기

$$a_n > 100 \text{에서 } 4n - 5 > 100 \quad \therefore n > 26.25$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

10-5 ㉔ 0

해결전략 | $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여

$a_8 + a_9 + a_{10}$ 을 k 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 k 의 값 구하기

$$S_n = 2n^2 + kn \text{이므로}$$

$$a_8 + a_9 + a_{10} = S_{10} - S_7$$

$$= 200 + 10k - (98 + 7k)$$

$$= 3k + 102$$

$$\text{즉, } 3k + 102 = 42 \text{에서 } k = -20$$

STEP2 S_{10} 의 값 구하기

$$\text{따라서 } S_n = 2n^2 - 20n \text{이므로}$$

$$S_{10} = 200 - 200 = 0$$

10-6 6

해결전략 | $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_4 , b_4 의 값을 각각 구한다.

STEP1 k 의 값 구하기

$$S_n = 2n^2 - n, T_n = n^2 + kn - 1 \text{이라고 하면}$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 28 - 15 = 13$$

$$b_4 = T_4 - T_3 = 4k + 15 - (3k + 8) = k + 7$$

이때 $a_4 = b_4$ 이므로

$$13 = k + 7 \quad \therefore k = 6$$

STEP2 b_1 의 값 구하기

$$\text{따라서 } T_n = n^2 + 6n - 1 \text{이므로}$$

$$b_1 = T_1 = 1 + 6 - 1 = 6$$

실전 연습 문제

314~316쪽

01 ④	02 ④	03 15	04 ②	05 ③
06 ②	07 11	08 ③	09 ⑤	10 ①
11 ③	12 510	13 ①	14 ①	15 ⑤
16 ④	17 12	18 ③		

01

해결전략 | $a_5 = a_3 + 12$ 에서 수열의 공차를 구한다.

STEP1 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_5 = a_3 + 2d$$

위의 식을 $a_5 = a_3 + 12$ 에 대입하면

$$a_3 + 2d = a_3 + 12$$

$$2d = 12 \quad \therefore d = 6$$

STEP2 a_8 의 값 구하기

$$\therefore a_8 = -4 + 7 \times 6 = 38$$

02

해결전략 | 수열의 일반항을 이용하여 주어진 두 식을 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 \text{에서}$$

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 15$$

$$\therefore a + d = 5 \quad \dots\dots ①$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 39 \text{에서}$$

$$(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 39$$

$$\therefore a + 3d = 13 \quad \dots\dots ②$$

STEP2 공차 구하기

$$② - ① \text{을 하면 } 2d = 8 \quad \therefore d = 4$$

☞ 다른 풀이

$$a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_2 + 2d, a_5 = a_3 + 2d$$

이므로 $a_3 + a_4 + a_5 = 39$ 에서

$$(a_1 + 2d) + (a_2 + 2d) + (a_3 + 2d) = 39$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + 6d = 39$$

$$15 + 6d = 39 \quad \therefore d = 4$$

03

해결전략 | $a_2 = 2$, $a_7 = 32$ 를 각각 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 2 \quad \dots\dots ①$$

$$a_7 = a + 6d = 32 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, d = 6 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a_n = -4 + (n - 1) \times 6 = 6n - 10$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$a_3 = 18 - 10 = 8 \text{이므로 } 10a_3 = a_k \text{에서}$$

$$10 \times 8 = 6k - 10 \quad \therefore k = 15 \quad \dots\dots ④$$

채점 요소	배점
① 첫째항과 공차 구하기	각 30 %
② k 의 값 구하기	40 %

04

해결전략 | 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{k+1} - a_k = (\text{공차})$ 이다.

STEP1 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + 16 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 \text{에서}$$

$$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + (a_7 - a_6) + (a_9 - a_8) = -16$$

$$d + d + d + d = -16$$

$$4d = -16 \quad \therefore d = -4$$

STEP2 일반항 구하기

$$a_5 = 13a_2 \text{에서}$$

$$a_1 + 4 \times (-4) = 13(a_1 - 4)$$

$$12a_1 = 36 \quad \therefore a_1 = 3$$

$$\therefore a_n = 3 + (n - 1) \times (-4) = -4n + 7$$

STEP3 k 의 값 구하기

$$a_k = -4k + 7 = -29 \text{에서}$$

$$-4k = -36 \quad \therefore k = 9$$

05

해결전략 | 첫째항과 끝항을 이용하여 공차를 구한다.

STEP1 일반항 구하기

수열의 일반항을 a_n , 공차를 d 라고 하면 -12 는 제12항
이므로

$$a_{12} = 32 + 11d = -12 \quad \therefore d = -4$$

$$\therefore a_n = 32 + (n-1) \times (-4) = -4n + 36$$

STEP2 8이 제몇 항인지 구하기

$$-4n + 36 = 8 \text{에서 } n = 7$$

따라서 8은 제7항이다.

06

해결전략 | $\log x$ 가 $\log 2$ 와 $5\log 2$ 의 등차중항임을 이용한다.

STEP1 등차중항을 나타내는 식 세우기

로그의 진수의 조건에 의하여 $x > 0$

$\log x$ 는 $\log 2$ 와 $5\log 2$ 의 등차중항이므로

$$2\log x = \log 2 + 5\log 2$$

STEP2 x 의 값 구하기

$$\log x^2 = \log (2 \times 2^5)$$

$$x^2 = 64 \quad \therefore x = 8 \quad (\because x > 0)$$

07

해결전략 | 이차방정식의 좌변을 인수분해하여 두 실근 α, β 를 구한다.

STEP1 이차방정식 풀기

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)(x-n+4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = n-4$$

$$\text{즉, } \alpha = 4, \beta = n-4 \text{ 또는 } \alpha = n-4, \beta = 4$$

STEP2 등차중항을 이용하여 식 세우기

α 는 1과 β 의 등차중항이므로

$$2\alpha = 1 + \beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP3 n 의 값 구하기

(i) $\alpha = 4, \beta = n-4$ 일 때

$$\alpha < \beta \text{이므로}$$

$$4 < n-4 \quad \therefore n > 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 \times 4 = 1 + (n-4) \quad \therefore n = 11$$

이때 $n = 11$ 은 $n > 8$ 을 만족시킨다.

(ii) $\alpha = n-4, \beta = 4$ 일 때

$$\alpha < \beta \text{이므로 } n-4 < 4 \quad \therefore n < 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2(n-4) = 1+4 \quad \therefore n = \frac{13}{2}$$

이때 $n = \frac{13}{2}$ 은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 자연수 n 의 값은 11이다.

08

해결전략 | 등차수열을 이루는 물의 양을 $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ 로 놓는다.

STEP1 문제에 알맞은 식 세우기

5개의 컵에 들어 있는 물의 양을 적은 쪽부터 차례대로 $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ 로 놓으면 물의 양이 모두 800 mL이므로

$$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 800$$

STEP2 컵 C에 들어 있는 물의 양 구하기

$$5a = 800 \quad \therefore a = 160$$

따라서 컵 C에 들어 있는 물의 양은 160 mL이다.

09

해결전략 | 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 로 놓고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP1 삼차방정식의 한 실근 구하기

$x^3 - 6x^2 + mx + n = 0$ 의 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 6$$

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

STEP2 $2m+n$ 의 값 구하기

따라서 삼차방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 - 24 + 2m + n = 0$$

$$\therefore 2m + n = 16$$

10

해결전략 | 수를 넣어서 만든 수열에서 -9 가 제몇 항인지 알아본다.

STEP1 공차 구하기

수를 넣어서 만든 수열의 공차를 d 라고 하면 이 수열의

첫째항이 18, 제10항이 -9 이므로

$$18 + 9d = -9 \quad \therefore d = -3$$

STEP 2 $x_1 + x_2 + \dots + x_8$ 의 값 구하기

따라서 $x_1 + x_2 + \dots + x_8$ 의 값은 첫째항이

$x_1 = 18 + d = 15$, 끝항이 $x_8 = -9 - d = -6$, 항수가 8인 등차수열의 합이므로

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 = \frac{8\{15 + (-6)\}}{2} = 36$$

☞ **다른 풀이**

STEP 1 수를 넣어서 만든 수열의 총합 구하기

수를 넣어서 만든 수열은 첫째항이 18, 끝항이 -9 , 항수가 10이므로

$$18 + x_1 + x_2 + \dots + (-9) = \frac{10(18 - 9)}{2} = 45$$

STEP 2 $x_1 + x_2 + \dots + x_8$ 의 값 구하기

$$\therefore x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 45 - 18 + 9 = 36$$

11

해결전략 | 일반항 a_n 을 구하여 $a_k = 0$ 을 만족시키는 k 의 값을 먼저 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_5 = a + 4d = 30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_8 = a + 7d = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 54, d = -6$$

$$\therefore a_n = 54 + (n-1) \times (-6) = -6n + 60$$

STEP 2 k 의 값 구하기

$$a_k = -6k + 60 = 0 \text{에서 } k = 10$$

STEP 3 S_k 의 값 구하기

$$\therefore S_{10} = \frac{10(54 + 0)}{2} = 270$$

12

해결전략 | 등차수열의 합 공식을 이용하여 주어진 식에서 첫째항을 구한다.

STEP 1 첫째항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로 첫째항을 a 라고 하면

$$S_{13} - S_3 = 195 \text{에서}$$

$$\frac{13(2a + 12 \times 3)}{2} - \frac{3(2a + 2 \times 3)}{2} = 195$$

$$10a + 225 = 195 \quad \therefore a = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP 2 S_{20} 의 값 구하기

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times (-3) + 19 \times 3\}}{2} = 510 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

채점 요소	배점
① 첫째항 구하기	50 %
② S_{20} 의 값 구하기	50 %

13

해결전략 | 공차가 양수이므로 $S_9 > S_3$ 임을 이용하여 절댓값을 푼다.

STEP 1 S_9, S_3 의 값 구하기

공차가 양수이므로 $S_9 > S_3$ 이고

$S_9 = |S_3|$ 이므로 $S_9 = -S_3$ → 공차가 양수이므로 항의 값은 점점 커진다. 따라서 그 합도 커지므로 $S_9 > S_3$

$$\text{즉, } S_9 = 27, S_3 = -27$$

STEP 2 첫째항과 공차에 대한 식 세우기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_9 = \frac{9(2a + 8d)}{2} = 27 \text{에서}$$

$$a + 4d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_3 = \frac{3(2a + 2d)}{2} = -27 \text{에서}$$

$$a + d = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP 3 a_{10} 의 값 구하기

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -13, d = 4$$

$$\therefore a_{10} = -13 + 9 \times 4 = 23$$

☞ **다른 풀이**

STEP 1 첫째항과 공차 구하기

$$S_9 = 27 \text{에서 } \frac{9(2a + 8d)}{2} = 27$$

$$\therefore a + 4d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|S_3| = 27 \text{에서 } \left| \frac{3(2a + 2d)}{2} \right| = 27$$

$$|a + d| = 9 \quad \therefore a + d = 9 \text{ 또는 } a + d = -9$$

(i) $a + d = 9$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{과 } a + d = 9 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$a = 11, d = -2$$

이것은 $d > 0$ 인 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a + d = -9$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{과 } a + d = -9 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$a = -13, d = 4$$

이것은 $d > 0$ 인 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a = -13, d = 4$

STEP 2 a_{10} 의 값 구하기

$$\therefore a_{10} = -13 + 9 \times 4 = 23$$

14

해결전략 | $a_3 > a_9$ 에서 공차가 음수이므로 첫째항부터 음수가 아닌 항까지의 합이 최대가 된다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_9 = a + 8d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 32, d = -3$$

$$\therefore a_n = 32 + (n-1) \times (-3) = -3n + 35$$

STEP2 처음으로 음수가 나오는 항 구하기

$a_n = -3n + 35 < 0$ 에서 $n > 11.6\dots$ 이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제12항이다.

STEP3 합이 최대가 되는 n 의 값 구하기

따라서 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이므로 $n = 11$ 이다.

15

해결전략 | S_n 의 최댓값은 양수인 모든 항들의 합이다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 + a_3 = 50 \text{에서}$$

$$(a+d) + (a+2d) = 50$$

$$\therefore 2a + 3d = 50 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_5 = 34 \text{에서}$$

$$(a+3d) + (a+4d) = 34$$

$$\therefore 2a + 7d = 34 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 31, d = -4$$

$$\therefore a_n = 31 + (n-1) \times (-4) = -4n + 35$$

STEP2 처음으로 음수가 나오는 항 구하기

$a_n = -4n + 35 < 0$ 에서 $n > 8.75$ 이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제9항이다.

STEP3 S_n 의 최댓값 구하기

따라서 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이므로 S_n 의 최댓값은

$$S_8 = \frac{8\{2 \times 31 + 7 \times (-4)\}}{2} = 136$$

16

해결전략 | $4k+3$ 은 4로 나누었을 때 나머지가 3인 수이므로 집합 A 의 원소는 일정한 규칙으로 커진다.

STEP1 집합 A 의 원소 알아보기

$A = \{7, 11, 15, \dots\}$ 이므로 집합 A 의 원소는 첫째항이 7이고 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

STEP2 100보다 작은 원소 중 가장 큰 원소 구하기

등차수열 7, 11, 15, ...의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 7 + (n-1) \times 4 = 4n + 3$$

이므로 100보다 작은 원소 중 가장 큰 원소는 $a_{24} = 99$ 이다.
 $\rightarrow 4n+3 < 100$ 에서 $4n < 97 \quad \therefore n < 24.25$

STEP3 100보다 작은 모든 원소의 합 구하기

따라서 100보다 작은 모든 원소의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24} = \frac{24(7+99)}{2} = 1272$$

17

해결전략 | $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

$$a_1 = S_1 = 2 + 1 = 3$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + n) - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = S_1 = 3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 1 \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 n 의 최솟값 구하기

따라서 $a_n = 4n - 1 > 44$ 에서 $n > 11.25$ 이므로 $\dots\dots \textcircled{2}$

n 의 최솟값은 12이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

채점 요소	배점
① 일반항 구하기	60 %
② $a_n > 44$ 를 만족시키는 n 의 값의 범위 구하기	20 %
③ n 의 최솟값 구하기	20 %

18

해결전략 | $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여

$S_{n+2} - S_n = 8n$ 을 항들의 합 꼴로 나타낸다.

STEP1 $S_{n+2} - S_n = 8n$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} \text{이므로}$$

$$S_{n+2} - S_n = 8n \text{에서}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 8n$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$\{a + (n+1)d\} + \{a + nd\} = 8n$$

$$\therefore (2d-8)n + 2a + d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 공차 구하기

㉠은 n 에 대한 항등식이므로

$$2d - 8 = 0, 2a + d = 0$$

$$\therefore d = 4, a = -2$$

따라서 수열의 공차는 4이다.

☞ 다른 풀이

STEP1 $S_{n+2} - S_n = 8n$ 을 항들의 합 꼴로 나타내기

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} \text{ 이므로}$$

$$S_{n+2} - S_n = 8n \text{ 에서}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 8n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 공차 구하기

㉠에 $n=1$ 을 대입하면 $a_3 + a_2 = 8$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면 $a_4 + a_3 = 16$

이때 수열의 공차를 d 라고 하면

$$a_4 + a_3 = (a_3 + d) + (a_2 + d) = (a_3 + a_2) + 2d \text{ 이므로}$$

$$8 + 2d = 16 \quad \therefore d = 4$$

상위권 도약 문제

317~318쪽

01 34	02 ①	03 10	04 80
05 330	06 17	07 ③	08 5050

01

해결전략 | 직선 l 의 방정식을 구하면 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.

STEP1 일반항 a_n 구하기

직선 l 의 방정식은 $y = mx + 200$ 이므로

$$a_n = mn + 200$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 -6 인 등차수열이므로

$$m = -6$$

$$\therefore a_n = -6n + 200$$

STEP2 n 의 최솟값 구하기

점 $P_n(n, a_n)$ 이 제4사분면 위의 점이라면

$$a_n = -6n + 200 < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$n > 33.3 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 34이다.

☞ 풀법의 비법

$d \neq 0$ 일 때 $a_n = a + (n-1)d = dn + (a-d)$ 에서 일반항 a_n 은 n 에 대한 일차식이다. 이때 n 의 계수는 수열 $\{a_n\}$ 의 공차이다.

02

해결전략 | 두 조건을 첫째항과 공차에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라고 하면

$$a_6 + a_8 = (a + 5d) + (a + 7d) = 0 \text{ 에서}$$

$$2a + 12d = 0 \quad \therefore a = -6d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|a_6| = |a_7| + 3 \text{ 에서}$$

$$|a + 5d| = |a + 6d| + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$|-6d + 5d| = |-6d + 6d| + 3$$

$$|-d| = 3$$

$$\therefore d = 3 \quad (\because d > 0)$$

STEP2 첫째항 구하기

$d = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$a = -6 \times 3 = -18$$

STEP3 a_2 의 값 구하기

$$\therefore a_2 = -18 + 3 = -15$$

☞ 다른 풀이

STEP1 a_6, a_7 의 값 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 a_7 은 a_6 과 a_8 의 등차중항이므로

$$2a_7 = a_6 + a_8$$

조건 ㉠에서 $a_6 + a_8 = 0$ 이므로

$$2a_7 = 0 \quad \therefore a_7 = 0$$

이것을 조건 ㉡에 대입하면

$$|a_6| = 3$$

이때 공차가 양수이고 $a_7 = 0$ 이므로

$$a_6 < 0 \quad \therefore a_6 = -3$$

STEP2 공차 구하기

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$d = a_7 - a_6 = 0 - (-3) = 3$$

STEP3 a_2 의 값 구하기

$$\therefore a_2 = a_6 - 4d = -3 - 4 \times 3 = -15$$

03

해결전략 | 수를 넣어서 만든 수열은 첫째항이 -2 ,

제 $(m+2)$ 항이 12, 제 $(m+11)$ 항이 30인 등차수열이다.

STEP1 m 의 값 구하기

등차수열의 일반항을 a_n , 공차를 d 라고 하면

12는 제 $(m+2)$ 항이므로

$$a_{m+2} = -2 + (m+1)d = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

30은 제 $(m+11)$ 항이므로

$$a_{m+11} = -2 + (m+10)d = 30 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m=6, d=2$$

STEP 2 x_m 의 값 구하기

따라서 $a_n = -2 + (n-1) \times 2 = 2n-4$ 이므로

$$x_m = x_6 = a_7 = 14 - 4 = 10$$

04

해결전략 | b 가 a 와 c 의 등차중항임을 이용하여 조건 (가)에서 b 의 값을 구한다.

STEP 1 b 의 값 구하기

b 는 a 와 c 의 등차중항이므로

$$2b = a + c$$

..... ㉠

조건 (가)에서 $2^{a+c-b} = 32 = 2^5$ 이므로

$$a + c - b = 5$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$2b - b = 5 \quad \therefore b = 5$$

STEP 2 ac 의 값 구하기

㉠에서 $a + c = 2 \times 5 = 10$

조건 (나)에서 $a + c + ca = 26$ 이므로

$$10 + ca = 26 \quad \therefore ca = 16$$

STEP 3 abc 의 값 구하기

$$\therefore abc = 16 \times 5 = 80$$

05

해결전략 | 두 수열의 첫째항을 a , 공차를 각각 d, d' 으로 놓고 문제의 조건에 알맞은 식을 세운다.

STEP 1 두 수열의 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항을 a, b , 공차를 각각 d, d' 이라고 하면

$$a_6 - a_4 = 8 \text{에서 } 2d = 8 \quad \therefore d = 4$$

$$b_7 - b_3 = 8 \text{에서 } 4d' = 8 \quad \therefore d' = 2$$

STEP 2 두 수열의 일반항 구하기

$$a_5 = 2b_8 \text{에서}$$

$$a + 4d = 2(a + 7d'), a - 4d + 14d' = 0$$

$$a - 16 + 28 = 0 \quad \therefore a = -12$$

따라서 두 수열의 일반항은

$$a_n = -12 + (n-1) \times 4 = 4n - 16$$

$$b_n = -12 + (n-1) \times 2 = 2n - 14$$

STEP 3 $a_6 + b_6 + a_7 + b_7 + \dots + a_{15} + b_{15}$ 의 값 구하기

이때 $a_6 = 8, b_6 = -2, a_{15} = 44, b_{15} = 16$ 이므로

$$a_6 + b_6 + a_7 + b_7 + \dots + a_{15} + b_{15}$$

$$= (a_6 + a_7 + \dots + a_{15}) + (b_6 + b_7 + \dots + b_{15})$$

$$= \frac{10(8+44)}{2} + \frac{10(-2+16)}{2} = 260 + 70 = 330$$

06

해결전략 | $n < 36$ 일 때 $S_n > 0, n > 36$ 일 때 $S_n < 0$ 임을 이용하여 규칙을 찾는다.

STEP 1 $S_{36} = 0$ 의 의미 파악하기

공차가 음수이고 $S_{36} = 0$ 이므로 $n < 36$ 이면 $S_n > 0$ 이고,

$n > 36$ 이면 $S_n < 0$ 이다.

또, $36 < l < m$ 이면 $S_m < S_l < 0$ 이므로 $S_l = S_m < 0$ 인 서로 다른 두 자연수 l, m 은 존재하지 않는다.

$$\therefore 1 < l < m < 36$$

$$S_{36} = \frac{36(a_1 + a_{36})}{2} = 0 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_{36} = 0$$

STEP 2 순서쌍 (l, m) 의 개수 구하기

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1 + a_{36} = a_2 + a_{35} = a_3 + a_{34} = \dots = a_{18} + a_{19} = 0$$

이 성립한다.

$$a_{18} + a_{19} = 0 \text{이므로 } S_{17} = S_{19} \begin{matrix} \rightarrow S_{19} = S_{17} + (a_{18} + a_{19}) \\ = S_{17} + 0 = S_{17} \end{matrix}$$

$$a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} = 0 \text{이므로 } S_{16} = S_{20}$$

$$a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} = 0 \text{이므로 } S_{15} = S_{21}$$

$\vdots$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{35} = 0 \text{이므로 } S_1 = S_{35}$$

따라서 구하는 순서쌍 (l, m) 은

$$(17, 19), (16, 20), (15, 21), \dots, (1, 35)$$

의 17개이다.

🔗 풀법의 비법

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항을 l 이라고 하면

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, \dots,$$

$$a_{n-2} = l - 2d, a_{n-1} = l - d, a_n = l$$

이므로

$$a_1 + a_n = a + l$$

$$a_2 + a_{n-1} = a + d + l - d = a + l$$

$$a_3 + a_{n-2} = a + 2d + l - 2d = a + l$$

$\vdots$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

$$= \dots$$

가 성립한다.

07

해결전략 | 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 로 놓으면 문제에서 주어진 조건을 미지수가 a, d, k 인 방정식으로 나타낼 수 있다.

STEP1 a, d, k 에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = 42 \text{에서}$$

$$a = 42 - 2d \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

조건 (가)의 $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$ 에서

$$\{a + (k-4)d\} + \{a + (k-2)d\} = -24$$

$$\therefore a + (k-3)d = -12 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

조건 (나)의 $S_k = k^2$ 에서

$$\frac{k\{2a + (k-1)d\}}{2} = k^2$$

이때 $k > 0$ 이므로

$$2a + (k-1)d = 2k \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$42 - 2d + (k-3)d = -12$$

$$\therefore (k-5)d = -54 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$2(42 - 2d) + (k-1)d = 2k$$

$$\therefore (k-5)d = 2k - 84 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{D}, \textcircled{E} \text{에서 } 2k - 84 = -54$$

$$2k = 30 \quad \therefore k = 15$$

08

해결전략 | 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d 이면 수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 는 공차가 $2d$ 인 등차수열임을 이용하여 주어진 식에서 공차를 구한다.

STEP1 $b_n = a_{2n-1}$ 로 놓고 일반항 b_n 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하자.

또, $a_{2n-1} = b_n$ 이라고 하면 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이

$b_1 = a_1$, 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

이때 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$= a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$$

$$= 2n^2 - n$$

이므로

$$S_n = 2n^2 - n$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= 4n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

$b_1 = S_1 = 1$ 은 $\textcircled{F}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 4n - 3 \quad (n \geq 1)$$

STEP2 일반항 a_n 구하기

$\rightarrow b_n = 4n - 3$ 에서 공차는 n 의 계수 4이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이

므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $\frac{4}{2} = 2$ 인 등차수열이다.

$\rightarrow$ 첫째항은 같고, 공차는 수열 $\{b_n\}$ 의 공차의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1 \quad (n \geq 1)$$

STEP3 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$ 의 값 구하기

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$ 의 값은 첫째항이

$$a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3, \text{ 끝항이 } a_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199,$$

항수가 50인 등차수열의 합이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = \frac{50(3 + 199)}{2} = 5050$$

01 **답** (1) $a_n = -5 \times 2^{n-1}$ (2) $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n 은 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

02 **답** (1) $-12, 12$ (2) $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

(1) 세 수 4, x , 36이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x 는 4와 36의 등비중항이므로

$$x^2 = 4 \times 36 = 144 \quad \therefore x = -12 \text{ 또는 } x = 12$$

(2) 세 수 $\frac{1}{4}$, x , $\frac{1}{25}$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루면

x 는 $\frac{1}{4}$ 과 $\frac{1}{25}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{100} \quad \therefore x = -\frac{1}{10} \text{ 또는 } x = \frac{1}{10}$$

03 **답** $5(2^{10}-1)$

04 **답** (1) $S_n = 160 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$ (2) $S_n = 4^n - 1$

(1) 주어진 수열은 첫째항이 80, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{80 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 160 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1$$

05 **답** (1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $a_1 = 11, a_n = 8 \times 3^{n-1} (n \geq 2)$

(1) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 - 1 = 1$ ㉠

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 ㉠은 $n=1$ 을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항은

$$a_n = 2^{n-1}$$

(2) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 4 \times 3 - 1 = 11$ ㉠

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 4 \times 3^n - 1 - (4 \times 3^{n-1} - 1) \\ &= 4 \times 3 \times 3^{n-1} - 4 \times 3^{n-1} = 8 \times 3^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 ㉠은 $n=1$ 을 ㉡에 대입한 값 8과 다르므로 일반항은

$$a_1 = 11, a_n = 8 \times 3^{n-1} (n \geq 2)$$

01-1 **답** (1) 30 (2) 제8항

해결전략 | 등비수열의 두 항을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

(1) **STEP1** 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2 = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_5 = ar^4 = 16 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{16}{4}, \text{ 즉 } r^2 = 4$$

$$\therefore r = 2 (\because r > 0)$$

STEP2 일반항 구하기

$$r=2 \text{를 } \text{㉠에 대입하면 } 4a=4 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}$$

STEP3 $a_6 - a_2$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_6 = 2^5 = 32, a_2 = 2 \text{이므로}$$

$$a_6 - a_2 = 32 - 2 = 30$$

(2) **STEP1** 128을 제 k 항으로 놓고 식 세우기

128을 제 k 항이라고 하면 $a_k = 2^{k-1} = 128$ 에서

$$2^{k-1} = 128 = 2^7$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$k-1=7 \quad \therefore k=8$$

따라서 128은 제8항이다.

01-2 **답** $\frac{1}{16}$

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구한 다음 a_n^2 을 계산한다.

STEP1 등비수열 $\{a_n^2\}$ 의 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1}$ 이므로

$$a_n^2 = \left\{ 2 \times \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right\}^2 = 4 \times \left(\frac{1}{64} \right)^{n-1}$$

STEP2 수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항과 공비의 곱 구하기

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항은 4, 공비는 $\frac{1}{64}$ 이므로 구

$$\text{하는 곱은 } 4 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$$

☞ 풀썸의 비법

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a_1^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이다.

01-3 답 125

해결전략 | 첫째항과 공비가 모두 양수임을 이용하여 주어진 조건에서 공비를 구한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$4a_3 + 5a_2 = a_4 \text{에서 } 4ar^2 + 5ar = ar^3$$

$$ar(r^2 - 4r - 5) = 0$$

$$ar > 0 \text{이므로 } a > 0, r > 0 \text{이므로 } ar > 0$$

$$r^2 - 4r - 5 = 0, (r+1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 5 (\because r > 0)$$

STEP2 $\frac{a_8}{a_5}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{a_8}{a_5} = \frac{ar^7}{ar^4} = r^3 = 125$$

01-4 답 7

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \frac{a_{n+2}}{a_n} = r^2 \text{이다.}$$

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\frac{a_8}{a_6} = \frac{ar^7}{ar^5} = 16 \text{에서 } r^2 = 16$$

$$\therefore r = 4 (\because r > 0) \rightarrow a_n = ar^{n-1}$$

STEP2 첫째항과 공비의 합 구하기

$$a_2 + a_3 = ar + ar^2 = 60 \text{에서}$$

$$4a + 16a = 60, 20a = 60 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항과 공비의 합은

$$3 + 4 = 7$$

01-5 답 6

해결전략 | 주어진 비례식에서 $a_5 = 2a_4$ 이므로 이 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2 = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 : a_5 = 1 : 2 \text{에서 } a_5 = 2a_4 \text{이므로}$$

$$ar^4 = 2ar^3, ar^3(r-2) = 0$$

$$\therefore r = 2 (\because a \neq 0, r > 0)$$

STEP2 일반항 구하기

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{3}{8} \quad \therefore a_n = \frac{3}{8} \times 2^{n-1}$$

STEP3 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_k = \frac{3}{8} \times 2^{k-1} = 12 \text{에서}$$

$$2^{k-1} = 32 = 2^5 \quad \therefore k = 6$$

$$\text{▶참고 } a_3 = \frac{3}{2} \text{이므로 } a_4 = \frac{3}{2}r, a_5 = \frac{3}{2}r^2$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2}r : \frac{3}{2}r^2 = 1 : 2 \text{에서 } r \text{의 값을 구해도 된다.}$$

01-6 답 12

해결전략 | 주어진 두 식을 각각 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_3 + a_2 = a_1r^2 + a_1r = 1 \text{에서}$$

$$a_1r(r+1) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 - a_4 = a_1r^5 - a_1r^3 = 18 \text{에서}$$

$$a_1r^3(r^2-1) = 18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{a_1r^3(r^2-1)}{a_1r(r+1)} = 18$$

$$r^2(r-1) = 18, r^3 - r^2 - 18 = 0$$

$$(r-3)(r^2+2r+6) = 0$$

$$\therefore r = 3 (\because r \text{는 실수})$$

STEP2 $\frac{1}{a_1}$ 의 값 구하기

$$r = 3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3a_1 \times 4 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{12} \quad \therefore \frac{1}{a_1} = 12$$

필수유형 02

325쪽

02-1 답 제10항

해결전략 | 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항 a_n 을 구한다.

(1) STEP1 일반항 구하기

첫째항이 $\frac{1}{81}$, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{81} \times 3^{n-1} = 3^{n-5}$$

STEP2 처음으로 200보다 커지는 항 구하기

제 n 항에서 처음으로 200보다 커진다고 하면

$$a_n = 3^{n-5} > 200$$

$$\text{이때 } 3^4 = 81, 3^5 = 243 \text{이므로}$$

$$n-5 \geq 5 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 처음으로 200보다 커지는 항은 제10항이다.

02-2 ㉮ 제7항

해결전략 | 등비수열의 두 항을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 = ar^4 = \frac{5}{32} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{5}{4}}, \text{ 즉 } r^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{5}{4} \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

STEP2 처음으로 $\frac{1}{20}$ 보다 작아지는 항 구하기

제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{20}$ 보다 작아진다고 하면

$$a_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{20} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}, \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} \text{이므로}$$

$$n \geq 7$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{20}$ 보다 작아지는 항은 제7항이다.

02-3 ㉮ 4

해결전략 | 등비수열의 두 항을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2 = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 = ar^4 = \frac{1}{54} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{6}}, \text{ 즉 } r^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore r = \frac{1}{3} \quad (\because r > 0)$$

$$r = \frac{1}{3} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{9}a = \frac{1}{6} \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$8a_k = \frac{4}{9} \text{에서 } a_k = \frac{1}{18} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{18}, \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$k-2=2 \quad \therefore k=4$$

02-4 ㉮ 3

해결전략 | 등비수열에서 두 항에 대한 비율이 주어지면 공비를 구할 수 있다.

STEP1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\frac{a_9}{a_7} = \frac{ar^8}{ar^6} = 4 \text{에서 } r^2 = 4$$

$$\therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

$$a_4 - a_2 = -24 \text{에서 } a_4 = a \times (-2)^3 = -8a,$$

$$a_2 = a \times (-2) = -2a$$

이므로

$$-8a - (-2a) = -24$$

$$-6a = -24 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a_n = 4 \times (-2)^{n-1}$$

STEP2 항의 절댓값이 두 자리 수인 것의 개수 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4, -8, 16, -32, 64, -128, ...이므로 항의 절댓값이 두 자리 수인 것은 16, -32, 64의 3개이다.

02-5 ㉮ 제8항

해결전략 | 일반항을 구한 다음 100에 가까운 항을 추론하여 그 값을 알아본다.

STEP1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_4 - a_2 = ar^3 - ar = 6 \text{에서}$$

$$ar(r^2 - 1) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 - a_5 = ar^6 - ar^4 = 48 \text{에서}$$

$$ar^4(r^2 - 1) = 48 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^4(r^2 - 1)}{ar(r^2 - 1)} = \frac{48}{6}, \text{ 즉 } r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 6a = 6 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}$$

STEP2 100에 가장 가까운 항 구하기

이때 $a_7 = 2^6 = 64$, $a_8 = 2^7 = 128$ 이므로

100에 가장 가까운 항은 a_8 이다. 즉, 제8항이다.

02-6 답 5

해결전략 | $a_5 + a_7$ 과 a_6 의 비율이 주어졌으므로 수열의 공비를 구할 수 있다.

STEP 1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_1 a_2 = a \times ar = 12 \text{에서}$$

$$a^2 r = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_5 + a_7}{a_6} = \frac{ar^4 + ar^6}{ar^5} = \frac{10}{3} \text{에서}$$

$$\frac{1+r^2}{r} = \frac{10}{3}, \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r-1)(r-3) = 0 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 1)$$

$$r = 3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3a^2 = 12$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

STEP 2 k 의 값 구하기

$$a_{k+1} = 2 \times 3^k \text{이므로}$$

$$200 < 2 \times 3^k < 500, \quad 100 < 3^k < 250$$

$$\text{이때 } 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243 \text{이므로}$$

$$k = 5$$

필수유형 03

327쪽

03-1 답 6, 12, 24 또는 -6, 12, -24

해결전략 | 수를 넣어서 만든 수열에서 끝항이 제몇 항인지 알아본다.

STEP 1 공비 구하기

등비수열의 공비를 r 라고 하면 48은 제5항이므로

$$3r^4 = 48, \quad r^4 = 16 \quad \therefore r = \pm 2$$

STEP 2 세 수 구하기

(i) $r = 2$ 일 때

$$x_1 = 3 \times 2 = 6, \quad x_2 = 6 \times 2 = 12, \quad x_3 = 12 \times 2 = 24$$

(ii) $r = -2$ 일 때

$$x_1 = 3 \times (-2) = -6, \quad x_2 = -6 \times (-2) = 12,$$

$$x_3 = 12 \times (-2) = -24$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 세 수는 6, 12, 24 또는 -6, 12, -24이다.

03-2 답 -32

해결전략 | -32가 제6항임을 이용하여 공비를 구한다.

STEP 1 공비 구하기

등비수열의 공비를 r 라고 하면 -32는 제6항이므로

$$1 \times r^5 = -32 \quad \therefore r = -2$$

STEP 2 $\frac{x_3 x_4}{x_2}$ 의 값 구하기

이때 x_2 는 제3항, x_3 은 제4항, x_4 는 제5항이므로

$$x_2 = 1 \times (-2)^2 = 4$$

$$x_3 = 1 \times (-2)^3 = -8$$

$$x_4 = 1 \times (-2)^4 = 16$$

$$\therefore \frac{x_3 x_4}{x_2} = \frac{-8 \times 16}{4} = -32$$

03-3 답 7

해결전략 | $\frac{1}{4}$ 이 제 $(n+2)$ 항임을 이용하여 n 에 대한 식을 세운다.

STEP 1 n 에 대한 식 세우기

등비수열의 첫째항은 64, 공비는 $\frac{1}{2}$ 이고 $\frac{1}{4}$ 은 제 $(n+2)$ 항이므로

$$64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}$$

STEP 2 n 의 값 구하기

$$2^6 \times 2^{-n-1} = 2^{-2}, \quad 2^{-n+5} = 2^{-2}$$

$$-n+5 = -2 \quad \therefore n = 7$$

03-4 답 8

해결전략 | 첫째항이 3, 제6항이 96임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면 96은 제6항이므로

$$3r^5 = 96, \quad r^5 = 32 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

STEP 2 n 의 최솟값 구하기

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} > 300 \text{에서 } 2^{n-1} > 100$$

$$\text{이때 } 2^6 = 64, \quad 2^7 = 128 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 구하는 n 의 최솟값은 8이다.

03-5 답 4

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 2는 제4항, $\frac{243}{16}$ 은 제 $(n+5)$ 항임을 이용하여 일반항을 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면 2는 제4항이므로

$$\frac{16}{27} \times r^3 = 2$$

$$r^3 = \frac{27}{8} \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{16}{27} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

STEP 2 n 의 값 구하기

$$\frac{243}{16} \text{은 제}(n+5)\text{항이므로}$$

$$\frac{16}{27} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+4} = \frac{243}{16}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+4} = \frac{243}{16} \times \frac{27}{16} = \frac{3^8}{2^8} = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

$$n+4=8 \quad \therefore n=4$$

03-6 ㉮ 7

해결전략 | 만든 등비수열에서 4와 -32 가 각각 제몇 항인지 알아본다.

STEP 1 첫째항과 공비 구하기

등비수열 $a, x_1, x_2, x_3, 4, x_4, x_5, -32$ 의 공비를 r 라고 하면 4는 제5항, -32 는 제8항이므로

$$ar^4 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^7 = -32 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{ar^7}{ar^4} = \frac{-32}{4}$$

$$r^3 = -8 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = -2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 16a = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

STEP 2 x_4, x_5 의 값 구하기

이때 x_4 는 제6항, x_5 는 제7항이므로

$$x_4 = \frac{1}{4} \times (-2)^5 = -8 \quad \rightarrow \text{새로 만든 수열에서 항의 순서 임에 주의}$$

$$x_5 = \frac{1}{4} \times (-2)^6 = 16$$

STEP 3 $\log_2 |x_4 x_5|$ 의 값 구하기

$$\therefore \log_2 |x_4 x_5| = \log_2 |-128| = \log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$$

필수유형 04

329쪽

04-1 ㉮ $\frac{25}{4}$

해결전략 | 등비중항을 이용하여 식을 세운다.

STEP 1 x 의 값 구하기

x 는 10과 $\frac{5}{2}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = 10 \times \frac{5}{2} = 25 \quad \therefore x = 5 \quad (\because x > 0)$$

STEP 2 y 의 값 구하기

$\frac{5}{2}$ 는 x 와 y , 즉 5와 y 의 등비중항이므로

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5y \quad \therefore y = \frac{5}{4}$$

STEP 3 $x+y$ 의 값 구하기

$$\therefore x+y = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

04-2 ㉮ $-2, \frac{1}{2}$

해결전략 | 등비중항을 이용하여 식을 세운다.

STEP 1 등비중항을 이용하여 식 세우기

$-x+2$ 는 x 와 $5x+2$ 의 등비중항이므로

$$(-x+2)^2 = x(5x+2)$$

STEP 2 x 의 값 구하기

$$x^2 - 4x + 4 = 5x^2 + 2x, \quad 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0, \quad (x+2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

04-3 ㉮ $\sqrt{7}$

해결전략 | 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구한다.

STEP 1 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기

이차방정식 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 1$

STEP 2 k 의 값 구하기

k 는 $\alpha+1$ 과 $\beta+1$ 의 등비중항이므로

$$k^2 = (\alpha+1)(\beta+1)$$

$$= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 1 + 5 + 1 = 7$$

$$\therefore k = \sqrt{7} \quad (\because k > 0)$$

㉮ 품셈의 비법

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

04-4 ㉮ $\frac{\sqrt{15}}{15}$

해결전략 | 등비중항을 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운 후 삼각방정식을 푼다.

STEP 1 $\sin \theta$ 의 값 구하기

$2 \cos \theta$ 는 1과 $15 \sin \theta$ 의 등비중항이므로

$$(2 \cos \theta)^2 = 1 \times 15 \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
4\cos^2\theta &= 15\sin\theta \\
4(1-\sin^2\theta) &= 15\sin\theta \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
4\sin^2\theta + 15\sin\theta - 4 &= 0 \\
(4\sin\theta - 1)(\sin\theta + 4) &= 0 \\
\therefore \sin\theta &= \frac{1}{4} \quad (\because \sin\theta > 0)
\end{aligned}$$

STEP2 $\cos\theta$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \text{ 이므로} \\
\cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
\therefore \cos\theta &= \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because \cos\theta > 0)
\end{aligned}$$

STEP3 $\tan\theta$ 의 값 구하기

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

04-5 답 -48

해결전략 | 공비가 주어져 있으므로 a_2, a_6 을 첫째항에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 첫째항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면 공비가 2이므로

$$a_2 = 2a, \quad a_6 = a \times 2^5 = 32a$$

6은 a_2 와 a_6 의 등비중항이므로

$$6^2 = a_2 \times a_6$$

$$2a \times 32a = 36, \quad a^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4} \quad (\because a < 0)$$

STEP2 a_7 의 값 구하기

따라서 $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right) \times 2^{n-1}$ 이므로

$$a_7 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times 2^6 = -48$$

04-6 답 -15

해결전략 | 등차중항, 등비중항을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.

STEP1 등차중항, 등비중항을 이용하여 식 세우기

b 는 a 와 6의 등차중항이므로

$$2b = a + 6, \quad \text{즉 } a = 2b - 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

6은 a 와 b 의 등비중항이므로

$$6^2 = ab, \quad \text{즉 } ab = 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 $a+b$ 의 값 구하기

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(2b-6)b = 36, \quad b^2 - 3b - 18 = 0$$

$$(b+3)(b-6) = 0 \quad \therefore b = -3 \text{ 또는 } b = 6$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(i) \quad b = -3 \text{ 일 때, } a = -12$$

$$(ii) \quad b = 6 \text{ 일 때, } a = 6$$

이것은 a, b 가 서로 다른 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } a = -12, \quad b = -3$$

$$\therefore a + b = -12 + (-3) = -15$$

필수유형 05

331쪽

05-1 답 84

해결전략 | 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓고 식을 세운다.

STEP1 공비 구하기

등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 수의 합이 14이므로

$$a + ar + ar^2 = 14$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수의 곱이 64이므로

$$a \times ar \times ar^2 = 64, \quad (ar)^3 = 64$$

$$\therefore ar = 4 \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{14}{4}, \quad \text{즉 } \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0, \quad (2r-1)(r-2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

STEP2 세 수의 제곱의 합 구하기

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$r = \frac{1}{2} \text{ 일 때 } a = 8, \quad r = 2 \text{ 일 때 } a = 2$$

$$(i) \quad a = 8, \quad r = \frac{1}{2} \text{ 일 때 세 수는 } 8, 4, 2$$

$$(ii) \quad a = 2, \quad r = 2 \text{ 일 때 세 수는 } 2, 4, 8$$

따라서 세 수의 제곱의 합은

$$2^2 + 4^2 + 8^2 = 84$$

05-2 답 $\frac{7}{2}$

해결전략 | 연속한 세 항을 a, ar, ar^2 으로 놓고 식을 세운다.

STEP1 공비 구하기

연속한 세 항을 a, ar, ar^2 으로 놓으면

세 항의 합이 $-\frac{3}{2}$ 이므로

$$a + ar + ar^2 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 항의 곱이 1이므로

$$a \times ar \times ar^2 = 1, (ar)^3 = 1$$

$$\therefore ar = 1 \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = -\frac{3}{2}, \text{ 즉 } \frac{1+r+r^2}{r} = -\frac{3}{2}$$

$$2r^2 + 5r + 2 = 0, (r+2)(2r+1) = 0$$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{2}$$

STEP2 세 항의 절댓값의 합 구하기

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$r = -2 \text{ 일 때 } a = -\frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 } a = -2$$

$$(i) a = -\frac{1}{2}, r = -2 \text{ 일 때 세 수는 } -\frac{1}{2}, 1, -2$$

$$(ii) a = -2, r = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 세 수는 } -2, 1, -\frac{1}{2}$$

따라서 세 항은 $-2, 1, -\frac{1}{2}$ 이므로 절댓값의 합은

$$2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

05-3 $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{12}{7}$

해결전략 | 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓고 식을 세운다.

STEP1 공비 구하기

세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면 세 수의 합이 3이므로

$$a + ar + ar^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수는 양수이고 공비가 1보다 크므로 가장 큰 수는 ar^2 이다. 이때 가장 큰 수의 제곱이 가운데 수의 제곱의 4배와 같으므로

$$(ar^2)^2 = 4(ar)^2$$

$$a^2r^4 = 4a^2r^2, a^2r^2(r^2 - 4) = 0$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because a > 0, r > 1)$$

STEP2 세 수 구하기

$r = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a + 2a + 4a = 3, 7a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{7}$$

따라서 세 수는 $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{12}{7}$ 이다.

05-4 -14

해결전략 | 세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP1 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기
삼차방정식 $8x^3 + kx^2 + 7x - 1 = 0$ 의 세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = -\frac{k}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = \frac{7}{8} \text{에서}$$

$$ar(a + ar + ar^2) = \frac{7}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = \frac{1}{8} \text{에서}$$

$$(ar)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore ar = \frac{1}{2} \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{k}{8}\right) = \frac{7}{8} \quad \therefore k = -14$$

05-5 6

해결전략 | 삼각형의 세 변의 길이를 a, ar, ar^2 으로 놓는다.

STEP1 문제의 조건에 알맞은 식 세우기

삼각형의 세 변의 길이를 a, ar, ar^2 으로 놓으면 둘레의 길이가 19이므로

$$a + ar + ar^2 = 19$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 19 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 변의 길이의 제곱의 합이 133이므로

$$a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 133$$

$$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 133$$

$$\therefore a^2(1+r^2+r^4) = 133 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP2 두 번째로 긴 변의 길이 구하기

$\textcircled{1}$ 을 제곱하면

$$a^2(1+r+r^2)^2 = 361$$

$$a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3) = 361$$

$$a^2(1+r^2+r^4) + 2a^2r(1+r+r^2) = 361$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 위의 식에 대입하면

$$133 + 2ar \times 19 = 361$$

$$38ar = 228 \quad \therefore ar = 6$$

따라서 두 번째로 긴 변의 길이는 6이다.

05-6 답 -2

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x 좌표는 두 곡선의 식을 연립한 방정식의 해와 같다.

STEP1 교점의 x 좌표를 a, ar, ar^2 으로 놓고 식 세우기

두 곡선의 교점의 x 좌표는 방정식

$$x^3 + x^2 - 6x = kx^2 + 8, \text{ 즉 } x^3 + (1-k)x^2 - 6x - 8 = 0$$

의 근이다.

따라서 삼차방정식 $x^3 + (1-k)x^2 - 6x - 8 = 0$ 의 서로 다른 세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = k - 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -6 \text{에서}$$

$$ar(a + ar + ar^2) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 8 \text{에서}$$

$$(ar)^3 = 8$$

$$\therefore ar = 2 \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

STEP2 k 의 값 구하기

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$2(k-1) = -6$$

$$2k = -4 \quad \therefore k = -2$$

필수유형 06

333쪽

06-1 답 $\frac{511}{8}$

해결전략 | 먼저 주어진 등비수열의 항수를 구한다.

STEP1 항수 구하기

$\frac{1}{8}$ 을 제 n 항이라고 하면 첫째항이 32, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$n-1=8 \quad \therefore n=9$$

STEP2 등비수열의 합 구하기

따라서 항수가 9이므로 구하는 합은

$$\frac{32\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 64\left(1 - \frac{1}{512}\right) = \frac{511}{8}$$

06-2 답 $\frac{1}{6}(1-3^{12})$

해결전략 | 등비수열의 두 항을 이용하여 첫째항과 공비를 구한 다음 합의 공식을 이용한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 = ar^4 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar} = \frac{54}{-2}, \text{ 즉 } r^3 = -27$$

$$\therefore r = -3 \quad (\because r \text{는 실수})$$

STEP2 첫째항 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$$-3a = -2 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

STEP3 첫째항부터 제12항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} &= \frac{\frac{2}{3}\{1 - (-3)^{12}\}}{1 - (-3)} \\ &= \frac{1}{6}(1 - 3^{12}) \end{aligned}$$

06-3 답 (1) 1023 (2) 1651

해결전략 | a^n (a 는 소수)의 약수의 총합은

$1 + a + a^2 + \dots + a^n$ 이다.

(1) $512 = 2^9$ 이므로 약수의 총합은

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$$

(2) $576 = 2^6 \times 3^2$ 이므로 약수의 총합은

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6)(1 + 3 + 3^2) \\ = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \times 13 = 1651 \end{aligned}$$

→ 항수는 10이다.

06-4 답 5

해결전략 | 공비가 주어져 있으므로 $a_3 = 18$ 에서 첫째항을 구하면 S_n 을 구할 수 있다.

STEP1 S_n 구하기

공비가 3이므로 $a_3 = a_1 \times 3^2 = 18$ 에서 $a_1 = 2$

$$\therefore S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$S_k = 3^k - 1 = 242 \text{에서 } 3^k = 243$$

$$\therefore k = 5$$

06-5 답 10

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

STEP1 $\log_2 8 + \log_2 8^2 + \dots + \log_2 8^{64}$ 을 간단히 하기

$$\begin{aligned} \log_2 8 + \log_2 8^2 + \log_2 8^4 + \dots + \log_2 8^{64} \\ = \log_2 2^3 + \log_2 2^6 + \log_2 2^{12} + \dots + \log_2 2^{192} \\ = 3 + 6 + 12 + \dots + 192 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

STEP2 $m+n$ 의 값 구하기

이때 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열에서 192를 제 n 항

이라고 하면

$$3 \times 2^{n-1} = 192, 2^{n-1} = 64 = 2^6 \quad \therefore n = 7$$

따라서 ㉠은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$3 + 6 + 12 + \dots + 192 = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 2^7 - 3$$

$$\text{즉, } 3 \times 2^7 - 3 = 3 \times 2^m - n \text{에서}$$

$$m = 7, n = 3 \quad \therefore m + n = 7 + 3 = 10$$

06-6 ㉡ 508

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 도 등비수열이고 공비는 r^2 이 된다.

STEP1 첫째항과 공비의 제곱의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 a_3 = a_8 \text{에서}$$

$$ar \times ar^2 = ar^7, a^2 r^3 = ar^7$$

$$ar^3(a - r^4) = 0$$

이때 $a > 0, r > 0$ 이므로

$$a = r^4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_1 + a_5 = 20 \text{에서 } a + ar^4 = 20$$

$$r^4 + r^4 \times r^4 = 20 \quad (\because ㉠)$$

$$(r^4)^2 + r^4 - 20 = 0$$

$$(r^4 + 5)(r^4 - 4) = 0 \quad \therefore r^4 = 4$$

$$\therefore a = 4, r^2 = 2$$

STEP2 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{13}$ 의 값 구하기

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{13}$ 의 값은 첫째항이 4, 공비가 $r^2 = 2$ 인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{13} &= \frac{4\{1 - (r^2)^7\}}{1 - r^2} \xrightarrow{13=2n-1 \text{에서 } 14=2n, n=7} \\ &= \frac{4(1 - 2^7)}{1 - 2} = 508 \end{aligned}$$

필수유형 07

335쪽

07-1 ㉡ (1) $a_n = \frac{1}{3} \times 2^{n-1}$ (2) -63

해결전략 | 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 두 부분 합을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

(1) **STEP1** 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 85 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠에서 } \frac{a(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 85$$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$$5(r^4 + 1) = 85, r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

STEP2 일반항 구하기

$r = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$15a = 5 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \times 2^{n-1}$$

(2) **STEP1** r^2 의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_2 = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} = -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = -15 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉡에서 } \frac{a(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{r - 1} = -15$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$-3(r^2 + 1) = -15 \quad \therefore r^2 = 4$$

STEP2 S_6 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore S_6 &= \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} \times (r^4 + r^2 + 1) \\ &= -3 \times (4^2 + 4 + 1) = -63 \end{aligned}$$

07-2 ㉡ 48

해결전략 | $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 임을 이용하여 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구한다.

STEP1 첫째항과 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 21 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 189 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉡에서 } \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 189$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$21(r^3 + 1) = 189, r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = 2 \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } 7a = 21 \quad \therefore a = 3$$

STEP2 a_5 의 값 구하기

$$\therefore a_5 = 3 \times 2^4 = 48$$

07-3 ㉡ 340

해결전략 | 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 때, 주어진 식의 첫째항과 항수에 주의한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_4 = \frac{a(r^4-1)}{r-1} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_8 = \frac{a(r^8-1)}{r-1} = 85 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 85$$

위의 식에 $\textcircled{㉠}$ 을 대입하면

$$5(r^4+1)=85, r^4=16 \quad \therefore r=-2 \quad (\because r<0)$$

STEP2 일반항 구하기

$$\text{이것을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } -5a=5 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore a_n = (-1) \times (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1}$$

STEP3 $a_3+a_4+a_5+\dots+a_{10}$ 의 값 구하기

따라서 $a_3 = -(-2)^2 = -4$ 이고 a_3 부터 a_{10} 까지 항수는 8이므로

$$a_3+a_4+a_5+\dots+a_{10} = \frac{-4\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)} = 340$$

07-4 ㉡ 15

해결전략 a_3 과 a_5 사이의 관계를 알아보는 것이므로 공비만 알면 k 의 값을 구할 수 있다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_4 = 16S_2 \text{에서}$$

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1} = 16 \times \frac{a(r^2-1)}{r-1}$$

$$r^4-1 = 16(r^2-1), r^4-16r^2+15=0$$

$$(r^2-1)(r^2-15)=0 \quad \therefore r=\sqrt{15} \quad (\because r>1)$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$a_5 = ka_3 \text{에서 } ar^4 = k \times ar^2 \text{이므로}$$

$$k=r^2=15$$

07-5 ㉡ -310

해결전략 문제에서 주어진 두 조건을 이용하여 S_{10} 의 값을 알아본다.

STEP1 r^5 의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_5 = \frac{a(r^5-1)}{r-1} = -10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = S_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$= -10 + (-50) = -60$$

이므로

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = -60 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = -60$$

위의 식에 $\textcircled{㉠}$ 을 대입하면

$$-10(r^5+1) = -60, r^5+1=6 \quad \therefore r^5=5$$

STEP2 S_{15} 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} &= \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)}{r-1} \times (r^{10}+r^5+1) \\ &= -10 \times (5^2+5+1) = -310 \end{aligned}$$

07-6 ㉡ 5×2^{10}

해결전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$ 도 등비수열이고 공비는 r^2 이 된다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 의 값은 첫째항이 $a_1=a$, 공비가 r^2 인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = \frac{a\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1} = -5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$ 의 값은 첫째항이 $a_2=ar$ 이고 공비가 r^2 인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10} = \frac{ar\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$-5r=10 \quad \therefore r=-2$$

STEP2 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\dots+a_{20}$ 의 값 구하기

따라서 $a_{11}=ar^{10}$ 이고 a_{11} 부터 a_{20} 까지 항수는 10이므로

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{12}+a_{13}+\dots+a_{20} \\ &= \frac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)}{r^2-1} \times r^{10}(r+1) \\ &= -5 \times (-2)^{10} \times (-2+1) = 5 \times 2^{10} \end{aligned}$$

발전유형 08

337쪽

08-1 ㉡ $\frac{25}{64}$

해결전략 처음 몇번의 시행에서 색칠하는 삼각형의 넓이의 합을 각각 구하여 규칙을 찾는다.

STEP1 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 색칠하는 삼각형 4개의 넓이의 합을 구하기

n 번째 시행에서 색칠하는 삼각형 4개의 넓이의 합을 a_n 이라고 하면

$$a_1 = \square ABCD \times \frac{1}{2} = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$a_2 = \square A_1 B_1 C_1 D_1 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \square ABCD \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= 50 \times \frac{1}{2} = 25$$

$$a_3 = \square A_2 B_2 C_2 D_2 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} \square ABCD \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

STEP 2 8번째 시행에서 색칠하는 삼각형 4개의 넓이의 합 구하기

각 시행에서 색칠하는 삼각형 4개의 넓이의 합은 첫째항이 50, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열을 이루므로

$$a_n = 50 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

따라서 8번째 시행에서 색칠하는 삼각형 4개의 넓이의 합은

$$a_8 = 50 \times \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{25}{64}$$

08-2 $\frac{81}{256}$

해결전략 | 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 임을 이용하여 만들어지는 정삼각형의 한 변의 길이를 알아본다.

STEP 1 $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, $\overline{AB_3}$ 의 길이 구하기

정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 1이므로

$$\overline{AB_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

정삼각형 AB_1C_1 의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\overline{AB_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

정삼각형 AB_2C_2 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$ 이므로

$$\overline{AB_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

STEP 2 정삼각형 AB_7C_7 의 높이 구하기

따라서 각 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$, ...

이므로 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 등비수열을 이룬다.

이때 정삼각형 AB_7C_7 의 높이는 $\overline{AB_8}$ 이므로

$$\overline{AB_8} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^8 = \frac{81}{256} \quad \rightarrow \triangle AB_7C_7 \text{에서 높이는 } \overline{AB_{n+1}}$$

08-3 $6\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

해결전략 | $\triangle AB_nC_n$ 과 $\triangle AB_{n+1}C_{n+1}$ 의 닮음비를 이용하여 $\overline{B_nC_n}$ 과 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}$ 의 관계를 알아본다.

STEP 1 $\overline{B_1C_1}$ 의 길이 구하기

두 점 B_1 , C_1 은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{AB} : \overline{AB_1} = \overline{AC} : \overline{AC_1} = 3 : 2$$

따라서 $\triangle ABC$ 와 $\triangle AB_1C_1$ 의 닮음비가 3 : 2이므로

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC} \times \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

STEP 2 공비 구하기

$\triangle AB_nC_n$ 과 $\triangle AB_{n+1}C_{n+1}$ 의 닮음비가 3 : 2이므로

$$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{2}{3} \overline{B_nC_n} \quad \rightarrow \frac{\overline{B_{n+1}C_{n+1}}}{\overline{B_nC_n}} = \frac{2}{3}$$

즉, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{B_3C_3}$, ...로 이루어지는 수열은 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이다.

STEP 3 $\overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \dots + \overline{B_{10}C_{10}}$ 의 값 구하기

따라서 $\overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \dots + \overline{B_{10}C_{10}}$ 의 값은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \dots + \overline{B_{10}C_{10}} &= \frac{2\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 6\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\} \end{aligned}$$

08-4 $\frac{4}{3}\pi\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

해결전략 | 각 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 반원의 넓이에 서 반원 안에 그린 원의 넓이를 뺀 값이다.

STEP 1 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이 구하기

n 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이를 a_n 이라고 하면

$$a_1 = \pi \times 2^2 \times \frac{1}{2} - \pi \times \underbrace{1^2}_{\text{원의 지름이 2이므로 반지름의 길이는 1이다.}} = \pi$$

$$a_2 = \pi \times 1^2 \times \frac{1}{2} - \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_3 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$$

STEP 2 10번째 시행 후 색칠한 모든 부분의 넓이의 합 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 π , 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열을 이루므로 10번째 시행 후 색칠한 모든 부분의 넓이의 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} &= \frac{\pi\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\pi\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\} \end{aligned}$$

09-1 답 1

해결전략 | $a_1=S_1$ 의 값이 $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)을 계산하여 얻은 a_n 의 식에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 한다.

STEP1 a_1 의 값과 a_n ($n \geq 2$) 구하기

$$a_1=S_1=5^{1+k}-5$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (5^{n+k} - 5) - (5^{n-1+k} - 5) \\ &= \overbrace{5^{n+k} - 5^{n-1+k}}^{5 \times 5^{n-1+k} - 5^{n-1+k}} = 4 \times 5^{n-1+k} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP2 k 의 값 구하기

이때 $a_1=S_1=5^{1+k}-5$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 4×5^k 과 같아야 하므로

$$5^{1+k}-5=4 \times 5^k, \quad 5 \times 5^k-4 \times 5^k=5$$

$$5^k=5 \quad \therefore k=1$$

● → 다른 풀이

$S_n=5^{n+k}-5=5^k \times 5^n-5$ 에서 5^n 의 계수가 5^k 이므로 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $5^k+(-5)=0$, 즉 $5^k=5$ 에서 $k=1$ 이어야 한다.

09-2 답 18

해결전략 | $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_3 의 값을 구한다.

$$a_3=S_3-S_2=(3^3-1)-(3^2-1)=26-8=18$$

09-3 답 9

해결전략 | $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한 다음 부등식을 푼다.

STEP1 a_n 구하기

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3 \times 2^n - 3) - (3 \times 2^{n-1} - 3) \\ &= 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

STEP2 n 의 최솟값 구하기

$$a_n > 600 \text{에서 } 3 \times 2^{n-1} > 600, \quad 2^{n-1} > 200$$

$$\text{이때 } 2^7=128, \quad 2^8=256 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 8 \quad \therefore n \geq 9$$

따라서 n 의 최솟값은 9이다.

09-4 답 40

해결전략 | 로그의 정의를 이용하여 주어진 식에서 S_n 을 구한다.

STEP1 S_n 구하기

$$\log_2 (S_n + 2) = n + 1 \text{에서 } S_n + 2 = 2^{n+1}$$

$$\therefore S_n = 2^{n+1} - 2$$

STEP2 a_3+a_5 의 값 구하기

$$a_3=S_3-S_2=(2^4-2)-(2^3-2)=14-6=8$$

$$a_5=S_5-S_4=(2^6-2)-(2^5-2)=62-30=32$$

$$\therefore a_3+a_5=8+32=40$$

09-5 답 486

해결전략 | $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한 다음 a_k-a_{k-1} 을 k 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a_n 구하기

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+2} - 9) - (3^{n+1} - 9) \\ &= 3^{n+2} - 3^{n+1} = 2 \times 3^{n+1} \end{aligned}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$a_k - a_{k-1} = 324 \text{에서}$$

$$2 \times 3^{k+1} - 2 \times 3^k = 324, \quad 4 \times 3^k = 324$$

$$3^k = 81 \quad \therefore k = 4$$

STEP3 a_k 의 값 구하기

$$\therefore a_k = a_4 = 2 \times 3^5 = 486$$

▶참고 $a_1=S_1=3^3-9=18$ 은 $a_n=2 \times 3^{n+1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 18 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

09-6 답 108

해결전략 | $a_1=S_1$ 의 값이 $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)을 계산하여 얻은 a_n 의 식에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 한다.

STEP1 k 의 값 구하기

$$a_1=S_1=27k-18$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (k \times 3^{n+2} - 18) - (k \times 3^{n+1} - 18) \\ &= (3k - k) \times 3^{n+1} = 2k \times 3^{n+1} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=27k-18$ 이 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 $18k$ 와 같아야 하므로

$$27k-18=18k, \quad 9k=18 \quad \therefore k=2$$

STEP2 a_k 의 값 구하기

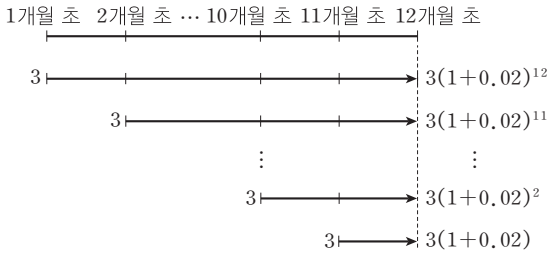
따라서 $a_n=4 \times 3^{n+1}$ 이므로

$$a_k=a_2=4 \times 3^3=108$$

1 답 413100원

STEP1 주어진 상황을 그림으로 나타내기

1년째 말, 즉 12개월째 말의 원리합계를 S라고 하면



STEP2 원리합계 구하기

위의 그림에서

$$S = 3 \times 1.02 + 3 \times 1.02^2 + \dots + 3 \times 1.02^{11} + 3 \times 1.02^{12}$$

위의 식은 첫째항이 3×1.02 , 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

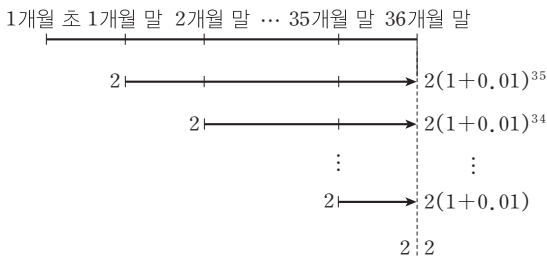
$$\begin{aligned} S &= \frac{3 \times 1.02 \times (1.02^{12} - 1)}{1.02 - 1} \\ &= \frac{3 \times 1.02 \times (1.27 - 1)}{0.02} = 41.31 (\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 1년째 말의 원리합계는 413100원이다.

2 답 86만 원

STEP1 주어진 상황을 그림으로 나타내기

3년째 말, 즉 36개월째 말의 원리합계를 S라고 하면



STEP2 원리합계 구하기

위의 그림에서

$$S = 2 + 2 \times 1.01 + \dots + 2 \times 1.01^{34} + 2 \times 1.01^{35}$$

위의 식은 첫째항이 2, 공비가 1.01인 등비수열의 첫째항부터 제36항까지의 합이므로

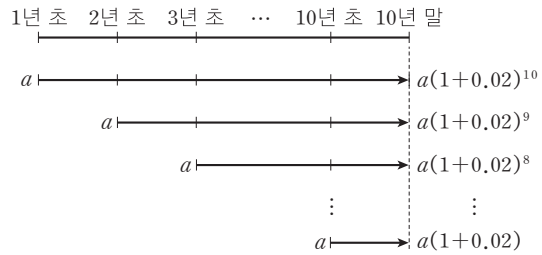
$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \times (1.01^{36} - 1)}{1.01 - 1} \\ &= \frac{2 \times (1.43 - 1)}{0.01} = 86 (\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 3년 후의 원리합계는 86만 원이다.

3 답 100만 원

STEP1 주어진 상황을 그림으로 나타내기

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a만 원이라고 하면



STEP2 매년 초의 적립금에 대한 10년 후 원리합계 구하기

10년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} &a \times 1.02 + a \times 1.02^2 + a \times 1.02^3 + \dots \\ &\quad + a \times 1.02^9 + a \times 1.02^{10} \\ &= \frac{a \times 1.02 \times (1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1} \\ &= \frac{a \times 1.02 \times (1.22 - 1)}{0.02} = a \times 51 \times 0.22 \end{aligned}$$

STEP3 매년 초에 적립해야 하는 금액 구하기

이때 $a \times 51 \times 0.22 = 1122$ 에서

$$a = \frac{1122}{51 \times 0.22} = 100 (\text{만 원})$$

따라서 매년 초에 적립해야 하는 금액은 100만 원이다.

실전 연습 문제

342~344쪽

01 ②	02 36	03 8	04 ③	05 ⑤
06 72	07 ④	08 ③	09 256	10 ①
11 ②	12 10	13 ⑤	14 ①	15 ④
16 $\frac{2}{3}(2^{30}-1)$	17 ①			

01

해결전략 | 주어진 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_2 + a_5 = ar + ar^4 = 4$$

$$\therefore ar(1+r^3) = 4$$

$$\dots\dots ㉠$$

$$a_3 + a_6 = ar^2 + ar^5 = 8$$

$$\therefore ar^2(1+r^3)=8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①÷⑦을 하면

$$\frac{ar^2(1+r^3)}{ar(1+r^3)} = \frac{8}{4} \quad \therefore r=2$$

STEP2 일반항 구하기

$r=2$ 를 ⑦에 대입하면

$$18a=4 \quad \therefore a=\frac{2}{9}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{9} \times 2^{n-1}$$

STEP3 a_4 의 값 구하기

$$\therefore a_4 = \frac{2}{9} \times 2^3 = \frac{16}{9}$$

02

해결전략 | $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$, $\frac{a_{n+2}}{a_n}=r^2$ 임을 이용하여 주어진 식에서 공비를 구한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_8=a_7 \times r, a_{16}=a_{14} \times r^2 \text{이므로}$$

$$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = r^2 + r = 12$$

$$r^2 + r - 12 = 0, (r+4)(r-3) = 0$$

$$\therefore r=3 \quad (\because r>0)$$

STEP2 $\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3}$ 의 값 구하기

따라서 $a_3=a_1 \times r^2$, $a_6=a_3 \times r^3$ 이므로

$$\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3} = r^2 + r^3 = 3^2 + 3^3 = 36$$

03

해결전략 | 주어진 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2=ar=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 \times a_5 = ar^3 \times ar^4 = 128 \text{에서}$$

$$a^2 r^7 = 128, (ar)^2 \times r^5 = 128 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } 4r^5 = 128$$

$$r^5 = 32 \quad \therefore r=2 \quad (\because r \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 일반항 구하기

$$r=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a=-2$$

$$\therefore a=-1 \quad \therefore a_n = -2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP3 n 의 최솟값 구하기

$$a_n < -80 \text{에서}$$

$$-2^{n-1} < -80, 2^{n-1} > 80$$

$$\text{이때 } 2^6=64, 2^7=128 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 n 의 최솟값은 8이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

채점 요소	배점
① 공비 구하기	50 %
② 일반항 구하기	20 %
③ n 의 최솟값 구하기	30 %

04

해결전략 | 768이 제5항임을 이용하여 공비를 구한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열의 공비를 r ($r>0$)라고 하면

768은 제5항이므로 $\rightarrow$ 모든 항이 양수이므로 (공비) >0

$$3r^4=768, r^4=256 \quad \therefore r=4 \quad (\because r>0)$$

STEP2 $a_1+a_2+a_3$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_1=3 \times 4=12, a_2=3 \times 4^2=48,$$

$$a_3=3 \times 4^3=192 \text{이므로}$$

$$a_1+a_2+a_3=12+48+192=252$$

05

해결전략 | $f(6)$ 은 $f(1)$ 과 $f(k)$ 의 등비중항이다.

STEP1 등비중항을 이용하여 식 세우기

$$f(1)=\sqrt{4}=2, f(6)=\sqrt{9}=3, f(k)=\sqrt{k+3}$$

2, 3, $\sqrt{k+3}$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 3은 2와 $\sqrt{k+3}$ 의 등비중항이다.

$$\text{즉, } 3^2=2\sqrt{k+3}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$\sqrt{k+3}=\frac{9}{2}, k+3=\frac{81}{4}$$

$$\therefore k=\frac{69}{4}$$

06

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 임을 이용한다.

STEP1 a, b 의 값 구하기

10은 a 와 17의 등차중항이므로

$$2 \times 10 = a + 17 \quad \therefore a=3$$

17은 10과 b 의 등차중항이므로

$$2 \times 17 = 10 + b \quad \therefore b=24$$

STEP2 xy 의 값 구하기

따라서 3, x , y , 24는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\frac{x}{3} = \frac{24}{y} \text{에서 } xy=72$$

→ 다른 풀이 → 공비가 같다.

STEP 2 xy 의 값 구하기

등비수열의 공비를 r 라고 하면 $ar^3=b$ 이므로

$$3r^3=24, r^3=8 \quad \therefore r=2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

따라서 $x=3 \times 2=6$, $y=3 \times 2^2=12$ 이므로

$$xy=6 \times 12=72$$

07

해결전략 | 교점의 x 좌표는 삼차방정식

$3x^3+kx^2+x-3=0$ 의 세 실근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP 1 교점의 x 좌표를 a , ar , ar^2 으로 놓고 식 세우기

세 교점의 x 좌표를 각각 a , ar , ar^2 으로 놓으면 a , ar , ar^2 은 삼차방정식 $3x^3+kx^2+x-3=0$ 의 근이므로

$$a+ar+ar^2=-\frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$ar(a+ar+ar^2)=\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2=1 \text{에서}$$

$$(ar)^3=1 \quad \therefore ar=1 \quad (\because ar \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

STEP 2 k 의 값 구하기

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$1 \times \left(-\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad \therefore k=-1$$

08

해결전략 | 정사각형의 한 변의 길이가 어떤 규칙으로 줄어드는지 찾는다.

STEP 1 정사각형의 넓이 알아보기

n 번째에 그린 정사각형의 넓이를 a_n 이라고 하면

$$a_1=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$a_3=\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots$$

STEP 2 10번째에 그린 정사각형의 넓이 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열을 이루므로 10번째에 그린 정사각형의 넓이는

$$a_{10}=\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{2^{20}}$$

▶참고 오른쪽 그림에서 삼각형

AA_1C_1 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AA_1}=\overline{A_1C_1}$$

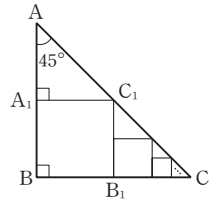
사각형 $A_1BB_1C_1$ 은 정사각형이므로

$$\overline{A_1B}=\overline{A_1C_1}$$

따라서 $\overline{AA_1}=\overline{A_1B}$ 이므로

$$\overline{A_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$$

마찬가지 방법으로 새로 그린 정사각형의 한 변의 길이는 바로 전에 그린 정사각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이다.



09

해결전략 | 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 k 항까지의 합이 511이 되는 k 의 값을 구한다.

STEP 1 k 의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$$1+2+4+\dots+a_k=\frac{2^k-1}{2-1}=511 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^k=512=2^9$$

$$\therefore k=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP 2 a_k 의 값 구하기

$$\therefore a_k=a_9=1 \times 2^8=256 \quad \begin{matrix} \rightarrow a_9=1 \times 2^{9-1} \text{이므로} \\ a_9=1 \times 2^8 \end{matrix} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 요소	배점
① 등비수열의 합을 나타내는 식 세우기	40 %
② k 의 값 구하기	20 %
③ a_k 의 값 구하기	40 %

10

해결전략 | 주어진 두 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3=ar^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_4+a_5=ar^3+ar^4=24 \text{에서}$$

$$ar^3(1+r)=24 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } \frac{ar^3(1+r)}{ar^2} = \frac{24}{4}$$

$$r(1+r)=6, r^2+r-6=0$$

$$(r+3)(r-2)=0 \quad \therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

STEP 2 첫째항 구하기

$$r=2 \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 4a=4 \quad \therefore a=1$$

STEP 3 $a_5+a_6+\dots+a_{10}$ 의 값 구하기

따라서 $a_n = 2^{n-1}$ 이므로 $a_5 + a_6 + \dots + a_{10}$ 의 값은 첫째 항이 $a_5 = 2^4 = 16$, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 6항까지의 합이므로

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{10} = \frac{16(2^6 - 1)}{2 - 1} = 1008$$

11

해결전략 | 먼저 조건 ④에서 넷째 줄의 한가운데에 있는 수를 구한다.

STEP1 넷째 줄에 있는 수의 규칙 알아보기

조건 ⑦에 의하여 넷째 줄에 있는 수는 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

조건 ④에 의하여 넷째 줄의 한가운데에 있는 수는 $4 \times 2 = 8$ 이므로 넷째 줄에 있는 수는 왼쪽부터 차례로 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.

STEP2 넷째 줄에 있는 모든 수의 합 구하기

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 127$$

12

해결전략 | $S_4 - S_3 = a_4$, $S_6 - S_5 = a_6$ 임을 이용한다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_4 - S_3 = a_4 \text{이므로 } a_4 = 2$$

$$\therefore ar^3 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 - S_5 = a_6 \text{이므로 } a_6 = 50$$

$$\therefore ar^5 = 50 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^5}{ar^3} = \frac{50}{2}, r^2 = 25$$

$$\therefore r = 5 \quad (\because r > 0)$$

STEP2 a_5 의 값 구하기

$$\therefore a_5 = a_4 \times r = 2 \times 5 = 10$$

13

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 수열 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_3 = 3a_3 \text{에서 } \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 3ar^2$$

$$\frac{a(r-1)(r^2+r+1)}{r-1} = 3ar^2$$

$$r^2 + r + 1 = 3r^2, 2r^2 - r - 1 = 0$$

$$(r-1)(2r+1) = 0 \quad \therefore r = -\frac{1}{2} \quad (\because r < 0)$$

STEP2 첫째항 구하기

$$r = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$-\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{16} - 1\right) = \frac{15}{2} \quad \therefore a = 12$$

STEP3 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값 구하기

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값은 첫째항이

$$a_2 = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \text{이고 공비가 } r^2 = \frac{1}{4} \text{인 등비수열의}$$

첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} &= \frac{-6\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= -8\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\} \\ &= -8 + \frac{1}{2^{17}} \end{aligned}$$

14

해결전략 | $a_1 = S_1$ 의 값이 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)을 계산하여 얻은 a_n 의 식에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 한다.

STEP1 a_1 의 값과 a_n ($n \geq 2$) 구하기

$$\log_5(S_n + k) = n + 2 \text{에서}$$

$$S_n + k = 5^{n+2}, S_n = 5^{n+2} - k$$

이므로

$$a_1 = S_1 = 125 - k$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5^{n+2} - k) - (5^{n+1} - k)$$

$$= 5^{n+2} - 5^{n+1}$$

$$= (5-1) \times 5^{n+1} = 4 \times 5^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 k 의 값 구하기

이때 $a_1 = 125 - k$ 가 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값인 100과 같아야 하므로

$$125 - k = 100$$

$$\therefore k = 25$$

>참고 $S_n = 5^{n+2} - k = 25 \times 5^n - k$ 에서 첫째항부터 등비수열을 이루려면 5^n 의 계수와 상수항의 합이 0이 되어야 한다. 즉,

$$25 + (-k) = 0 \quad \therefore k = 25$$

15

해결전략 | $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한 다음 부등식을 푼다.

STEP1 a_n 구하기

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^{n+2} - 4) - (2^{n+1} - 4) \\ &= 2^{n+2} - 2^{n+1} \\ &= (2-1) \times 2^{n+1} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

STEP2 $a_n < 1000$ 을 만족시키는 항의 개수 구하기

$$a_n < 1000 \text{에서 } 2^{n+1} < 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n+1 \leq 9 \quad \therefore n \leq 8$$

따라서 1000보다 작은 항은 8개이다.

16

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 는 공비가 r^2 인 등비수열이다.

STEP1 a_n 구하기

$$a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ &= 2^n(2-1) = 2^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$a_1 = 2$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2^n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

STEP2 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값 구하기

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값은 첫째항이 $a_1 = 2$, 공비가 $r^2 = 4$ 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} &\xrightarrow[\substack{a_n = 2^n \text{에서 공비가 } r=2 \text{이므로} \\ r^2 = 2^2 = 4}]{\text{}} \\ &= \frac{2(4^{10} - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(2^{20} - 1) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

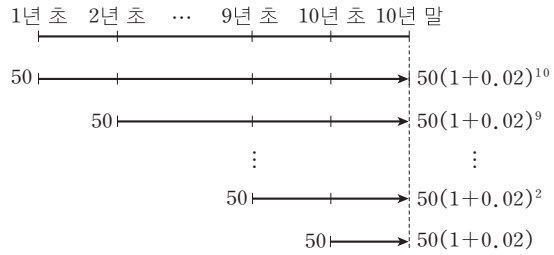
채점 요소	배점
① 일반항 구하기	50 %
② $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값 구하기	50 %

17

해결전략 | 주어진 상황을 그림으로 나타내고 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

STEP1 주어진 상황을 그림으로 나타내기

10년째 말의 원리합계를 S 라고 하면



STEP2 원리합계 구하기

위의 그림에서

$$\begin{aligned} S &= 50(1+0.02) + 50(1+0.02)^2 + \dots \\ &\quad + 50(1+0.02)^9 + 50(1+0.02)^{10} \\ &= 50 \times 1.02 + 50 \times 1.02^2 + \dots \\ &\quad + 50 \times 1.02^9 + 50 \times 1.02^{10} \end{aligned}$$

위의 식은 첫째항이 50×1.02 , 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} S &= \frac{50 \times 1.02 \times (1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1} \\ &= \frac{50 \times 1.02 \times (1.22 - 1)}{0.02} = 561 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

따라서 10년째 말의 원리합계는 561만 원이다.

상위권 도약 문제

345~346쪽

- 01 ⑤ 02 ② 03 5 04 3 05 9
06 ② 07 9 08 1533

01

해결전략 | 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항 a_n, b_n 을 이용하여 보기의 일반항을 찾는다.

STEP1 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항 a_n, b_n 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 r 라고 하면

$$b_n = br^{n-1}$$

STEP2 보기의 수열의 일반항을 구하여 참, 거짓 판단하기

ㄱ. $2^{a_n} = 2^{a+(n-1)d} = 2^a \times (2^d)^{n-1}$ 이므로 수열 $\{2^{a_n}\}$ 은 첫째항이 2^a , 공비가 2^d 인 등비수열이다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } b_n + b_{n+1} &= br^{n-1} + br^n = br^{n-1}(1+r) \\ &= b(1+r)r^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{b_n + b_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $b(1+r)$, 공비가 r 인 등비수열이다. (참)

∴ $b_{2n+1} = br^{(2n+1)-1} = br^{2n} = br^2(r^2)^{n-1}$ 이므로 수열 $\{b_{2n+1}\}$ 은 첫째항이 br^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02

해결전략 | 조건 ④에서 항 사이의 비율이 주어졌으므로 공비를 구할 수 있다.

STEP 1 조건 ⑦에서 첫째항과 공비에 대한 식 세우기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

조건 ⑦에서 $ar^2 \times ar^4 \times ar^6 = 125$

$$(ar^4)^3 = 5^3 \quad \therefore ar^4 = 5$$

STEP 2 조건 ④에서 r^2 의 값 구하기

$$\text{조건 ④에서 } \frac{ar^3 + ar^7}{ar^5} = \frac{13}{6}, \quad \frac{1}{r^2} + r^2 = \frac{13}{6}$$

이때 $r^2 = X$ 라고 하면

$$\frac{1}{X} + X = \frac{13}{6}$$

$$6X^2 - 13X + 6 = 0, \quad (3X - 2)(2X - 3) = 0$$

$$\therefore X = \frac{2}{3} \text{ 또는 } X = \frac{3}{2}$$

$$\therefore r^2 = \frac{3}{2} \quad (\because r^2 > 1)$$

STEP 3 a_9 의 값 구하기

$$\therefore a_9 = ar^8 = ar^4 \times (r^2)^2 = 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

03

해결전략 | 첫째항이 주어졌으므로 주어진 식을 공차와 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 공차와 공비 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$\rightarrow a_n = 4 + (n-1)d, b_n = 4r^{n-1}$$

$$2a_2 = b_3 \text{에서 } 2(4+d) = 4r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 = b_2 + b_3 \text{에서 } 4+2d = 4r+4r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $d = 2r^2 - 4$ 를 ②에 대입하면

$$4 + 2(2r^2 - 4) = 4r + 4r^2$$

$$4r = -4 \quad \therefore r = -1$$

$$\therefore d = 2 \times (-1)^2 - 4 = -2$$

STEP 2 k 의 값 구하기

따라서 $b_6 = 4 \times (-1)^5 = -4$ 이므로 $a_k = -4$ 에서

$$4 + (k-1) \times (-2) = -4$$

$$-2k = -10 \quad \therefore k = 5$$

04

해결전략 | $\overline{OA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ 을 빗변으로 하는 직각이등변 삼각형의 변의 길이를 이용하여 점 A_1, A_2, A_3 의 좌표를 구해 본다.

STEP 1 점 A_1, A_2, A_3 의 좌표 구하기

점 A_n 의 좌표를 (x_n, y_n) 이라고 하면 $\overline{OA_1} = 1$ 이므로

$$x_1 = \overline{OA_1} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = \overline{OA_1} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2} \overline{OA_1} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$x_2 = x_1 - \overline{A_1A_2} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y_2 = y_1 + \overline{A_1A_2} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \text{점 } A_2 \text{의 } x \text{좌표는 점 } A_1 \text{의 } x \text{좌표보다 왼쪽에 있다.}$$

$$\overline{A_2A_3} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$x_3 = x_2 + \overline{A_2A_3} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$y_3 = y_2 + \overline{A_2A_3} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

STEP 2 점 A_{10} 의 좌표 구하기

따라서 점 A_n 의 x 좌표는 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인

등비수열의 합이고, y 좌표는 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인

등비수열의 합이므로

$$x_{10} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$y_{10} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\therefore \frac{y_{10}}{x_{10}} = \frac{\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right)} = 3$$

05

해결전략 | 주어진 두 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 첫째항과 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 a_4 = ar^2 \times ar^3 = \frac{1}{128} \text{에서}$$

$$(ar)^2 r^3 = \frac{1}{128} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{A} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } \frac{1}{16} r^3 = \frac{1}{128}$$

$$r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

STEP2 $S_n - 1$ 구하기

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{이므로}$$

$$S_n - 1 = - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

STEP3 n 의 최솟값 구하기

$$|S_n - 1| < \frac{1}{500} \text{에서}$$

$$\left| - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{500}, \left(\frac{1}{2} \right)^n < \frac{1}{500}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2} \right)^8 = \frac{1}{256}, \left(\frac{1}{2} \right)^9 = \frac{1}{512} \text{이므로}$$

$$n \geq 9$$

따라서 n 의 최솟값은 9이다.

06

해결전략 | 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 r 이면 등비수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 의 공비는 r^2 이고, 등비수열 $a_1, -a_3, a_5, \dots$ 의 공비는 $-r^2$ 이다.

STEP1 첫째항과 r^4 의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$a_1 a_2 = a_{10} \text{에서 } a_1 \times a_1 r = a_1 r^9$$

$$\therefore a_1 = r^8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_1 + a_9 = 20 \text{에서 } a_1 + a_1 r^8 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$a_1^2 + a_1 - 20 = 0, (a_1 + 5)(a_1 - 4) = 0$$

$$\therefore a_1 = 4 \quad (\because a_1 > 0) \quad \rightarrow \text{모든 항이 양수이다.}$$

$$a_1 = 4 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } r^8 = 4 \quad \therefore r^4 = 2$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

따라서 $a_1 + a_3 + \dots + a_9$ 의 값은 첫째항이 4이고 공비가 r^2 , $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9$ 의 값은 첫째항이 4이고 공비가 $-r^2$ 인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)$$

$$= \frac{4\{1 - (r^2)^5\}}{1 - r^2} \times \frac{4\{1 - (-r^2)^5\}}{1 - (-r^2)}$$

$$= \frac{4(1 - r^{10})}{1 - r^2} \times \frac{4(1 + r^{10})}{1 + r^2}$$

$$= \frac{16(1 - r^{20})}{1 - r^4} = \frac{16(1 - 2^5)}{1 - 2} = 496$$

07

해결전략 | $S_{n+3} - S_n$ 을 항들의 합의 꼴로 나타낸다.

STEP1 주어진 식을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타내기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하자.

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1} \text{에서}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13 \times 3^{n-1}$$

$$ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} = 13 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore ar^n(1 + r + r^2) = 13 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

STEP2 첫째항과 공비 구하기

$\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$ar(1 + r + r^2) = 13 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 에 $n=2$ 를 대입하면

$$ar^2(1 + r + r^2) = 39 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } \frac{ar^2(1 + r + r^2)}{ar(1 + r + r^2)} = \frac{39}{13}$$

$$\therefore r = 3$$

$$r = 3 \text{을 } \textcircled{B} \text{에 대입하면 } 3a(1 + 3 + 9) = 13$$

$$39a = 13 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

STEP3 a_4 의 값 구하기

$$\therefore a_4 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$$

08

해결전략 | $a_n = S_n - S_{n-1}$ 임을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 후 $a_n + a_{n+1}$ 을 구한다.

STEP1 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 구하기

$$a_1 = S_1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1)$$

$$= 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $a_1 = 1$ 은 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값 1과 같으므로

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $a_n + a_{n+1}$ 구하기

$$\therefore a_n + a_{n+1} = 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(1 + 2)$$

$$= 3 \times 2^{n-1}$$

STEP3 첫째항부터 제9항까지의 합 구하기

따라서 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{3(2^9 - 1)}{2 - 1} = 1533$$

13 여러 가지 수열의 합

개념확인

348~349쪽

01 답 (1) $\sum_{k=1}^{20} k^2$ (2) $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$

02 답 16

$$\sum_{k=1}^6 (3a_k - 2b_k) = 3 \sum_{k=1}^6 a_k - 2 \sum_{k=1}^6 b_k$$

$$= 3 \times 10 - 2 \times 7 = 16$$

03 답 (1) 220 (2) 350

(1) $\sum_{k=1}^{10} 4k = 4 \sum_{k=1}^{10} k = 4 \times \frac{10 \times 11}{2} = 220$

(2) $\sum_{k=1}^6 (k^3 - k^2) = \sum_{k=1}^6 k^3 - \sum_{k=1}^6 k^2$

$$= \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 - \frac{6 \times 7 \times 13}{6}$$

$$= 441 - 91 = 350$$

04 답 (1) $\frac{53}{165}$ (2) $\sqrt{11} - \sqrt{2}$

(1) $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{(k+1)(k+3)}$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{53}{165}$$

(2) $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

→ 항끼리 소거했을 때 앞에서 1번째, 3번째 항이 남으면 뒤에서도 1번째, 3번째 항이 남는다.

$$= \sum_{k=1}^9 (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{11} - \sqrt{10})$$

$$= \sqrt{11} - \sqrt{2}$$

필수유형 01

351쪽

01-1 답 (1) 69 (2) 5 (3) -6

해결전략 | Σ 로 주어진 식을 시작 항부터 끝항까지의 합으로 나타내어 계산한다.

(1) $\sum_{k=1}^{20} 3k - \sum_{k=3}^{19} 3k$

$$= (3+6+9+\cdots+60) - (9+12+15+\cdots+57)$$

$$= 3+6+60 = 69$$

(2) STEP1 주어진 식을 덧셈식으로 나타내기

$$\sum_{k=2}^{40} a_k = 25 \text{에서 } a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{40} = 25 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{38} a_k = 20 \text{에서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{38} = 20 \quad \text{..... } \textcircled{2}$$

STEP2 $a_{39} + a_{40} - a_1$ 의 값 구하기

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $a_{39} + a_{40} - a_1 = 5$

(3) STEP1 $\sum_{k=2}^{15} a_{k+1} - \sum_{k=4}^{17} a_k$ 를 간단히 하기

$$\sum_{k=2}^{15} a_{k+1} - \sum_{k=4}^{17} a_k$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{16})$$

$$- (a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{17})$$

$$= a_3 - a_{17}$$

STEP2 a_{17} 의 값 구하기

$$\sum_{k=2}^{15} a_{k+1} - \sum_{k=4}^{17} a_k = 10 \text{이므로}$$

$$a_3 - a_{17} = 10, 4 - a_{17} = 10 \quad \therefore a_{17} = -6$$

01-2 답 11

해결전략 | $\sum_{k=1}^n a_{k+p} = a_{1+p} + a_{2+p} + a_{3+p} + \cdots + a_{n+p}$ 임을

이용한다.

$$\sum_{k=1}^{15} a_{k+1} - \sum_{k=3}^{17} a_{k-2}$$

$$= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{16}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15})$$

$$= a_{16} - a_1 = 14 - 3 = 11$$

01-3 답 23

해결전략 | Σ 로 주어진 식을 덧셈식으로 나타내어 간단히 한다.

STEP1 Σ 로 주어진 식을 간단히 하기

$$\sum_{k=2}^{10} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{10},$$

$$\sum_{k=1}^9 (a_k + 2) = (a_1 + 2) + (a_2 + 2) + \cdots + (a_9 + 2)$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + 18$$

→ 2가 9개이므로 $2 \times 9 = 18$

이므로 $\sum_{k=2}^{10} a_k = \sum_{k=1}^9 (a_k + 2)$ 에서

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + 18$$

$$\therefore a_{10} - a_1 = 18 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

한편, 주어진 조건에서 $a_1 + a_{10} = 28 \quad \text{..... } \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $2a_{10} = 46 \quad \therefore a_{10} = 23$

01-4 ㉔ 48

해결전략 | $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$ 를 덧셈식으로 나타낸다.

STEP1 $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k$ 임을 알기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) \\ &\quad + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 - 2n$

STEP2 $\sum_{k=1}^{16} a_k$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{16} a_k = 8^2 - 2 \times 8 = 48$$

→ $2n=16$ 에서 $n=8$
 n 에 16을 대입하지 않도록 주의한다.

01-5 ㉔ 91

해결전략 | $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})$ 을 덧셈식으로 나타내어 간단히 한다.

STEP1 a_{n+1} 구하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) \\ &\quad + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

이므로

$$1 - a_{n+1} = -n^2 + n$$

$$\therefore a_{n+1} = n^2 - n + 1$$

STEP2 a_{11} 의 값 구하기

$$\therefore a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91$$

01-6 ㉔ $\frac{4}{9}$

해결전략 | $\sum_{k=1}^5 (a_{2k} + a_{2k+1}) - \sum_{i=2}^5 (a_{2i-1} + a_{2i})$ 를 덧셈식으로 나타내어 간단히 한다.

STEP1 a_{11} 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (a_{2k} + a_{2k+1}) - \sum_{i=2}^5 (a_{2i-1} + a_{2i}) \\ &= \{(a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{10} + a_{11})\} \\ &\quad - \{(a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_9 + a_{10})\} \\ &= a_2 + a_{11} = 14 \end{aligned}$$

이때 $a_2 = 5$ 이므로

$$5 + a_{11} = 14 \quad \therefore a_{11} = 9$$

STEP2 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + d = 5 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

$$a_{11} = a + 10d = 9 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = \frac{41}{9}, d = \frac{4}{9}$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $\frac{4}{9}$ 이다.

필수유형 02

353쪽

02-1 ㉔ (1) 51 (2) 180 (3) 13

해결전략 | $\sum$ 의 시작 항과 끝항이 같으므로 $\sum$ 의 성질을 이용하여 계산한다.

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k)(2a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - b_k^2) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} b_k^2 \\ &= 4 \times 15 - 9 = 51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{12} (a_k - b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{12} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{12} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{12} a_k b_k \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{12} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \times 30 = 120$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} (a_k^2 + b_k^2) = 180$$

(3) **STEP1** $\sum_{k=1}^{16} b_k$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{16} (2a_k + b_k) &= 2 \sum_{k=1}^{16} a_k + \sum_{k=1}^{16} b_k = 13 \text{에서} \\ 2 \times 5 + \sum_{k=1}^{16} b_k &= 13 \quad \therefore \sum_{k=1}^{16} b_k = 3 \end{aligned}$$

STEP2 $\sum_{k=1}^{16} (5a_k - 4b_k)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{16} (5a_k - 4b_k) &= 5 \sum_{k=1}^{16} a_k - 4 \sum_{k=1}^{16} b_k \\ &= 5 \times 5 - 4 \times 3 = 13 \end{aligned}$$

㉔ 문제의 방법

$$\sum_{k=1}^n (pa_k \pm qb_k \pm r) = p \sum_{k=1}^n a_k \pm q \sum_{k=1}^n b_k \pm rn$$

(단, p, q, r 는 상수이고, 복부호동순이다.)

02-2 ㉔ -120

해결전략 | $(a_k - 3)^2$ 을 전개한 다음 $\sum$ 의 성질을 이용한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 3)^2$ 을 $\sum_{k=1}^{20} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 에 대한 식으로 나타내기

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k - 3)^2 = 12 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k^2 - 6a_k + 9) = 12$$

$$\sum_{k=1}^{20} a_k^2 - 6 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 9 = 12$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{20} a_k^2$ 의 값 구하기

$$\sum_{k=1}^{20} a_k^2 - 6 \times 8 + 9 \times 20 = 12$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k^2 = 12 + 48 - 180 = -120$$

02-3 ㉡ 157

해결전략 | $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$ 임을 이용한다.

STEP 1 $\sum_{k=16}^{30} (4a_k - 5)$ 를 $\sum_{k=1}^{15} a_k$, $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 에 대한 식으로 나타

내기

$$\begin{aligned} \sum_{k=16}^{30} (4a_k - 5) &= \sum_{k=1}^{30} (4a_k - 5) - \sum_{k=1}^{15} (4a_k - 5) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{30} 5 - 4 \sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{15} 5 \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=16}^{30} (4a_k - 5)$ 의 값 구하기

따라서 구하는 식의 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=16}^{30} (4a_k - 5) &= 4 \times 90 - 5 \times 30 - 4 \times 32 + 5 \times 15 \\ &= 157 \end{aligned}$$

02-4 ㉡ 47

해결전략 | 먼저 첫 번째 식에서 $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값을 구한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값 구하기

$$\sum_{k=1}^{12} (a_k + 3) = 50 \text{에서} \quad \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} 3 = 50$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + 3 \times 12 = 50 \quad \therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = 14$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{12} b_k$ 의 값 구하기

$$\sum_{k=1}^{12} (a_k - 2b_k) = 4 \text{에서} \quad \sum_{k=1}^{12} a_k - 2 \sum_{k=1}^{12} b_k = 4$$

$$14 - 2 \sum_{k=1}^{12} b_k = 4 \quad \therefore \sum_{k=1}^{12} b_k = 5$$

STEP 3 $\sum_{k=1}^{12} (3a_k + b_k)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{12} (3a_k + b_k) &= 3 \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} b_k \\ &= 3 \times 14 + 5 = 47 \end{aligned}$$

02-5 ㉡ 6

해결전략 | 주어진 두 식에서 $\sum_{k=1}^{12} a_k$, $\sum_{k=1}^{12} b_k$ 의 값을 구한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{12} a_k$, $\sum_{k=1}^{12} b_k$ 의 값 구하기

$$\sum_{k=1}^{12} (2a_k + b_k) = 26 \text{에서}$$

$$2 \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} b_k = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{12} (3a_k - b_k) = 14 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{12} a_k - \sum_{k=1}^{12} b_k = 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 5 \sum_{k=1}^{12} a_k = 40 \quad \therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = 8$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2 \times 8 + \sum_{k=1}^{12} b_k = 26 \quad \therefore \sum_{k=1}^{12} b_k = 10$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2} a_k + \frac{1}{5} b_k \right)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2} a_k + \frac{1}{5} b_k \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} a_k + \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{12} b_k \\ &= \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{5} \times 10 = 6 \end{aligned}$$

02-6 ㉡ 14

해결전략 | $(a_k + 1)^2$, $a_k(a_k + 1)$ 을 전개하여 주어진 두 식을

각각 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 주어진 두 식을 각각 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 에 대한 식으로 나

타내기

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) = 28 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 1 \times 10 = 28$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + a_k) = 16 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2$ 의 값 구하기

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{을 하면} \quad \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 14$$

03-1 ㉔ (1) 70 (2) 110

해결전략 | 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=1}^7 (k+2)(k-3) &= \sum_{k=1}^7 (k^2 - k - 6) \\
 &= \sum_{k=1}^7 k^2 - \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 6 \\
 &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - \frac{7 \times 8}{2} - 6 \times 7 \\
 &= 70
 \end{aligned}$$

(2) STEP1 $\frac{k^3 + k^2}{1+2+3+\dots+k}$ 을 간단히 하기

$$\begin{aligned}
 1+2+3+\dots+k &= \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \text{ 이므로} \\
 \frac{k^3 + k^2}{1+2+3+\dots+k} &= \frac{k^2(k+1)}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2k
 \end{aligned}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + k^2}{1+2+3+\dots+k} &= \sum_{k=1}^{10} 2k \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110
 \end{aligned}$$

03-2 ㉔ -252

해결전략 | $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \dots$ 임을 이용하여

$\sum_{i=1}^9 (i^2 + 3i)$ 를 변수가 k 인 식으로 고친다.

STEP1 Σ 의 성질을 이용하여 식을 간단히 하기

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^9 (i^2 + 3i) &= \sum_{k=1}^9 (k^2 + 3k) \text{ 이므로} \\
 (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^9 (k-1)(k-2) - \sum_{k=1}^9 (k^2 + 3k) \\
 &= \sum_{k=1}^9 \{(k^2 - 3k + 2) - (k^2 + 3k)\} \\
 &= \sum_{k=1}^9 (-6k + 2)
 \end{aligned}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

따라서 구하는 식의 값은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^9 (-6k + 2) &= -6 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 2 \\
 &= -6 \times \frac{9 \times 10}{2} + 2 \times 9 = -252
 \end{aligned}$$

03-3 ㉔ 10

해결전략 | $\sum_{k=1}^8 2^k$ 은 등비수열의 합, $\sum_{k=1}^8 ak$ 은 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

STEP1 주어진 식을 a 에 대한 식으로 나타내기

$$\sum_{k=1}^8 (2^k + ak) = \sum_{k=1}^8 2^k + a \sum_{k=1}^8 k = 870 \text{ 에서}$$

$$\frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} + a \times \frac{8 \times 9}{2} = 870$$

STEP2 a 의 값 구하기

$$510 + 36a = 870, \quad 36a = 360$$

$$\therefore a = 10$$

풍뎡의 방법

$\sum_{k=1}^n r^k$ 은 첫째항이 r 이고, 공비가 r 인 등비수열의 첫째

항부터 제 n 항까지의 합을 나타내므로

$$\sum_{k=1}^n r^k = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r} \quad (\text{단, } r \neq 1)$$

03-4 ㉔ 55

해결전략 | a_n 은 주어진 다항식에 $x=n$ 을 대입한 식이다.

STEP1 a_n 구하기

a_n 은 다항식 $3x^2 + x + 1$ 에 $x=n$ 을 대입한 식이므로

$$a_n = 3n^2 + n + 1 \quad \rightarrow \text{나머지정리}$$

STEP2 $\sum_{n=1}^6 (a_n - 2n^2 - 3n)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^6 (a_n - 2n^2 - 3n) &= \sum_{n=1}^6 \{(3n^2 + n + 1) - 2n^2 - 3n\} \\
 &= \sum_{n=1}^6 (n^2 - 2n + 1) \\
 &= \sum_{n=1}^6 n^2 - 2 \sum_{n=1}^6 n + \sum_{n=1}^6 1 \\
 &= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 2 \times \frac{6 \times 7}{2} + 1 \times 6 \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

03-5 ㉔ 8

해결전략 | 먼저 $a_n = 2n - 5$ 에서 a_{k+1} 을 구한다.

STEP1 $\sum_{k=1}^m a_{k+1}$ 을 m 에 대한 식으로 나타내기

$$a_n = 2n - 5 \text{ 에서 } a_{k+1} = 2(k+1) - 5 = 2k - 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^m a_{k+1} &= \sum_{k=1}^m (2k - 3) = 2 \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m 3 \\
 &= 2 \times \frac{m(m+1)}{2} - 3 \times m \\
 &= m^2 - 2m
 \end{aligned}$$

STEP2 m 의 값 구하기

$$\sum_{k=1}^m a_{k+1} = 48 \text{ 이므로}$$

$$m^2 - 2m = 48, m^2 - 2m - 48 = 0$$

$$(m+6)(m-8) = 0$$

$$\therefore m = 8 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

03-6 160

해결전략 주어진 조건에서 공차를 구한 다음 일반항 a_n 을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 55 \text{에서 } \frac{5(2 \times 3 + 4d)}{2} = 55$$

$$5(3 + 2d) = 55 \quad \therefore d = 4$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$$

STEP2 $\sum_{k=1}^5 k(a_k - 3)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 k(a_k - 3) &= \sum_{k=1}^5 k(4k - 4) \\ &= 4 \sum_{k=1}^5 (k^2 - k) \\ &= 4 \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} - \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= 160 \end{aligned}$$

필수유형 04

357쪽

04-1 400 (2) 225 (3) 120 (4) 532

해결전략 Σ 에서 항을 나타내는 문자는 변수이고, 그 외의 문자는 모두 상수임에 주의한다.

(1) STEP1 $\sum_{m=1}^k 4k^2$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k 4k^2 &= \underbrace{4k^2 + 4k^2 + \cdots + 4k^2}_{k\text{개}} \\ &= 4k^2 \times k = 4k^3 \end{aligned}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{m=1}^k 4k^2 \right) &= \sum_{k=1}^4 4k^3 \\ &= 4 \times \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 = 400 \end{aligned}$$

(2) STEP1 $\sum_{n=1}^5 mn$ 계산하기

$$\sum_{n=1}^5 mn = m \sum_{n=1}^5 n = m \times \frac{5 \times 6}{2} = 15m$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\therefore \sum_{m=1}^5 \left(\sum_{n=1}^5 mn \right) = \sum_{m=1}^5 15m = 15 \times \frac{5 \times 6}{2} = 225$$

(3) STEP1 $\sum_{j=1}^4 (i-j)$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (i-j) &= \sum_{j=1}^4 i - \sum_{j=1}^4 j = 4i - \frac{4 \times 5}{2} \\ &= 4i - 10 \end{aligned}$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^{10} \left\{ \sum_{j=1}^4 (i-j) \right\} &= \sum_{i=1}^{10} (4i - 10) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 \times 10 \\ &= 120 \end{aligned}$$

(4) STEP1 $\sum_{k=1}^i 2ik$ 계산하기

$$\sum_{k=1}^i 2ik = 2i \sum_{k=1}^i k = 2i \times \frac{i(i+1)}{2} = i^3 + i^2$$

STEP2 주어진 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{k=1}^i 2ik \right) &= \sum_{i=1}^6 (i^3 + i^2) \\ &= \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \\ &= 532 \end{aligned}$$

04-2 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

해결전략 $\sum_{k=1}^m \frac{6k^2}{2m+1}$ 에서 k 는 변수, m 은 상수임에 주의한다.

STEP1 $\sum_{k=1}^m \frac{6k^2}{2m+1}$ 을 m 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{6k^2}{2m+1} &= \frac{6}{2m+1} \sum_{k=1}^m k^2 \\ &= \frac{6}{2m+1} \times \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\ &= m(m+1) = m^2 + m \end{aligned}$$

STEP2 주어진 식을 n 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \frac{6k^2}{2m+1} \right) &= \sum_{m=1}^n (m^2 + m) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

04-3 $m=n$

해결전략 괄호 안의 Σ 에서 변수는 i , 전체 Σ 에서 변수는 k 임에 주의하여 계산한다.

STEP1 $\sum_{i=1}^n (k-i)$ 계산하기

$$\sum_{i=1}^n (k-i) = \sum_{i=1}^n k - \sum_{i=1}^n i = kn - \frac{n(n+1)}{2}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n (k-i) \right\}$ 계산하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n (k-i) \right\} &= \sum_{k=1}^m \left\{ kn - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn}{2}(m-n) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

STEP 3 식의 값이 0이 될 조건 구하기

①의 값이 항상 0이 되려면 $mn \neq 0$ 이므로
 $m-n=0 \quad \therefore m=n$ → m, n 은 자연수

04-4 ㉔ 8

해결전략 | 변수와 상수에 주의하여 주어진 식의 좌변을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $\sum_{i=1}^k (4i-2k)$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (4i-2k) &= 4 \sum_{i=1}^k i - 2 \sum_{i=1}^k k \\ &= 4 \times \frac{k(k+1)}{2} - 2k \times k = 2k \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^k (4i-2k) \right\}$ 계산하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^k (4i-2k) \right\} &= \sum_{k=1}^n 2k \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \end{aligned}$$

STEP 3 n 의 값 구하기

따라서 $n(n+1)=72$ 에서
 $n^2+n-72=0, (n-8)(n+9)=0$
 $\therefore n=8$ ($\because n$ 은 자연수)

04-5 ㉔ 1860

해결전략 | 괄호 안의 Σ 에서 변수는 b_l , 전체 Σ 에서 변수는 a_k 임에 주의하여 계산한다.

STEP 1 $\sum_{l=1}^5 a_k b_l$ 을 a_k 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^5 a_k b_l &= a_k \sum_{l=1}^5 b_l = a_k \sum_{l=1}^5 4l \\ &= a_k \times 4 \times \frac{5 \times 6}{2} = 60a_k \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^5 \left(\sum_{l=1}^5 a_k b_l \right)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 \left(\sum_{l=1}^5 a_k b_l \right) &= \sum_{k=1}^5 60a_k = 60 \sum_{k=1}^5 2^{k-1} \\ &= 60 \times \frac{1 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} = 1860 \end{aligned}$$

04-6 ㉔ 5

해결전략 | $\sum_{k=1}^j \Rightarrow \sum_{j=1}^i \Rightarrow \sum_{i=1}^n$ 의 순서로 변수에 주의하여 계산한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^j 2$ 계산하기

$$\sum_{k=1}^j 2 = 2 \times j = 2j \text{이므로}$$

STEP 2 $\sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^j 2 \right)$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^j 2 \right) &= \sum_{j=1}^i 2j = 2 \times \frac{i(i+1)}{2} \\ &= i^2 + i \end{aligned}$$

STEP 3 $f(n)$ 구하기

$$\begin{aligned} \therefore f(n) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^j 2 \right) \right\} = \sum_{i=1}^n (i^2 + i) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

STEP 4 n 의 값 구하기

따라서 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 70$ 에서
 $n(n+1)(n+2) = 210 = 5 \times 6 \times 7$
 $\therefore n=5$

필수유형 05

359쪽

05-1 ㉔ (1) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$
 (2) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

해결전략 | 수열의 일반항을 구한 다음 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 계산한다.

(1) STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = (n+1) \times n^2 = n^3 + n^2$$

STEP 2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} \end{aligned}$$

(2) STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2n \\ &= \sum_{k=1}^n 2k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n \end{aligned}$$

STEP 2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

05-2 ㉡ 2300

해결전략 | 일반항 a_n 을 구한 다음 $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 를 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

STEP 2 첫째항부터 제 12항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k &= \sum_{k=1}^{12} (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{12} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 1 \\ &= 4 \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} - 4 \times \frac{12 \times 13}{2} + 12 \\ &= 2300\end{aligned}$$

05-3 ㉡ 1530

해결전략 | 수열의 일반항을 구한 다음 19×210 이 제 몇 항인지 알아본다.

STEP 1 일반항 구하기

수열 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$$

STEP 2 19×210 이 제 몇 항인지 구하기

$(2n-1)(2n+1) = 19 \times 21$ 에서 $n=10$ 이므로 19×21 은 제 10항이다.

STEP 3 식의 값 구하기

따라서 구하는 식의 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 1) = 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 10 = 1530$$

05-4 ㉡ 8

해결전략 | 제 n 항은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

STEP 2 S_n 구하기

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2\end{aligned}$$

STEP 3 n 의 최솟값 구하기

$$S_n > 500 \text{에서 } 2^{n+1} - n - 2 > 500$$

$$\therefore 2^{n+1} - n > 502$$

$$\text{이때 } n=7 \text{이면 } 2^8 - 7 = 249,$$

$$n=8 \text{이면 } 2^9 - 8 = 504 \text{이므로 } n \geq 8$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

05-5 ㉡ 12

해결전략 | 각 항에 미지수 n 이 있으므로 수열의 일반항을 a_n 이 아닌 a_k 로 놓는다.

STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_k 라고 하면

$$a_k = \frac{3n+k}{n} = 3 + \frac{k}{n}$$

STEP 2 S_n 구하기

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=1}^n 3 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= 3n + \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

STEP 3 n 의 값 구하기

$$\text{따라서 } S_n = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2} = \frac{85}{2} \text{에서}$$

$$\frac{7}{2}n = 42 \quad \therefore n = 12$$

05-6 ㉡ 100

해결전략 | 수열의 각 항을 자릿값의 합으로 나타내 본다.

STEP 1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_1 = 3, a_2 = 3 + 30 = 3 + 3 \times 10,$$

$$a_3 = 3 + 30 + 300 = 3 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2, \dots$$

으로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned}a_n &= 3 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^{n-1} \\ &= \frac{3(10^n - 1)}{10 - 1} = \frac{1}{3}(10^n - 1)\end{aligned}$$

STEP 2 첫째항부터 제 10항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3}(10^k - 1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - 1 \times 10 \right\} \\ &= \frac{1}{27} \times 10^{11} - \frac{100}{27} = \frac{10^{11} - 100}{27}\end{aligned}$$

STEP3 a 의 값 구하기

따라서 $\frac{10^{11}-a}{27} = \frac{10^{11}-100}{27}$ 이므로

$$a=100$$

필수유형 06

361쪽

06-1 ㉮ (1) 33 (2) $3n^2-n$

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓고 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$

($n \geq 2$)임을 이용한다.

(1) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^3 - 5$$

$$a_1 = S_1 = -4$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 59 - 22 = 37$$

$$\therefore a_1 + a_4 = -4 + 37 = 33$$

(2) STEP1 a_n 구하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+1)(2n-1)$$

$$n=1\text{일 때 } a_1 = S_1 = 2$$

$$n \geq 2\text{일 때}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(2n-1) - (n-1)n(2n-3) \\ &= n\{(n+1)(2n-1) - (n-1)(2n-3)\} \\ &= n(6n-4) = 2n(3n-2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2n(3n-2) \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k(3k-2)}{k} = \sum_{k=1}^n (6k-4) \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = 3n^2 - n \end{aligned}$$

06-2 ㉮ 1020

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓고 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$

($n \geq 2$)임을 이용한다.

STEP1 a_n 구하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1$$

$$n=1\text{일 때 } a_1 = S_1 = 1$$

$$n \geq 2\text{일 때}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) = 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $\sum_{k=1}^8 a_{k+2}$ 의 값 구하기

$$\text{이때 } a_{k+2} = 2^{(k+2)-1} = 2^{k+1} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^8 a_{k+2} = \sum_{k=1}^8 2^{k+1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = 1020$$

06-3 ㉮ 360

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n ka_k$ 로 놓으면 $S_n - S_{n-1} = na_n$ 이다.

STEP1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n ka_k = n(n+1)(n+2) \text{로 놓으면}$$

$$1 \times a_1 = S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$n \geq 2\text{일 때}$$

$$\begin{aligned} na_n &= S_n - S_{n-1} = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ &= n(n+1)\{(n+2) - (n-1)\} \\ &= 3n(n+1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 3(n+1) \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값 구하기

$$\text{이때 } a_{2k} = 3(2k+1) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{10} 3(2k+1) = 6 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 3 \times 10 = 360 \end{aligned}$$

06-4 ㉮ 9

해결전략 | 먼저 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 일반항을 구한다.

STEP1 a_n 구하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$$

$$n=1\text{일 때 } a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$$

$$n \geq 2\text{일 때}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}$ 을 m 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^m k(k+1) = \sum_{k=1}^m (k^2 + k) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} \end{aligned}$$

STEP 3 m 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} &= 330 \text{이므로} \\ \frac{m(m+1)(m+2)}{3} &= 330 \end{aligned}$$

$$m(m+1)(m+2) = 990$$

이때 $990 = 9 \times 10 \times 11$ 이므로 $m=9$

06-5 ㉮ 25

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 로 놓으면 $S_n - S_{n-1} = a_{2n-1}$ 이다.

STEP 1 a_{2n-1} 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 + n \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 + n) - \{3(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

..... ㉮

STEP 2 a_8 의 값 구하기

한편, a_8 은 a_7 과 a_9 의 등차중항이므로

$$a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2}$$

㉮에 $n=4$, $n=5$ 를 각각 대입하면

$$a_7 = 24 - 2 = 22$$

$$a_9 = 30 - 2 = 28$$

$$\therefore a_8 = \frac{22 + 28}{2} = 25$$

●→ 다른 풀이1

$$a_{2n-1} = 6n - 2 \text{에 } n = \frac{k+1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$a_k = 6 \times \frac{k+1}{2} - 2 = 3k + 1$$

$$\therefore a_8 = 24 + 1 = 25$$

●→ 다른 풀이2

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 + n \text{에 } n=1 \text{을 대입하면}$$

$$\sum_{k=1}^1 a_{2k-1} = 3 \times 1^2 + 1 = 4$$

$$\therefore a_1 = 4 \quad \dots\dots ㉮$$

$n=2$ 를 대입하면

$$\sum_{k=1}^2 a_{2k-1} = 3 \times 2^2 + 2 = 14$$

$$\therefore a_1 + a_3 = 14 \quad \dots\dots ㉮$$

㉮-㉮을 하면 $a_3 = 10$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 의 공차는 $2d$ 이므로

$$2d = a_3 - a_1 = 10 - 4 = 6 \quad \therefore d = 3$$

따라서 $a_n = 4 + (n-1) \times 3 = 3n + 1$ 이므로

$$a_8 = 3 \times 8 + 1 = 25$$

→ $a_1, a_3, a_5, \dots$ 을
항으로 하는 수
열이므로 공차는
 $2d$ 가 된다.

06-6 ㉮ 27

해결전략 | $\sum_{k=1}^n a_{2k+1}$ 을 덧셈식으로 나타낸 다음 로그의 성질을 이용한다.

STEP 1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_3 (n^2 + n) \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log_3 (n^2 + n) - \log_3 \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= \log_3 (n^2 + n) - \log_3 (n^2 - n) \\ &= \log_3 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \log_3 \frac{n+1}{n-1} \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^n a_{2k+1}$ 구하기

따라서

$$a_{2k+1} = \log_3 \frac{(2k+1)+1}{(2k+1)-1} = \log_3 \frac{k+1}{k}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^n \log_3 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots \\ &\quad + \log_3 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_3 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \log_3 (n+1) \end{aligned}$$

STEP 3 자연수 n 의 최솟값 구하기

$$\sum_{k=1}^n a_{2k+1} > 3 \text{에서 } \log_3 (n+1) > 3$$

$$n+1 > 3^3 \quad \therefore n > 26$$

즉, 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

07-1 $\frac{n}{2n+1}$

해결전략 | 일반항이 분수 꼴이므로 일반항을 부분분수로 고쳐서 계산한다.

STEP1 일반항을 부분분수로 나타내기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

STEP2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

07-2 $\frac{10}{31}$

해결전략 | 먼저 수열 $\frac{1}{1 \times 4}, \frac{1}{4 \times 7}, \frac{1}{7 \times 10}, \dots$ 의 일반항을 구한 다음 $\frac{1}{28 \times 31}$ 이 제몇 항인지 알아본다.

STEP1 일반항을 부분분수로 나타내기

수열 $\frac{1}{1 \times 4}, \frac{1}{4 \times 7}, \frac{1}{7 \times 10}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

STEP2 식의 값 구하기

이때 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{28 \times 31}$ 에서 $n=10$ 이므로 구하는 식의 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{10}{31} \end{aligned}$$

▶참고 일반항을 구하지 않고 주어진 덧셈식을 바로 부분분수로 고쳐서 계산해도 된다.

07-3 $\frac{n}{4n+1}$

해결전략 | 항이 연쇄적으로 소거되도록 좌변을 덧셈식으로 나타낸다.

STEP1 좌변 계산하기

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{n}{4n+1} \end{aligned}$$

STEP2 n 의 값 구하기

따라서 $\frac{n}{4n+1} = \frac{9}{37}$ 에서 $n=9$

07-4 $\frac{9}{5}$

해결전략 | ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 를 이용하여 a_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a_n 을 n 에 대한 식으로 나타내기

$$a_n = {}_{n+1}C_2 = \frac{(n+1) \times n}{2 \times 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

STEP2 $\sum_{n=1}^9 \frac{1}{a_n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^9 \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^9 \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^9 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

07-5 $\frac{n}{8(n+2)}$

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓으면 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 a_n 을 구한다.

STEP1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+3) \text{으로 놓으면}$$

$$a_1 = S_1 = 4$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n(n+3) - (n-1)(n+2)$$

$$= 2n+2$$

$$\therefore a_n = 2n + 2 \quad (n \geq 1)$$

STEP2 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 을 부분분수로 나타내기

이때 $a_{k+1} = 2(k+1) + 2 = 2k + 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4} \right) \end{aligned}$$

STEP3 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n+4} \right) = \frac{n}{8(n+2)} \end{aligned}$$

07-6 ㉮ 12

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기

이차방정식 $x^2 - x + (n+1)(n+2) = 0$ 의 두 실근이 α_n ,

β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 1, \quad \alpha_n \beta_n = (n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

STEP2 $\sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} = \frac{k}{2(k+2)} \end{aligned}$$

STEP3 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \frac{k}{2(k+2)} = \frac{3}{7} \text{에서}$$

$$7k = 6(k+2) \quad \therefore k = 12$$

필수유형 08

365쪽

$$08-1 \text{ ㉮ (1) } \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

$$(2) \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2} - 2$$

해결전략 | 분모에 근호가 포함되어 있으므로 일반항의 분모를 유리화하여 계산한다.

(1) STEP1 일반항의 분모를 유리화하여 나타내기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

STEP2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

(2) STEP1 일반항의 분모를 유리화하여 나타내기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n+4}} \\ &= \frac{4(\sqrt{2n} - \sqrt{2n+4})}{(\sqrt{2n} + \sqrt{2n+4})(\sqrt{2n} - \sqrt{2n+4})} \\ &= \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n} \end{aligned}$$

STEP2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+4} - \sqrt{2k}) \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{8} - \sqrt{4}) + (\sqrt{10} - \sqrt{6}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n-2}) + (\sqrt{2n+4} - \sqrt{2n}) \\ &= \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2} - \sqrt{4} \\ &= \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

$$08-2 \text{ ㉮ } -\frac{3}{2}$$

해결전략 | $\frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}}$ 의 분모를 유리화한 다음 좌변을

덧셈식으로 나타낸다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{17} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{17} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{17} \frac{\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2})(\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{17} \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \dots \\ & \quad + (\sqrt{36} - \sqrt{34}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{36} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (6 - \sqrt{2}) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

STEP 2 ab 의 값 구하기

따라서 $a + b\sqrt{2} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 에서

$$a = 3, b = -\frac{1}{2} \quad \therefore ab = -\frac{3}{2}$$

08-3 ㉮ 15

해결전략 | $\frac{6}{\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k+4}}$ 의 분모를 유리화한 다음 좌변을 덧셈식으로 나타낸다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k+4}}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{6}{\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k+4}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{6(\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k+4})}{(\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k+4})(\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k+4})} \\ &= \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{3k+4} - \sqrt{3k+1}) \\ &= 2\{(\sqrt{7} - \sqrt{4}) + (\sqrt{10} - \sqrt{7}) + (\sqrt{13} - \sqrt{10}) + \dots \\ & \quad + (\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})\} \\ &= 2(\sqrt{3n+4} - \sqrt{4}) = 2(\sqrt{3n+4} - 2) \end{aligned}$$

STEP 2 n 의 값 구하기

따라서 $2(\sqrt{3n+4} - 2) = 10$ 에서

$$\sqrt{3n+4} = 7, 3n+4 = 49 \quad \therefore n = 15$$

08-4 ㉮ 2

해결전략 | 등차수열의 두 항을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + 2d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_8 = a + 7d = 11 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 4, d = 1$

$$\therefore a_n = 4 + (n-1) \times 1 = n + 3$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} & \therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{k+4} + \sqrt{k+3}} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4} + \sqrt{k+3})(\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3})} \\ &= \sum_{k=1}^{12} (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \dots \\ & \quad + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

08-5 ㉮ 9

해결전략 | 이차방정식을 인수분해하여 두 근 α_n, β_n 을 구한다.

STEP 1 α_n, β_n 구하기

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0$$

$$(x-n)\{x-(n-1)\} = 0$$

$$\therefore x = n \text{ 또는 } x = n-1$$

$$\text{즉, } \alpha_n = n, \beta_n = n-1 \text{ 또는 } \alpha_n = n-1, \beta_n = n$$

STEP 2 $\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} & \therefore \sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{81} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\ &= \sum_{n=1}^{81} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= (1-0) + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) \\ &= \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

08-6 ㉮ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 2$

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓으면 $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1}$

($n \geq 2$)임을 이용하여 주어진 조건에서 a_n^2 을 구한 다음 a_n 을 구한다.

STEP 1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 = (n+1)^2 \text{으로 놓으면}$$

$$a_1^2 = S_1 = (1+1)^2 = 4 \quad \therefore a_1 = 2 \quad (\because a_n > 0)$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n^2 = S_n - S_{n-1} = (n+1)^2 - \{(n-1)+1\}^2 = 2n+1$$

$$\therefore a_n = \sqrt{2n+1} \quad (\because a_n > 0)$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k + a_{k+1}}$ 의 값 구하기 $\rightarrow$ 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=2$, $a_n=\sqrt{2n+1} \ (n \geq 2)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k + a_{k+1}} \\ &= \frac{1}{a_1 + a_2} + \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{a_k + a_{k+1}} \rightarrow a_n = \sqrt{2n+1} \text{은 둘째항부터} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3}} \rightarrow \text{성립하므로 } \sum_{k=2}^{12} \text{로 변형한다.} \\ &= \frac{2 - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \rightarrow a_1=2, a_2=\sqrt{2 \times 2 + 1} = \sqrt{5} \\ & \quad + \sum_{k=2}^{12} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3})} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \sum_{k=2}^{12} \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}}{2} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{2} \{(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{9} - \sqrt{7}) \\ & \quad + (\sqrt{11} - \sqrt{9}) + \dots + (\sqrt{27} - \sqrt{25})\} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{2}(\sqrt{27} - \sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 2 \end{aligned}$$

발전유형 09

367쪽

09-1 답 89

해결전략 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 을 차례로 구하여 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 항을 찾는다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 항 알아보기

$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \dots$ 을 5로 나누었을 때의 나머지는 각각 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, $\dots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 3, 1이 반복된다.

STEP 2 $\sum_{k=1}^{35} a_k$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{35} a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\ & \quad \dots + (a_{29} + a_{30} + a_{31} + a_{32}) + a_{33} + a_{34} + a_{35} \\ &= (2 + 4 + 3 + 1) \times 8 + 2 + 4 + 3 \\ &= 89 \end{aligned}$$

09-2 답 130

해결전략 1을 기준으로 항을 1개, 2개, 3개, $\dots$ 씩 묶어서 생각한다.

STEP 1 a_{40} 알아보기

수열의 항을 1개, 2개, 3개, 4개, $\dots$ 씩 묶고 n 번째 묶음을 제 n 군이라고 하면

(1), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), $\dots$

제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이므로 $\frac{8 \times 9}{2} = 36$, $\frac{9 \times 10}{2} = 45$ 에서 a_{40} 은 제9군의 4번째 항이다.

STEP 2 $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값 구하기

따라서 제 n 군의 항의 합은

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{40} a_k \\ &= (\text{제1군부터 제8군까지의 합}) \\ & \quad + (\text{제9군의 첫째항부터 4번째 항까지의 합}) \\ &= \sum_{k=1}^8 \frac{k(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^4 k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 (k^2 + k) + \sum_{k=1}^4 k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} \right) + \frac{4 \times 5}{2} \\ &= 120 + 10 = 130 \end{aligned}$$

09-3 답 18

해결전략 자연수의 거듭제곱에서 일의 자리 숫자는 반복되므로 7^n 에서 반복되는 일의 자리 숫자를 구한다.

STEP 1 7^n 에서 반복되는 일의 자리 숫자 알아보기

$7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7, 7^8, \dots$ 의 일의 자리 숫자는

7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, $\dots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 7, 9, 3, 1이 반복된다.

STEP 2 n 의 값 구하기

이때 $7 + 9 + 3 + 1 = 20$ 이고 $96 = 20 \times 4 + 7 + 9$ 이므로

$$96 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 4 + a_{17} + a_{18}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{18} a_k = 96$ 이므로 $n = 18$

09-4 답 150

해결전략 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 수와 수열 $\{b_n\}$ 에서 반복되는 수를 구한 다음 수열 $\{a_n + b_n\}$ 에서 반복되는 수를 알아본다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에서 각각 반복되는 수 알아보기

$9, 9^2, 9^3, 9^4, \dots$ 을 10으로 나누었을 때의 나머지는 각각

9, 1, 9, 1, ...이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 9, 1이 반복된다.
 $4, 4^2, 4^3, 4^4, \dots$ 을 5로 나누었을 때의 나머지는 각각
 $4, 1, 4, 1, \dots$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 4, 1이 반복된다.

STEP 2 $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$ 의 값 구하기

따라서 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 13, 2가 반복되므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2) + (a_3 + b_3 + a_4 + b_4) \\ &\quad + \dots + (a_{19} + b_{19} + a_{20} + b_{20}) \\ &= (13 + 2) \times 10 = 150 \end{aligned}$$

09-5 ㉮ 21

해결전략 | 분모가 같은 분수끼리 묶어서 생각한다.

STEP 1 제35항 알아보기

수열의 항을 분모가 같은 분수끼리 묶고 n 번째 묶음을 제 n 군이라고 하면

$$(1), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \dots$$

제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이므로 $\frac{7 \times 8}{2} = 28$, $\frac{8 \times 9}{2} = 36$ 에서 제35항은 제8군의
 7번째 항이다.

STEP 2 첫째항부터 제35항까지의 합 구하기

제 n 군의 항의 합은

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} &= \frac{1+2+3+\dots+n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{35} a_k &= (\text{제1군부터 제7군까지의 합}) \\ &\quad + (\text{제8군의 첫째항부터 7번째 항까지의 합}) \\ &= \sum_{k=1}^7 \frac{k+1}{2} + \sum_{k=1}^7 \frac{k}{8} \quad \rightarrow \text{제8군의 분모는 모두 8이다.} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7 \times 8}{2} + 1 \times 7 \right) + \frac{1}{8} \times \frac{7 \times 8}{2} \\ &= \frac{35}{2} + \frac{7}{2} = 21 \end{aligned}$$

09-6 ㉮ 11

해결전략 | $n!$ 은 1부터 n 까지 연속된 수의 곱이므로 $n!$ 중
 10의 배수는 일의 자리 숫자가 항상 0임을 이용한다.

STEP 1 $n! + 1$ 의 일의 자리 숫자 알아보기

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \dots$ 에서 $5!$ 은
 10의 배수이므로 $5!, 6!, 7!, \dots$ 은 모두 10의 배수로 일
 의 자리 숫자가 0이다.

따라서 $n! + 1$ 의 일의 자리 숫자는 2, 3, 7, 5, 1, 1, 1,
 $1, \dots$ 으로 제5항부터는 모두 1이다.

STEP 2 m 의 값 구하기

이때 $2 + 3 + 7 + 5 = 17$ 이고 $24 = 17 + 1 \times 7$ 이므로

$$24 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_5 + \dots + a_{11}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{11} a_k = 24$ 이므로 $m = 11$

발전유형 10

369쪽

10-1 ㉮ $(n-1) \times 2^n + 1$

해결전략 | (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴로 이루어진 수열이므
 로 구하는 합을 S 로 놓고 양변에 등비수열의 공비를 곱한다.

STEP 1 구하는 합을 S 로 놓고 $2S$ 를 식으로 나타내기

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S 라고 하면

$$S = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + n \times 2^{n-1} \quad \text{..... ㉠}$$

등비수열 $1, 2, 2^2, \dots$ 의 공비가 2이므로

㉠의 양변에 2를 곱하면

$$\begin{aligned} 2S &= 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \dots \\ &\quad + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n \quad \text{..... ㉡} \end{aligned}$$

STEP 2 첫째항부터 제 n 항까지의 합 구하기

㉠ - ㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + \dots + 1 \times 2^{n-1} - n \times 2^n \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - n \times 2^n \\ &= \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} - n \times 2^n \\ &= (1 - n) \times 2^n - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore S = (n-1) \times 2^n + 1$$

10-2 ㉮ $\frac{3}{16} - \frac{41}{16} \times 3^{11}$

해결전략 | (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴에서 공비가 음수임
 에 주의한다.

STEP 1 구하는 값을 S 로 놓고 $-3S$ 를 식으로 나타내기

$$S = 1 \times 3 - 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 - 4 \times 3^4 + \dots - 10 \times 3^{10} \quad \text{..... ㉠}$$

으로 놓자.

등비수열 $3, -3^2, 3^3, -3^4, \dots$ 의 공비가 -3 이므로 ㉠의 양변에 -3 을 곱하면
 $-3S = -1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 - 3 \times 3^4 + 4 \times 3^5 - \dots$
 $-9 \times 3^{10} + 10 \times 3^{11} \dots\dots$ ㉡

STEP2 주어진 식의 값 구하기

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} 4S &= 1 \times 3 - 1 \times 3^2 + 1 \times 3^3 - 1 \times 3^4 + \dots \\ &\quad - 1 \times 3^{10} - 10 \times 3^{11} \\ &= (3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots - 3^{10}) - 10 \times 3^{11} \\ &= \frac{3\{1 - (-3)^{10}\}}{1 - (-3)} - 10 \times 3^{11} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 3^{11} - 10 \times 3^{11} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{41}{4} \times 3^{11} \\ \therefore S &= \frac{3}{16} - \frac{41}{16} \times 3^{11} \end{aligned}$$

10-3 **답** 3×2^{15}

해결전략 | (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴의 합이므로 합을 덧셈식으로 나타내어 계산한다.

STEP1 주어진 합을 S 로 놓고 $2S$ 를 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{12} (k+1)2^k \text{으로 놓으면} \\ S &= 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + 13 \times 2^{12} \dots\dots \text{㉠} \\ \text{㉠의 양변에 2를 곱하면} \\ 2S &= 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \dots + 13 \times 2^{13} \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

STEP2 식의 값 구하기

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= 2 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + \dots + 1 \times 2^{12} - 13 \times 2^{13} \\ &= 2 \times 2 + (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12}) - 13 \times 2^{13} \\ &= 4 + \frac{4(2^{11}-1)}{2-1} - 13 \times 2^{13} \\ &= 2^{13} - 13 \times 2^{13} = -12 \times 2^{13} = -3 \times 2^{15} \\ \therefore S &= 3 \times 2^{15} \end{aligned}$$

10-4 **답** $a=4, b=7$

해결전략 | 주어진 등식의 좌변은 (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴의 합으로 등비수열의 공비는 $\frac{1}{2}$ 이다.

STEP1 주어진 등식의 좌변을 계산하기

주어진 등식의 좌변의 값을 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{10}{2^9} \dots\dots \text{㉠} \\ \text{㉠의 양변에 } \frac{1}{2} \text{을 곱하면} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}} \dots\dots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} - \frac{10}{2^{10}} \\ &= \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{10}{2^{10}} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{5}{2^9} = 2 - \frac{6}{2^9} = 2 - \frac{3}{2^8} \\ \therefore S &= 4 - \frac{3}{2^7} \end{aligned}$$

STEP2 a, b 의 값 구하기

따라서 $4 - \frac{3}{2^7} = a - \frac{3}{2^b}$ 에서 $a=4, b=7$

10-5 **답** $1+7 \times 2^{16}$

해결전략 | 함수 $f(x)$ 는 (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴의 합으로 나타낸 식이다.

STEP1 $f(4)$ 와 $4f(4)$ 를 식으로 나타내기

$$f(4) = 1 + 4 \times 4 + 7 \times 4^2 + \dots + 22 \times 4^7 \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 4를 곱하면

$$4f(4) = 1 \times 4 + 4 \times 4^2 + 7 \times 4^3 + \dots + 22 \times 4^8 \dots\dots \text{㉡}$$

STEP2 $f(4)$ 의 값 구하기

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -3f(4) &= 1 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + 3 \times 4^7 - 22 \times 4^8 \\ &= 1 + \frac{12(4^7-1)}{4-1} - 22 \times 4^8 \\ &= 1 + 4^8 - 4 - 22 \times 4^8 \\ &= -3 - 21 \times 4^8 \\ &= -3 - 21 \times 2^{16} \\ \therefore f(4) &= 1 + 7 \times 2^{16} \end{aligned}$$

10-6 **답** 16

해결전략 | 주어진 다항식에 $x=2$ 를 대입한 값이 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지도.

STEP1 나머지를 S 로 놓고 $2S$ 를 식으로 나타내기

주어진 다항식을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 S 라고 하면 S 는 주어진 식에 $x=2$ 를 대입한 값이므로

$$S = 2 \times 2 + 4 \times 2^2 + 6 \times 2^3 + \dots + 2n \times 2^n \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$$2S = 2 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + 6 \times 2^4 + \dots + 2n \times 2^{n+1} \dots\dots \text{㉡}$$

STEP2 나머지 구하기

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned}
-S &= 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 2 \times 2^n - 2n \times 2^{n+1} \\
&= (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}) - n \times 2^{n+2} \\
&= \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - n \times 2^{n+2} \\
&= 2^{n+2} - 4 - n \times 2^{n+2} \\
&= (1 - n) \times 2^{n+2} - 4 \\
\therefore S &= (n - 1) \times 2^{n+2} + 4
\end{aligned}$$

STEP 3 n 의 값 구하기

따라서 $(n - 1) \times 2^{n+2} + 4 = 15 \times 2^{18} + 4$ 에서
 $n - 1 = 15, n + 2 = 18 \quad \therefore n = 16$

실전 연습 문제

370~372쪽

01 ①	02 ①	03 ②	04 18	05 ④
06 960	07 ④	08 ⑤	09 19	10 ②
11 $\log 2$	12 ④	13 ③	14 $\frac{10}{31}$	15 ⑤
16 ③	17 ②	18 ⑤		

01

해결전략 | 주어진 식의 좌변을 덧셈식으로 나타낸다.

STEP 1 a_{n+1} 구하기

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\
&= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\
&= a_1 - a_{n+1} = 3 - a_{n+1} \\
&\text{이므로 } 3 - a_{n+1} = 4n - 5 \quad \therefore a_{n+1} = -4n + 8
\end{aligned}$$

STEP 2 a_7 의 값 구하기

$a_{n+1} = -4n + 8$ 에 $n = 6$ 을 대입하면
 $a_7 = -24 + 8 = -16$

02

해결전략 | 두 곡선이 만나는 점의 x 좌표는 방정식

$\log_2 x = \log_2 (2^n - x)$ 의 해이다.

STEP 1 a_n 구하기

두 곡선 $y = \log_2 x, y = \log_2 (2^n - x)$ 가 만나는 점의
 x 좌표는 $\log_2 x = \log_2 (2^n - x)$ 에서
 $x = 2^n - x, 2x = 2^n$
 $\therefore x = 2^{n-1} \quad \therefore a_n = 2^{n-1}$

STEP 2 $\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값 구하기

$\therefore \sum_{n=1}^5 a_n = \sum_{n=1}^5 2^{n-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$

03

해결전략 | $(a_k - 3)(b_k - 3)$ 을 전개한 다음 Σ 의 성질을 이용한다.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{14} (a_k - 3)(b_k - 3) &= \sum_{k=1}^{14} \{a_k b_k - 3(a_k + b_k) + 9\} \\
&= \sum_{k=1}^{14} a_k b_k - 3 \sum_{k=1}^{14} (a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{14} 9 \\
&= 9 - 3 \times 5 + 9 \times 14 = 120
\end{aligned}$$

04

해결전략 | $a_6 - b_6 = \sum_{n=1}^6 (a_n - b_n) - \sum_{n=1}^5 (a_n - b_n)$ 임을 이용한다.

STEP 1 $\sum_{n=1}^6 (a_n - b_n)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^6 (2a_n - 2b_n) &= 2 \sum_{n=1}^6 (a_n - b_n) = 56 \text{에서} \\
\sum_{n=1}^6 (a_n - b_n) &= 28
\end{aligned}$$

STEP 2 $a_6 - b_6$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\therefore a_6 - b_6 &= \sum_{n=1}^6 (a_n - b_n) - \sum_{n=1}^5 (a_n - b_n) \\
&= 28 - 10 = 18
\end{aligned}$$

05

해결전략 | $a_n - b_n = 3$, 즉 $a_k - b_k = 3$ 을 이용하여 $a_k - 3b_k$ 를 b_k 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{15} (a_k - 3b_k)$ 를 $\sum_{k=1}^{15} b_k$ 에 대한 식으로 나타내기

임의의 자연수 k 에 대하여 $a_k - b_k = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}
a_k &= 3 + b_k \\
a_k - 3b_k &= (3 + b_k) - 3b_k = 3 - 2b_k \text{이므로} \\
\sum_{k=1}^{15} (a_k - 3b_k) &= \sum_{k=1}^{15} (3 - 2b_k) \\
&= \sum_{k=1}^{15} 3 - 2 \sum_{k=1}^{15} b_k
\end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{15} b_k$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{15} 3 - 2 \sum_{k=1}^{15} b_k &= 25 \text{에서} \\
3 \times 15 - 2 \sum_{k=1}^{15} b_k &= 25, \quad -2 \sum_{k=1}^{15} b_k = -20 \\
\therefore \sum_{k=1}^{15} b_k &= 10
\end{aligned}$$

06

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $(\alpha_k - \beta_k)^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 $(\alpha_k - \beta_k)^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기

이차방정식 $x^2 - 2kx + k = 0$ 의 두 근이 α_k, β_k 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = 2k, \alpha_k \beta_k = k \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha_k - \beta_k)^2 &= (\alpha_k + \beta_k)^2 - 4\alpha_k \beta_k \\ &= 4k^2 - 4k \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

STEP2 $\sum_{k=1}^9 (\alpha_k - \beta_k)^2$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^9 (\alpha_k - \beta_k)^2 &= \sum_{k=1}^9 (4k^2 - 4k) \\ &= 4 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 4 \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= 1140 - 180 = 960 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

채점 요소	배점
① 두 근의 합과 곱을 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
② $(\alpha_k - \beta_k)^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
③ $\sum_{k=1}^9 (\alpha_k - \beta_k)^2$ 의 값 구하기	60 %

07

해결전략 6^n 은 짝수, 3^n 은 홀수임을 이용하여 $f(6^n), f(3^n)$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a_n 구하기

자연수 n 에 대하여 6^n 은 짝수, 3^n 은 홀수이므로
 $f(3^n) = \log_3 3^n = n \xrightarrow{(\text{짝수}) \times (\text{짝수}) = (\text{짝수})} (\text{홀수}) \times (\text{홀수}) = (\text{홀수})$

$$f(6^n) = \log_2 6^n = n \log_2 6 = n(1 + \log_2 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= f(6^n) - f(3^n) \\ &= n(1 + \log_2 3) - n = n \log_2 3 \end{aligned}$$

STEP2 $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{15} a_n &= \sum_{n=1}^{15} n \log_2 3 = \log_2 3 \sum_{n=1}^{15} n \\ &= \log_2 3 \times \frac{15 \times 16}{2} = 120 \log_2 3 \end{aligned}$$

08

해결전략 괄호 안의 Σ 에서 변수는 j , 전체 Σ 에서 변수는 i 임에 주의하여 계산한다.

STEP1 $\sum_{j=1}^i (4j - i)$ 계산하기

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i (4j - i) &= 4 \sum_{j=1}^i j - \sum_{j=1}^i i = 4 \times \frac{i(i+1)}{2} - i \times i \\ &= i^2 + 2i \end{aligned}$$

STEP2 $\sum_{i=1}^6 \left\{ \sum_{j=1}^i (4j - i) \right\}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^6 \left\{ \sum_{j=1}^i (4j - i) \right\} &= \sum_{i=1}^6 (i^2 + 2i) \\ &= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 2 \times \frac{6 \times 7}{2} \\ &= 91 + 42 = 133 \end{aligned}$$

09

해결전략 제 m 항은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제 m 항까지의 합이다.

STEP1 일반항 구하기

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \\ &= \frac{1 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

STEP2 첫째항부터 제8항까지의 합 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2}(3^k - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^8 3^k - \sum_{k=1}^8 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3(3^8 - 1)}{3 - 1} - 1 \times 8 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \times 3^9 - \frac{19}{4} \\ &= \frac{3^9 - 19}{4} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

STEP3 a 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \frac{3^9 - 19}{4} = \frac{3^9 - a}{4} \text{에서}$$

$$a = 19 \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① 일반항 구하기	40 %
② 첫째항부터 제8항까지의 합 구하기	50 %
③ a 의 값 구하기	10 %

10

해결전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 a , 공비가 r 이면 수열 $\{a_n^2\}$ 도 등비수열이고 첫째항은 a^2 , 공비는 r^2 이다.

STEP1 공비 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라고 하면

$$a_4 = 4a_2 \text{에서}$$

$$\frac{1}{5}r^3 = 4 \times \frac{1}{5}r, r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

STEP2 n 의 값 구하기

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 수열 $\{a_n^2\}$ 도 등비수열이고 첫째항은 $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, 공비는 2^2 이 된다.

따라서 $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3}{13} \sum_{k=1}^n a_k^2$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{5}(2^n-1)}{2-1} &= \frac{3}{13} \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \{(2^2)^n-1\}}{2^2-1} \\ \frac{1}{5}(2^n-1) &= \frac{1}{13} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times (2^{2n}-1) \quad \rightarrow \text{등비수열 } \{a_n^2\} \text{의 첫째항} \\ &\quad \text{부터 제 } n \text{항까지의 합이다.} \\ 1 &= \frac{1}{13} \times \frac{1}{5} \times (2^n+1) \\ 2^n+1 &= 65, \quad 2^n=64=2^6 \quad \therefore n=6 \end{aligned}$$

11

해결전략 | $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 일 때, $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)

임을 이용하여 a_n 을 구한다.

STEP 1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log n \text{으로 놓으면}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \log n - \log(n-1) = \log \frac{n}{n-1}$$

STEP 2 $a_4+a_5+a_9+a_{16}$ 의 값 구하기

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=0$ 이고, 둘째항부터 $a_n = \log \frac{n}{n-1}$ 인 수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore a_4+a_5+a_9+a_{16} &= \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \log \frac{9}{8} + \log \frac{16}{15} \\ &= \log \left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{9}{8} \times \frac{16}{15} \right) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

12

해결전략 | $a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ 임을 이용하여 일반항 a_n 을 구

한 다음 a_{4k+1} 을 구한다.

STEP 1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n \text{으로 놓으면}$$

$$a_1 = S_1 = 0$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2n - 2 \quad (n \geq 1)$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1}$ 의 값 구하기

이때 $a_{4k+1} = 2(4k+1) - 2 = 8k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1} = \sum_{k=1}^{10} 8k^2 = 8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 3080$$

13

해결전략 | x 절편 a_n 을 구한 다음 $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 을 부분분수로 고쳐서 계산한다.

STEP 1 a_n 구하기

$y = x - 2n - 1$ 에서 $y=0$ 일 때 $x=2n+1$ 이므로

$$a_n = 2n + 1$$

STEP 2 $\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값 구하기

이때 $a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33} \right) = \frac{5}{33} \end{aligned}$$

14

해결전략 | a_n 은 주어진 다항식에 $x=-n$ 을 대입한 이차식

이므로 이를 이용하여 $\frac{1}{a_n}$ 을 구한다.

STEP 1 a_n 구하기

a_n 은 주어진 다항식에 $x=-n$ 을 대입한 식이므로

$$\begin{aligned} a_n &= (-n)^2 + (1-2n) \times (-n) + 4n \\ &= 3n^2 + 3n = 3n(n+1) \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

STEP 2 $\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{a_n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{3n(n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{31} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{10}{31} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

채점 요소	배점
① a_n 구하기	30 %
② $\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{a_n}$ 의 값 구하기	70 %

15

해결전략 | $\frac{1}{f(k)}$ 의 분모를 유리화하여 계산한다.

STEP 1 $\frac{1}{f(k)}$ 의 분모를 유리화하여 나타내기

$f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(k)} &= \frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4}} \\ &= \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4}}{(\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4})(\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4})} \\ &= \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4}}{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}}\end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$ 계산하기

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}) \\ &= \{(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})\} \\ &= \sqrt{n+4} - \sqrt{4} = \sqrt{n+4} - 2\end{aligned}$$

STEP 3 n 의 값 구하기

따라서 $\sqrt{n+4} - 2 = 2$ 에서

$$\sqrt{n+4} = 4, n+4 = 16 \quad \therefore n = 12$$

16

해결전략 | $a_1, a_2, a_3, \dots$ 을 차례로 구하여 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 항을 찾는다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 항 알아보기

$8, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5, 8^6, 8^7, 8^8, \dots$ 을 10으로 나누었을 때의 나머지는 일의 자리 숫자와 같으므로 각각 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ...이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 8, 4, 2, 6이 반복된다.

STEP 2 $\sum_{k=1}^{25} (a_k + k)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{25} (a_k + k) &= \sum_{k=1}^{25} a_k + \sum_{k=1}^{25} k \\ &= (8+4+2+6) \times 6 + a_{25} + \frac{25 \times 26}{2} \\ &= 120 + 8 + 325 = 453\end{aligned}$$

17

해결전략 | 함수 $f(x)$ 는 (등차수열) $\times$ (등비수열) 꼴의 합으로 된 식이다.

STEP 1 $f(2)$ 와 $2f(2)$ 를 식으로 나타내기

$$f(2) = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + 10 \times 2^{10} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 2를 곱하면

$$2f(2) = 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + 10 \times 2^{11} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned}-f(2) &= 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + \dots + 1 \times 2^{10} - 10 \times 2^{11} \\ &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} - 10 \times 2^{11} \\ &= \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} - 10 \times 2^{11} \\ &= 2^{11} - 2 - 10 \times 2^{11} \\ &= -9 \times 2^{11} - 2\end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 9 \times 2^{11} + 2$$

STEP 2 $a-b$ 의 값 구하기

따라서 $9 \times 2^{11} + 2 = a \times 2^{11} + b$ 에서

$$a = 9, b = 2$$

$$\therefore a - b = 9 - 2 = 7$$

18

해결전략 | 먼저 두 수열의 일반항 a_n, b_n 을 각각 구한다.

STEP 1 a_n 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_7 = 1 + 6d = 13 \text{에서 } 6d = 12 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

STEP 2 b_n 구하기

$a_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$ 이므로 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면

$$b_3 = 1 \times r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore b_n = 3^{n-1}$$

STEP 3 $\sum_{k=1}^{10} a_k b_k$ 의 값 구하기

이때 $S = \sum_{k=1}^{10} a_k b_k$ 라고 하면

$$\begin{aligned}S &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_{10} b_{10} \\ &= 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times 3^2 + \dots + 19 \times 3^9 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 3을 곱하면

$$3S = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \dots + 19 \times 3^{10} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned}-2S &= 1 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \dots + 2 \times 3^9 - 19 \times 3^{10} \\ &= 1 + 2(3 + 3^2 + \dots + 3^9) - 19 \times 3^{10} \\ &= 1 + 2 \times \frac{3(3^9 - 1)}{3 - 1} - 19 \times 3^{10} \\ &= -18 \times 3^{10} - 2 \\ &= -2 \times 3^{12} - 2\end{aligned}$$

$$\therefore S = 3^{12} + 1$$

01 636 02 ④ 03 ③ 04 480
05 935 06 40 07 ① 08 77

01

해결전략 | $a_{2n-1}=4n-1$, $a_{2n}=2n+1$ 을 이용할 수 있도록

$\sum_{k=1}^{19} (a_k + a_{k+1})$ 을 덧셈식으로 나타낸 다음 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^9 a_{2k}$

에 대한 식으로 변형한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{19} (a_k + a_{k+1})$ 을 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^9 a_{2k}$ 에 대한 식으로

나타내기

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{19} (a_k + a_{k+1}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + 2a_{19} + a_{20} \\ &= 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) - a_1 \\ & \quad + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{18}) + a_{20} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} - a_1 + 2 \sum_{k=1}^9 a_{2k} + a_{20} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{19} (a_k + a_{k+1})$ 의 값 구하기

이때 $a_1=4-1=3$, $a_{20}=20+1=21$, $a_{2k-1}=4k-1$, $a_{2k}=2k+1$ 이므로 이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{19} (a_k + a_{k+1}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} (4k-1) - 3 + 2 \sum_{k=1}^9 (2k+1) + 21 \\ &= 2 \left(4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 \right) + 2 \left(2 \times \frac{9 \times 10}{2} + 9 \right) + 18 \\ &= 420 + 198 + 18 = 636 \end{aligned}$$

02

해결전략 | $\sum_{k=1}^{24} (-1)^k a_k$ 를 덧셈식으로 나타낸 다음 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$,

$\sum_{k=1}^{2n} a_k$ 를 이용할 수 있도록 덧셈식을 변형한다.

STEP 1 $\sum_{k=1}^{24} (-1)^k a_k$ 를 $\sum_{k=1}^{12} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{24} a_k$ 에 대한 식으로 나타

내기

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{24} (-1)^k a_k \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_{23} + a_{24} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{24}) \\ & \quad - 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{23}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} a_k - 2 \sum_{k=1}^{12} a_{2k-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{24} (-1)^k a_k$ 의 값 구하기

이때 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 6n^2 + n$ 에 $n=12$ 를 대입하면

$$\sum_{k=1}^{24} a_k = 6 \times 12^2 + 12 = 876$$

$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 - n$ 에 $n=12$ 를 대입하면

$$\sum_{k=1}^{12} a_{2k-1} = 3 \times 12^2 - 12 = 420$$

이므로 ①에서 구하는 값은

$$876 - 2 \times 420 = 36$$

03

해결전략 | a_n 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

STEP 1 a_n 구하기

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \end{aligned}$$

STEP 2 $\log_4 (2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \cdots \times 2^{a_{12}})$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} & \therefore \log_4 (2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \cdots \times 2^{a_{12}}) \\ &= \log_{2^2} 2^{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}} \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} k^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 325 \end{aligned}$$

04

해결전략 | 등차수열의 일반항과 이차방정식의 근과 계수의

관계를 이용하여 $\sum_{n=1}^{12} (\alpha_n - 1)(\beta_n - 1) = 276$ 에서 첫째항을 구한다.

STEP 1 a_n , a_{n+1} , a_{n+2} 를 첫째항에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라고 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 2 = 2n + a - 2$$

$$a_{n+1} = a + n \times 2 = 2n + a$$

$$a_{n+2} = a + (n+1) \times 2 = 2n + a + 2$$

STEP 2 $(\alpha_n - 1)(\beta_n - 1)$ 을 첫째항에 대한 식으로 나타내기

이차방정식 $x^2 + (a_{n+1} - a_n)x + a_{n+2} = 0$ 의 두 근이 α_n ,

β_n 이므로

$$\alpha_n + \beta_n = -a_{n+1} + a_n$$

$$= -(2n+a) + (2n+a-2)$$

$$= -2$$

$$\alpha_n \beta_n = a_{n+2} = 2n + a + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha_n - 1)(\beta_n - 1) &= \alpha_n \beta_n - (\alpha_n + \beta_n) + 1 \\ &= (2n + a + 2) - (-2) + 1 \\ &= 2n + a + 5 \end{aligned}$$

STEP 3 첫째항 구하기

$$\sum_{n=1}^{12} (\alpha_n - 1)(\beta_n - 1) = 276 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{12} (2n + a + 5) = 276$$

$$2 \times \frac{12 \times 13}{2} + (a + 5) \times 12 = 276$$

$$(a + 5) \times 12 = 120 \quad \therefore a = 5$$

STEP 4 $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값 구하기

따라서 $a_n = 2n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} a_n &= \sum_{n=1}^{20} (2n + 3) \\ &= 2 \times \frac{20 \times 21}{2} + 3 \times 20 = 480 \end{aligned}$$

05

해결전략 $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k$ 를 공차에 대한 식으로 나타내고,

$\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 은 부분분수로 고쳐서 계산한다.

STEP 1 공차 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{20} \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) \\ &= d + d + \cdots + d = 10d \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 10d = 20 \quad \therefore d = 2$$

STEP 2 $a_1 a_6$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \quad (\because a_{k+1} - a_k = d = 2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6} \right) = \frac{a_6 - a_1}{2a_1 a_6} \\ &= \frac{5d}{2a_1 a_6} = \frac{10}{2a_1 a_6} = \frac{5}{a_1 a_6} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{5}{a_1 a_6} = \frac{1}{15} \quad \therefore a_1 a_6 = 75$$

STEP 3 첫째항 구하기

이때 $a_6 = a_1 + 5d = a_1 + 10$ 이므로

$$a_1(a_1 + 10) = 75, \quad a_1^2 + 10a_1 - 75 = 0$$

$$(a_1 + 15)(a_1 - 5) = 0 \quad \therefore a_1 = 5 \quad (\because a_1 > 0)$$

STEP 4 $\sum_{k=1}^{10} k a_k$ 의 값 구하기

따라서 $a_n = 5 + (n - 1) \times 2 = 2n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k a_k &= \sum_{k=1}^{10} k(2k + 3) = \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 3k) \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 935 \end{aligned}$$

06

해결전략 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ 으로 놓으면 $a_1^2 = S_1, a_n^2 = S_n - S_{n-1}$

($n \geq 2$)이다.

STEP 1 a_n 구하기

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 = n^2 \text{으로 놓으면}$$

$$a_1^2 = S_1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n^2 = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$a_1^2 = S_1 = 1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n^2 = 2n - 1 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore a_n = \sqrt{2n - 1} \quad (\because a_n > 0)$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k + a_{k+1}}$ 계산하기

$$a_{n+1} = \sqrt{2(n+1) - 1} = \sqrt{2n+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k + a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}) \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{2m-1} - \sqrt{2m+1}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{2m+1}) \end{aligned}$$

STEP 3 m 의 값 구하기

$$\text{따라서 } -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{2m+1}) = 4 \text{에서}$$

$$\sqrt{2m+1} = 9, \quad 2m+1 = 81$$

$$\therefore m = 40$$

07

해결전략 | a_n 은 곡선 $y=\sin x$ 와 직선 $y=\frac{3}{n}$ 의 교점의 개수이므로 그래프를 그려서 알아본다.

STEP1 a_1, a_2 의 값 구하기

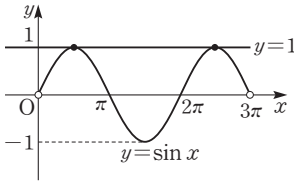
(i) $n=1, 2$ 일 때

$\frac{3}{n} > 1$ 이므로 방정식 $\sin x = \frac{3}{n}$ 의 실근은 존재하지 않는다.

$$\therefore a_1 = a_2 = 0$$

STEP2 a_3 의 값 구하기

(ii) $n=3$ 일 때

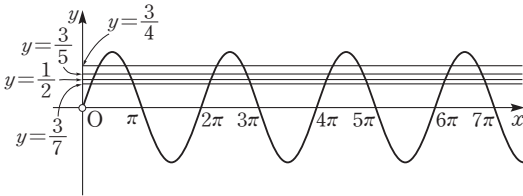


$0 < x < 3\pi$ 에서 방정식 $\sin x = 1$ 의 실근의 개수는 2이다.

$$\therefore a_3 = 2$$

STEP3 a_4, a_5, a_6, a_7 의 값 구하기

(iii) $n \geq 4$ 일 때



$0 < x < n\pi$ 일 때 방정식 $\sin x = \frac{3}{n}$ 의 실근의 개수는

$n=4$ 일 때 4이므로 $a_4=4$

$n=5$ 일 때 6이므로 $a_5=6$

$n=6$ 일 때 6이므로 $a_6=6$

$n=7$ 일 때 8이므로 $a_7=8$

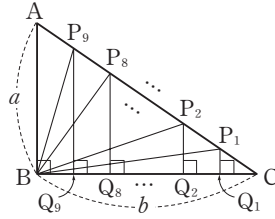
STEP4 $\sum_{n=1}^7 a_n$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^7 a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ &= 0 + 0 + 2 + 4 + 6 + 6 + 8 \\ &= 26 \end{aligned}$$

08

해결전략 | 점 P_n 에서 선분 BC 에 수선의 발 Q_n 을 내리고, 삼각형 BP_nQ_n 이 직각삼각형을 이용한다.

STEP1 $\overline{P_nQ_n}, \overline{BQ_n}$ 의 길이를 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 길이로 나타내기
다음 그림과 같이 $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$ 라 하고, $\overline{AC}$ 를 10등분한 점 P_n ($n=1, 2, \dots, 9$)에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 Q_n 이라고 하자.



이때 두 삼각형 ABC, P_nQ_nC 는 닮음이므로

$$\overline{P_nQ_n} = \frac{n}{10}a, \overline{BQ_n} = \overline{Q_nQ_8} = \dots = \overline{Q_1C} = \frac{1}{10}b,$$

$$\overline{BQ_n} = \frac{10-n}{10}b$$

STEP2 $\overline{BP_1}^2, \overline{BP_2}^2, \dots, \overline{BP_9}^2$ 을 a, b 를 사용한 식으로 나타내기

$\triangle BP_nQ_n$ 이 직각삼각형이므로

$$\overline{BP_1}^2 = \left(\frac{1}{10}a\right)^2 + \left(\frac{9}{10}b\right)^2,$$

$$\overline{BP_2}^2 = \left(\frac{2}{10}a\right)^2 + \left(\frac{8}{10}b\right)^2,$$

$\vdots$

$$\overline{BP_9}^2 = \left(\frac{9}{10}a\right)^2 + \left(\frac{1}{10}b\right)^2$$

STEP3 $\overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2 + \overline{BP_3}^2 + \dots + \overline{BP_9}^2$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2 + \overline{BP_3}^2 + \dots + \overline{BP_9}^2 &= \left\{ \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \right\} (a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{100} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) \times 1 \\ &= \frac{1}{100} \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{1}{100} \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\ &= \frac{57}{20} \end{aligned}$$

직각삼각형 ABC에서
 $\overline{AC}=1$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 1^2$,
즉 $a^2 + b^2 = 1$

따라서 $p=20, q=57$ 이므로

$$p+q=77$$

14 수학적 귀납법

개념확인

376~377쪽

01 답 (1) 2, 5, 14, 41 (2) 1, 4, 5, 9

(1) $a_1=2$

$$a_2=3a_1-1=3 \times 2-1=5$$

$$a_3=3a_2-1=3 \times 5-1=14$$

$$a_4=3a_3-1=3 \times 14-1=41$$

(2) $a_1=1, a_2=4$

$$a_3=a_1+a_2=1+4=5$$

$$a_4=a_2+a_3=4+5=9$$

02 답 (1) $a_n=4n+1$ (2) $a_n=3 \times 2^{n-1}$

(1) $a_1=5, a_{n+1}-a_n=4$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_n=5+(n-1) \times 4=4n+1$$

(2) $a_1=3, \frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고

공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=3 \times 2^{n-1}$$

03 답 (1) 15 (2) 2×3^6

(1) $a_2=a_1+2 \times 1$

$$a_3=a_2+2 \times 2$$

$$+) a_4=a_3+2 \times 3$$

$$a_4=a_1+2(1+2+3)$$

$$=3+12=15$$

(2) $a_2=a_1 \times 3$

$$a_3=a_2 \times 3^2$$

$$\times) a_4=a_3 \times 3^3$$

$$a_4=a_1 \times 3 \times 3^2 \times 3^3$$

$$=2 \times 3^{1+2+3}=2 \times 3^6$$

04 답 $p(2), p(k+1)$

필수유형 01

379쪽

01-1 답 제8항

해결전략 | $a_{n+1}=a_n+d$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 d 인 등차수열이다.

STEP1 일반항 구하기

$a_{n+1}-6=a_n$ 에서 $a_{n+1}-a_n=6$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.

$$\therefore a_n=-40+(n-1) \times 6=6n-46$$

STEP2 처음으로 양수가 되는 항 구하기

$$a_n=6n-46>0 \text{에서 } 6n>46 \quad \therefore n>7.6 \times \times$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

01-2 답 33

해결전략 | $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

STEP1 일반항 구하기

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$ 에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3=a+2d=9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_7=a+6d=25 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=1, d=4$$

$$\therefore a_n=1+(n-1) \times 4=4n-3$$

STEP2 a_9 의 값 구하기

$$\therefore a_9=4 \times 9-3=33$$

01-3 답 9

해결전략 | $a_{n+1}=a_n+5$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 알고 공차를 구한다.

STEP1 일반항 구하기

$a_{n+1}=a_n+5$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 5인 등차수열이다.

$$a_1+a_3=8 \text{에서 } a_1+(a_1+2 \times 5)=8$$

$$2a_1=-2 \quad \therefore a_1=-1$$

$$\therefore a_n=-1+(n-1) \times 5=5n-6$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_k=5k-6=39 \text{에서 } 5k=45 \quad \therefore k=9$$

01-4 답 -115

해결전략 | 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 이용하여

$a_{n+5}-a_{n+2}=-9$ 에서 공차를 구한다.

STEP1 공차 구하기

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2} \text{에서 } 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

$$a_{n+5}=2+(n+4) \times d=2+nd+4d$$

$$a_{n+2}=2+(n+1) \times d=2+nd+d$$

$$a_{n+5} - a_{n+2} = -9 \text{에서}$$

$$(2+nd+4d) - (2+nd+d) = -9$$

$$3d = -9 \quad \therefore d = -3$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\{2 \times 2 + 9 \times (-3)\}}{2} = -115$$

→ 첫째항이 2, 공차가 -3, 항수가 10인 등차수열의 합

01-5 ㉣ -170

해결전략 | 수열 $\{a_n\}$ 은 이웃한 두 항의 차가 일정한 수열이다.

STEP 1 공차 구하기

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 에서 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 - a_2 = -4 \text{에서}$$

$$(a+3d) - (a+d) = -4$$

$$2d = -4 \quad \therefore d = -2$$

STEP 2 첫째항 구하기

$$a_2 a_4 = -3 \text{에서 } (a+d)(a+3d) = -3$$

$$(a-2)(a-6) = -3$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0, (a-3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a < 5)$$

STEP 3 a_{2n} 구하기

따라서 $a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = -2n + 5$ 이므로

$$a_{2n} = -4n + 5$$

STEP 4 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값 구하기

$$\therefore a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} (-4k + 5)$$

$$= -4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 5 \times 10 = -170$$

●→ 다른 풀이

STEP 4 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값 구하기

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = -2n + 5 \text{이고,}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} \text{은 첫째항이 } a_2 = 1, \text{ 끝항이}$$

$$a_{20} = -35, \text{ 항수가 10인 등차수열의 합이므로}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{10\{1 + (-35)\}}{2} = -170$$

01-6 ㉣ 105

해결전략 | 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한다.

STEP 1 일반항 구하기

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 + a_5 = 32 \text{에서}$$

$$(a+d) + (a+4d) = 32$$

$$\therefore 2a + 5d = 32 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 = 9a_7 \text{에서}$$

$$(a+2d) = 9(a+6d)$$

$$\therefore 2a + 13d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 26, d = -4$$

$$\therefore a_n = 26 + (n-1) \times (-4) = -4n + 30$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 n 에 대한 식으로 나타내기

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (-4k + 30)$$

$$= -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 30n$$

$$= -2n^2 + 28n = -2(n-7)^2 + 98$$

STEP 3 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

따라서 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은 $n=7$ 일 때 최댓값 98을 가지므로

$$\alpha = 7, \beta = 98$$

$$\therefore \alpha + \beta = 7 + 98 = 105$$

●→ 다른 풀이

STEP 3 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

공차가 음수이므로 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 최댓값은 첫째항부터 음수가 아닌 항까지의 합이다.

$a_n = -4n + 30 \geq 0$ 에서 $n \leq 7.5$
 즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제7항까지 양수이고, 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다. $\therefore \alpha = 7$
 이때 β 의 값은 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\beta = \frac{7\{2 \times 26 + 6 \times (-4)\}}{2} = 98$$

$$\therefore \alpha + \beta = 7 + 98 = 105$$

필수유형 02

381쪽

02-1 ㉣ 5⁷

해결전략 | $a_{n+1} = ra_n$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 r 인 등비수열이다.

STEP 1 일반항 구하기

$a_{n+1} = 5a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 5인 등비수열이다.

$$a_2 = 5a_1 = 1 \text{에서 } a_1 = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{1}{5} \times 5^{n-1} = 5^{n-2}$$

STEP2 $\frac{a_5 a_7}{a_3}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{a_5 a_7}{a_3} = \frac{5^3 \times 5^5}{5} = 5^7$$

02-2 ㉡ 381

해결전략 | $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

STEP1 공비 구하기

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 공비를 r 라고 하면

$$a_4 = 3r^3 = 24 \text{에서 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

STEP2 $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^7 a_k = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1} = 381$$

→ 첫째항이 3, 공비가 2, 항수가 7인 등비수열의 합

02-3 ㉡ 제9항

해결전략 | $2a_{n+1} - a_n = 0$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 알고 공비를 구한다.

STEP1 일반항 구하기

$$2a_{n+1} - a_n = 0 \text{에서 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

$$a_3 = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 35 \text{에서}$$

$$a_1 = 140 \quad \therefore a_n = 140 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

STEP2 처음으로 1보다 작아지는 항 구하기

$$a_n = 140 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{140}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}, \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 8 \quad \therefore n \geq 9$$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제9항이다.

02-4 ㉡ $\frac{255}{32}$

해결전략 | 수열 $\{a_n\}$ 은 이웃한 두 항의 비율이 일정한 수열이다.

STEP1 공비 구하기

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 에서 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_3 = ar^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$4a_4 = a_6 \text{에서 } 4ar^3 = ar^5$$

$$ar^3(r^2 - 4) = 0$$

이때 $ar \neq 0$ 이고 모든 항이 양수이므로 $r = 2$

STEP2 일반항 구하기

$$\rightarrow a > 0, r > 0 \text{이므로 } r^2 - 4 = 0$$

$$(r-2)(r+2) = 0 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$$

STEP3 $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_k}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^8 \left\{ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{32} \end{aligned}$$

02-5 ㉡ 9

해결전략 | $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

STEP1 공비 구하기

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} = 0$ 에서 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_4 = ar^3 = 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_2 a_{10}}{a_7} = 81 \text{에서 } \frac{ar \times ar^9}{ar^6} = 81$$

$$ar^4 = 81 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^4}{ar^3} = \frac{81}{27}$$

$$\therefore r = 3$$

STEP2 일반항 구하기

$$r = 3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 27a = 27 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 3^{n-1}$$

STEP3 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_k = 3^{k-1} = 3^8 \text{에서 } k-1 = 8 \quad \therefore k = 9$$

02-6 ㉡ 36

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 수열의 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n \quad (n \geq 1) \text{에서}$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 a_n = \log_2 2a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n \quad (n \geq 1)$$

STEP2 일반항 구하기

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

STEP3 k의 값 구하기

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 &= 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^8 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+8} = 2^{\frac{8 \times 9}{2}} = 2^{36} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2^{36} = 2^k \quad \therefore k = 36$$

필수유형 03

383쪽

03-1 ㉡ (1) 183 (2) $-\frac{1}{4} \times 5^{10} + \frac{13}{4}$

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

(1) **STEP1** $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하여 a_n 구하기

$a_{n+1} = a_n + 4n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + 4 \times (n-1)$$

위의 식을 변끼리 더하여 정리하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 4\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} \\ &= 3 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} = 2n^2 - 2n + 3 \end{aligned}$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

$$\therefore a_{10} = 2 \times 10^2 - 2 \times 10 + 3 = 183$$

(2) **STEP1** $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하여 a_n 구하기

$a_{n+1} = a_n - 5^n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 - 5$$

$$a_3 = a_2 - 5^2$$

$$a_4 = a_3 - 5^3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} - 5^{n-1}$$

위의 식을 변끼리 더하여 정리하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 - (5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1}) \\ &= 2 - \frac{5(5^{n-1} - 1)}{5 - 1} = -\frac{1}{4} \times 5^n + \frac{13}{4} \end{aligned}$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

$$\therefore a_{10} = -\frac{1}{4} \times 5^{10} + \frac{13}{4}$$

03-2 ㉡ 227

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

STEP1 a_n 구하기

$a_{n+1} - a_n = n^2$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = 1^2$$

$$a_3 - a_2 = 2^2$$

$$a_4 - a_3 = 3^2$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} +) \quad a_n - a_{n-1} &= (n-1)^2 \\ a_n - a_1 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= -2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

STEP2 $a_7 + a_8$ 의 값 구하기

$$a_7 = -2 + \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 89$$

$$a_8 = -2 + \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = 138$$

$$\therefore a_7 + a_8 = 89 + 138 = 227$$

03-3 ㉡ 141

해결전략 | $a_{n+1} = a_n + 3n$ 에서 a_1 과 a_2 에 대한 관계식을 구한 후 $2a_1 = a_2 + 3$ 과 연립하여 a_1 의 값을 구한다.

STEP1 a_1 의 값 구하기

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

이것을 $2a_1 = a_2 + 3$ 에 대입하면

$$2a_1 = a_1 + 6 \quad \therefore a_1 = 6$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 3 \times 1 \\
a_3 &= a_2 + 3 \times 2 \\
a_4 &= a_3 + 3 \times 3 \\
&\vdots \\
+) \quad a_{10} &= a_9 + 3 \times 9 \\
\hline
a_{10} &= a_1 + 3(1+2+3+\cdots+9) \\
&= a_1 + 3 \sum_{k=1}^9 k \\
&= 6 + 3 \times \frac{9 \times 10}{2} = 141
\end{aligned}$$

03-4 답 -90

해결전략 | 분수 꼴로 된 수열의 합은 부분분수로 고쳐서 계산한다.

STEP 1 a_n 구하기

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 번끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + \frac{1}{2 \times 3} \\
a_3 &= a_2 + \frac{1}{3 \times 4} \\
a_4 &= a_3 + \frac{1}{4 \times 5} \\
&\vdots \\
+) \quad a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \\
\hline
a_n &= a_1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k}$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = -\sum_{k=1}^{12} (k+1) = -\left(\frac{12 \times 13}{2} + 12\right) = -90$$

03-5 답 9

해결전략 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 이웃하는 항들 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 관계식 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 $a_{n+1} - a_n = 2^{n-2}$

STEP 2 a_n 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 번끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_3 - a_2 &= 1 \\
a_4 - a_3 &= 2 \\
&\vdots \\
+) \quad a_n - a_{n-1} &= 2^{n-3} \\
\hline
a_n - a_1 &= \frac{1}{2} + 1 + 2 + \cdots + 2^{n-3} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = a_1 + 2^{n-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2^{n-2}$$

STEP 3 k 의 값 구하기

$$a_k = \frac{1}{2} + 2^{k-2} = \frac{257}{2} \text{에서}$$

$$2^{k-2} = 128 = 2^7, k-2=7$$

$$\therefore k=9$$

03-6 답 19

해결전략 | $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 일 때 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 임을 이용한다.

STEP 1 a_n 구하기

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 번끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= f(1) \\
a_3 - a_2 &= f(2) \\
a_4 - a_3 &= f(3) \\
&\vdots \\
+) \quad a_n - a_{n-1} &= f(n-1) \\
\hline
a_n - a_1 &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \\
&= (n-1)\{(n-1)+3\} \\
&= (n-1)(n+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_n &= a_1 + (n-1)(n+2) \\
&= 2 + (n-1)(n+2) = n^2 + n
\end{aligned}$$

STEP 2 n 의 최댓값 구하기

$$a_n = n^2 + n < 400 \text{에서 } n(n+1) < 400$$

$$\text{이때 } 19 \times 20 = 380, 20 \times 21 = 420 \text{이므로}$$

$$n \leq 19$$

따라서 n 의 최댓값은 19이다.

04-1 ㉮ (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2×3^{120}

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

(1) **STEP1** $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하여 a_n 구하기

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)a_n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{4}a_3$$

⋮

$$a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-1}$$

위의 식을 변끼리 곱하여 정리하면

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times a_1 = \frac{a_1}{n} = \frac{8}{n}$$

STEP2 a_{16} 의 값 구하기

$$\therefore a_{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

(2) **STEP1** $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하여 a_n 구하기

$a_{n+1} = 3^n a_n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 3a_1$$

$$a_3 = 3^2 a_2$$

$$a_4 = 3^3 a_3$$

⋮

$$a_n = 3^{n-1} a_{n-1}$$

위의 식을 변끼리 곱하여 정리하면

$$a_n = 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{n-1} \times a_1 \\ = 3^{1+2+3+\dots+(n-1)} \times a_1 = 2 \times 3^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

STEP2 a_{16} 의 값 구하기

$$\therefore a_{16} = 2 \times 3^{\frac{15 \times 16}{2}} = 2 \times 3^{120}$$

04-2 ㉮ 16

해결전략 | a_5 의 값을 구하려면 주어진 식에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입한다.

STEP1 주어진 식에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하기

$a_{n+1} = \frac{n+4}{2n-1} a_n$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하면

$$a_2 = 5a_1$$

$$a_3 = \frac{6}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{7}{5}a_3$$

$$a_5 = \frac{8}{7}a_4$$

STEP2 a_5 의 값 구하기

위의 식을 변끼리 곱하여 정리하면

$$a_5 = 5 \times \frac{6}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{8}{7} \times a_1 = 16a_1 = 16 \quad (\because a_1 = 1)$$

04-3 ㉮ 73

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 a_n 을 구한 다음 로그의 성질을 이용한다.

STEP1 일반항 구하기

$a_{n+1} = 5^n a_n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = 5a_1$$

$$a_3 = 5^2 a_2$$

$$a_4 = 5^3 a_3$$

⋮

$$\times) a_n = 5^{n-1} a_{n-1} \\ a_n = 5 \times 5^2 \times 5^3 \times \dots \times 5^{n-1} \times a_1 \\ = 5^{1+2+3+\dots+(n-1)} = 5^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

STEP2 $\log_5 a_8 + \log_5 a_{10}$ 의 값 구하기

$$\therefore \log_5 a_8 + \log_5 a_{10} = \log_5 (a_8 \times a_{10}) \\ = \log_5 (5^{28} \times 5^{45}) = \log_5 5^{73} = 73$$

04-4 ㉮ 55

해결전략 | $(n+1)a_{n+1} = na_n$ 을 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 꼴로 고쳐 a_n 을 구한다.

STEP1 일반항 구하기

$$(n+1)a_{n+1} = na_n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{4}a_3$$

⋮

$$\begin{aligned} & \times) a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ & a_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times a_1 \\ & = \frac{7}{n} \end{aligned}$$

STEP 2 $\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{a_k}$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{a_k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{k^2}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 55$$

04-5 ㉔ -33

해결전략 주어진 식을 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 꼴로 고친 후 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입한다.

STEP 1 a_{10} 의 값 구하기

$$2^n a_{n+1} = n a_n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n}{2^n} a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 번끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2}{2^2} a_2 \\ a_4 &= \frac{3}{2^3} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_{10} &= \frac{9}{2^9} a_9 \\ a_{10} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2^2} \times \frac{3}{2^3} \times \cdots \times \frac{9}{2^9} \times a_1 \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9}{2^{1+2+3+\cdots+9}} \times 8 \\ &= \frac{9!}{2^{45}} \times 2^3 = 9! \times 2^{-42} \end{aligned}$$

STEP 2 $x+y$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } 9! \times 2^{-42} = x! \times 2^y \text{에서}$$

$$x=9, y=-42 \quad \therefore x+y=9+(-42)=-33$$

04-6 ㉔ 6

해결전략 로그의 성질을 이용하여 a_n 과 a_{n-1} 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 a_n 과 a_{n-1} 사이의 관계식 구하기

$$\log a_n + 2 \log n = \log a_{n-1} + \log (n^2 - 1) \text{에서}$$

$$\log (a_n \times n^2) = \log \{a_{n-1} \times (n^2 - 1)\}$$

$$a_n \times n^2 = a_{n-1} \times (n^2 - 1)$$

$$\therefore a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2} a_{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} a_{n-1}$$

STEP 2 a_n 구하기

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} a_{n-1} \text{에 } n=2, 3, 4, \dots, n \text{을 차례}$$

로 대입하여 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \times 5}{4 \times 4} a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \times \cdots$$

$$\times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \times a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots$$

$$\times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \times a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times 2 = \frac{n+1}{n}$$

STEP 3 n 의 값 구하기

$$k a_k = k \times \frac{k+1}{k} = k+1 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n k a_k = \sum_{k=1}^n (k+1) = 27$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n = 27, \quad n^2 + 3n - 54 = 0$$

$$(n-6)(n+9) = 0 \quad \therefore n=6 \quad (\because n \geq 2)$$

필수유형 05

387쪽

05-1 ㉔ (1) 56 (2) 5 (3) 20

해결전략 주어진 식에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하여 a_5 까지의 항을 순서대로 구한다.

$$(1) a_{n+1} - 2a_n = 4n \text{에서 } a_{n+1} = 2a_n + 4n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 + 4 \times 1 = 2 \times (-3) + 4 = -2$$

$$a_3 = 2a_2 + 4 \times 2 = 2 \times (-2) + 8 = 4$$

$$a_4 = 2a_3 + 4 \times 3 = 2 \times 4 + 12 = 20$$

$$a_5 = 2a_4 + 4 \times 4 = 2 \times 20 + 16 = 56$$

$$(2) a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0 \text{에서 } a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$$

이 식에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 - a_2 = 4 - 1 = 3$$

$$a_4 = a_2 - a_3 = 1 - 3 = -2$$

$$a_5 = a_3 - a_4 = 3 - (-2) = 5$$

- (3) $n=1$ 은 홀수이므로 $a_2=a_1-5=10-5=5$
 $n=2$ 는 짝수이므로 $a_3=a_2+2^2=5+4=9$
 $n=3$ 은 홀수이므로 $a_4=a_3-5=9-5=4$
 $n=4$ 는 짝수이므로 $a_5=a_4+4^2=4+16=20$

05-2 ㉮ $\frac{9}{5}$

해결전략 | 주어진 식에서 a_{n+1} 을 a_n 에 대한 식으로 나타낸 다음 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입한다.

STEP1 주어진 식 변형하기

$$a_{n+1}-2a_na_{n+1}+3a_n=0 \text{에서}$$

$$(1-2a_n)a_{n+1}=-3a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n-1}$$

STEP2 a_4 의 값 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{3a_1}{2a_1-1}=\frac{3 \times (-1)}{2 \times (-1)-1}=1$$

$$a_3=\frac{3a_2}{2a_2-1}=\frac{3 \times 1}{2 \times 1-1}=3$$

$$a_4=\frac{3a_3}{2a_3-1}=\frac{3 \times 3}{2 \times 3-1}=\frac{9}{5}$$

05-3 ㉮ 42

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입하여 a_3, a_4, a_5 를 각각 a_1 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP1 a_5 를 a_1 에 대한 식으로 나타내기

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \text{에 } n=1, 2, 3 \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_3=a_2+a_1=5+a_1$$

$$a_4=a_3+a_2=(5+a_1)+5=10+a_1$$

$$a_5=a_4+a_3=(10+a_1)+(5+a_1)=15+2a_1$$

STEP2 a_1 의 값 구하기

$$\text{이때 } a_5=21 \text{이므로 } 15+2a_1=21$$

$$2a_1=6 \quad \therefore a_1=3$$

STEP3 a_3+a_6 의 값 구하기

$$a_3=5+a_1=8$$

$$a_6=a_5+a_4=21+(10+a_1)=34$$

$$\therefore a_3+a_6=8+34=42$$

05-4 ㉮ -4

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2$ 를 차례로 대입한 후

$$a_3=-\frac{4}{3} \text{임을 이용하여 } k \text{의 값을 구한다.}$$

STEP1 k 의 값 구하기

$$a_{n+1}=\frac{3k}{2a_n-1} \text{에 } n=1, 2 \text{를 차례로 대입하면}$$

$$a_2=\frac{3k}{2a_1-1}=\frac{3k}{2 \times (-1)-1}=-k$$

$$a_3=\frac{3k}{2a_2-1}=\frac{3k}{2 \times (-k)-1}=\frac{3k}{-2k-1}$$

$$\text{이때 } a_3=-\frac{4}{3} \text{이므로 } \frac{3k}{-2k-1}=-\frac{4}{3}$$

$$-9k=-8k-4 \quad \therefore k=4$$

STEP2 a_2 의 값 구하기

$$\therefore a_2=-k=-4$$

05-5 ㉮ 46

해결전략 | a_n 의 값이 짝수인지 홀수인지 확인하여 a_{n+1} 의 값을 구한다.

STEP1 k 의 값 구하기

주어진 식에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입하면

$$a_1=4 \text{는 짝수이므로 } a_2=a_1+1+1=6$$

$$a_2=6 \text{은 짝수이므로 } a_3=a_2+2+1=9$$

$$a_3=9 \text{는 홀수이므로 } a_4=ka_3=9k$$

$$\text{이때 } a_4=18 \text{이므로 } 9k=18 \quad \therefore k=2$$

STEP2 a_6 의 값 구하기

$$a_4=18 \text{은 짝수이므로 } a_5=a_4+4+1=23$$

$$a_5=23 \text{은 홀수이므로 } a_6=ka_5=2 \times 23=46$$

05-6 ㉮ 8

해결전략 | 12보다 큰 항이 나올 때까지 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 $a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 값을 구한다.

STEP1 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 12보다 큰 항 찾기

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1} \times n \text{에서}$$

$$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1} \times n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2=-a_1+(-1)^2 \times 1=-12+1=-11$$

$$a_3=-a_2+(-1)^3 \times 2=11-2=9$$

$$a_4=-a_3+(-1)^4 \times 3=-9+3=-6$$

$$a_5=-a_4+(-1)^5 \times 4=6-4=2$$

$$a_6=-a_5+(-1)^6 \times 5=-2+5=3$$

$$a_7=-a_6+(-1)^7 \times 6=-3-6=-9$$

$$a_8=-a_7+(-1)^8 \times 7=9+7=16$$

STEP2 k 의 최솟값 구하기

따라서 제8항에서 처음으로 12보다 큰 항이 나오므로

$a_k > a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

06-1 답 2

해결전략 | $a_3, a_4, a_5, \dots$ 의 값을 차례로 구하여 수열에서 반복되는 항을 찾는다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$\begin{aligned} a_3 & \text{은 } a_1 + a_2 = 3 + 1 = 4 \text{를 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_3 = 0 \\ a_4 & \text{는 } a_2 + a_3 = 1 + 0 = 1 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_4 = 1 \\ a_5 & \text{는 } a_3 + a_4 = 0 + 1 = 1 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_5 = 1 \\ a_6 & \text{은 } a_4 + a_5 = 1 + 1 = 2 \text{를 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_6 = 2 \\ a_7 & \text{은 } a_5 + a_6 = 1 + 2 = 3 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_7 = 3 \\ a_8 & \text{은 } a_6 + a_7 = 2 + 3 = 5 \text{를 } 4 \text{로 나눈 나머지가이므로 } a_8 = 1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수 3, 1, 0, 1, 1, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 a_{30} 의 값 구하기

$$\text{이때 } 30 = 6 \times 5 \text{이므로 } a_{30} = a_6 = 2$$

06-2 답 45

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 반복되는 항을 찾는다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^n + a_n \text{에 } n=1, 2, 3, \dots \text{을 차례로 대입하면} \\ a_2 &= (-1) + a_1 = -1 + 2 = 1 \\ a_3 &= (-1)^2 + a_2 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= (-1)^3 + a_3 = -1 + 2 = 1 \\ a_5 &= (-1)^4 + a_4 = 1 + 1 = 2 \\ & \vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2개의 수 2, 1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k = 15 \sum_{k=1}^2 a_k = 15 \times (2 + 1) = 45$$

06-3 답 1

해결전략 | 주어진 식에서 a_{n+1} 을 a_n 에 대한 식으로 나타낸 다음 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입한다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 1 \text{에서}$$

$$(1 - a_n) a_{n+1} = 1 \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{1 - a_n}$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{1 - a_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{1 - a_2} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

$$a_4 = \frac{1}{1 - a_3} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3개의 수 $\frac{1}{2}, 2, -1$ 이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 $a_{15} + a_{20}$ 의 값 구하기

$$\text{이때 } 15 = 3 \times 5, 20 = 3 \times 6 + 2 \text{이므로}$$

$$a_{15} = a_3 = -1, a_{20} = a_2 = 2$$

$$\therefore a_{15} + a_{20} = -1 + 2 = 1$$

06-4 답 16

해결전략 | 수열 $\{a_n\}$ 에서 반복되는 항을 찾은 다음 제1항부터 제50항까지 -2 가 몇 번 나오는지 알아본다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$a_{n+2} + a_n = a_{n+1} \text{에서 } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 4 = -2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -4 - (-2) = -2$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -2 - (-4) = 2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 4 - 2 = 2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수 4, 2, -2 , -4 , -2 , 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 k 의 개수 구하기

이때 제1항부터 제6항까지 $a_k = -2$ 인 항은 a_3, a_5 의 2개이고, $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 $a_k = -2$ 인 자연수 k 의 개수는 $2 \times 8 = 16$ 이다.

→ 항 50개를 6개씩 묶으면 8묶음이 되고 a_{49}, a_{50} 이 남는다. 이때 각 묶음에는 -2 인 항이 2개씩 있으며 $a_{49} = 4, a_{50} = 2$ 이므로 -2 인 항은 모두 $2 \times 8 = 16$ (개)이다.

06-5 답 -10

해결전략 | $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 는 a_2 부터 a_{20} 까지 짝수 번째 항들의 합이므로

주어진 식에서 n 이 홀수인 경우의 값을 구하여 짝수 번째 항의 값을 구한다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$n=1 \text{은 홀수이므로 } a_2 = \frac{1-2a_1}{a_1} = \frac{1-2 \times 1}{1} = -1$$

$$n=2 \text{는 짝수이므로 } a_3 = a_2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$n=3 \text{은 홀수이므로 } a_4 = \frac{1-2a_3}{a_3} = \frac{1-2 \times 1}{1} = -1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2개의 수 1, -1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= -1 + (-1) + (-1) + \cdots + (-1) \\ &= -10 \end{aligned}$$

06-6 ㉮ $\sqrt{2}$

해결전략 a_n 의 값에 따라 a_{n+1} 의 값은 거듭제곱 또는 로그의 값으로 정해진다.

STEP1 수열에서 반복되는 항 구하기

주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_1 \leq 1 \text{이므로 } a_2 = 2^{a_1} = 2^1 = 2$$

$$a_2 > 1 \text{이므로 } a_3 = \log_{a_2} \sqrt{2} = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 \leq 1 \text{이므로 } a_4 = 2^{a_3} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$a_4 > 1 \text{이므로 } a_5 = \log_{a_4} \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4개의 수 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ 가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP2 $a_{12} \times a_{13}$ 의 값 구하기

이때 $12=4 \times 3$, $13=4 \times 3 + 1$ 이므로

$$a_{12} = a_4 = \sqrt{2}, a_{13} = a_1 = 1$$

$$\therefore a_{12} \times a_{13} = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

필수유형 07

391쪽

07-1 ㉮ (1) 40 (2) 220

해결전략 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 임을 이용하여 a_n 또는 S_n 에 대한 관계식을 구한다.

(1) STEP1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$2S_n = (n+1)a_n \quad \cdots \text{㉠}$$

$$2S_{n+1} = (n+2)a_{n+1} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡ - ㉠을 하면

$$2(S_{n+1} - S_n) = (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n$$

$$2a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n$$

$$na_{n+1} = (n+1)a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 번끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{2}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

⋮

$$\times \left) a_{10} = \frac{10}{9}a_9$$

$$a_{10} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{10}{9} \times a_1$$

$$= \frac{10}{1} \times 4 = 40$$

(2) STEP1 S_n 과 S_{n-1} 사이의 관계식 구하기

$n \geq 2$ 일 때,

$$2S_n = (n+1)a_n \text{에 } a_n = S_n - S_{n-1} \text{을 대입하면}$$

$$2S_n = (n+1)(S_n - S_{n-1})$$

$$(n-1)S_n = (n+1)S_{n-1}$$

$$\therefore S_n = \frac{n+1}{n-1}S_{n-1}$$

STEP2 S_{10} 의 값 구하기

이 식에 $n=2, 3, 4, \dots, 10$ 을 차례로 대입하여 번끼리 곱하면

$$S_2 = \frac{3}{1}S_1$$

$$S_3 = \frac{4}{2}S_2$$

$$S_4 = \frac{5}{3}S_3$$

⋮

$$\times \left) S_{10} = \frac{11}{9}S_9$$

$$S_{10} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{11}{9} \times S_1$$

$$= \frac{10 \times 11}{1 \times 2} \times 4 \quad (\because S_1 = a_1)$$

$$= 220$$

07-2 ㉮ $a_n = 5 \times 3^{n-1}$

해결전략 주어진 식에서 S_{n+1} 과 a_{n+2} 사이의 관계식을 구한 다음 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 을 이용한다.

STEP1 a_{n+1} 과 a_{n+2} 사이의 관계식 구하기

$$S_n - \frac{1}{2}a_{n+1} = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$S_{n+1} - \frac{1}{2}a_{n+2} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

②-①을 하면

$$(S_{n+1} - S_n) - \frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = 0$$

$$\therefore a_{n+2} = 3a_{n+1}$$

STEP2 일반항 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3인 등비수열이므로 $a_n = 5 \times 3^{n-1}$

07-3 $\frac{1}{4}(5^{10}-1)$

해결전략 주어진 식에서 a_{n+2} 와 S_{n+1} 사이의 관계식을 구한 다음 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 을 이용한다.

STEP1 a_{n+1} 과 a_{n+2} 사이의 관계식 구하기

$$a_{n+1} = 4S_n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} = 4S_{n+1} + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②-①을 하면

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(S_{n+1} - S_n)$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+2} = 5a_{n+1}$$

STEP2 S_{10} 의 값 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열이므로

$$S_{10} = \frac{1 \times (5^{10} - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^{10} - 1)$$

07-4 $\frac{39}{4}$

해결전략 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 임을 이용하여 주어진 식을 S_n 의 관계식으로 나타낸다.

STEP1 S_n 과 S_{n-1} 사이의 관계식 구하기

$n \geq 2$ 일 때,

$$S_n - n^2 a_n = 0 \text{에 } a_n = S_n - S_{n-1} \text{을 대입하면}$$

$$S_n - n^2(S_n - S_{n-1}) = 0$$

$$(1 - n^2)S_n + n^2 S_{n-1} = 0$$

$$\therefore S_n = \frac{n^2}{n^2 - 1} S_{n-1} = \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} S_{n-1}$$

STEP2 S_n 구하기

이 식에 $n=2, 3, 4, \dots, n$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$S_2 = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} S_1$$

$$S_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} S_2$$

$$S_4 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} S_3$$

$\vdots$

$$\times \left) S_n = \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} S_{n-1}$$

$$S_n = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots$$

$$\times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \times S_1$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{n}{n+1} \times 3 = \frac{6n}{n+1}$$

$$\rightarrow S_1 = a_1 = 3$$

STEP3 $S_3 + S_7$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } S_3 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}, S_7 = \frac{42}{8} = \frac{21}{4} \text{이므로}$$

$$S_3 + S_7 = \frac{9}{2} + \frac{21}{4} = \frac{39}{4}$$

07-5 5

해결전략 주어진 식에서 S_{n-1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한 다음 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 을 이용한다.

STEP1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$2S_n = (n+3)a_{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2S_{n-1} = (n+2)a_n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$2(S_n - S_{n-1}) = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

$$2a_n = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

$$(n+3)a_{n+1} = (n+4)a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n+4}{n+3} a_n$$

STEP2 a_n 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{5}{4} a_1$$

$$a_3 = \frac{6}{5} a_2$$

$$a_4 = \frac{7}{6} a_3$$

$\vdots$

$$\times \left) a_n = \frac{n+3}{n+2} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{n+3}{n+2} \times a_1$$

$$= \frac{n+3}{4} \times 4 = n+3$$

STEP3 k 의 값 구하기

이때 $a_k a_{k+1} = (k+3)(k+4) = 72$ 에서

$$k^2 + 7k - 60 = 0, (k-5)(k+12) = 0$$

$$\therefore k=5 (\because k \geq 1)$$

07-6 ㉮ 5

해결전략 | $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 을 이용하여 a_n 의 관계식을 구한 다음 인수분해한다.

STEP 1 a_{n+2} 와 a_n 사이의 관계식 구하기

$$S_n = a_n a_{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$$S_{n+1} = a_{n+1} a_{n+2} \quad \dots\dots \textcircled{㉯}$$

$\textcircled{㉯} - \textcircled{㉮}$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1}$$

$$a_{n+1}(a_{n+2} - a_n - 1) = 0$$

이때 $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} \neq 0$ 이므로 $a_{n+2} - a_n - 1 = 0$
 $\therefore a_{n+2} = a_n + 1$ $\xrightarrow{S_n \neq 0 \text{이므로 } S_n = a_n a_{n+1} \text{에서}}$
 $a_n \neq 0$ 이고, $a_{n+1} \neq 0$

STEP 2 $a_{12} - a_2$ 의 값 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, 10$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_3 = a_1 + 1$$

$$a_4 = a_2 + 1$$

$$a_5 = a_3 + 1$$

$\vdots$

$$a_{11} = a_9 + 1$$

$$+) a_{12} = a_{10} + 1$$

$$a_{11} + a_{12} = a_1 + a_2 + 1 \times 10$$

$$\therefore a_{12} - a_2 = a_1 - a_{11} + 10$$

$$= 2 - 7 + 10 = 5$$

필수유형 08

393쪽

08-1 ㉮ (1) 30 (2) $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ (3) 2

해결전략 | 3마리로 분열하면 미생물의 수는 3배가 된다.

$$(1) a_1 = 20 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) \times 3 = 30$$

(2) $(n+1)$ 일 후의 미생물의 수 a_{n+1} 은 n 일 후의 미생물

의 수 a_n 의 $\left(1 - \frac{50}{100}\right)$ 의 3배이므로

$$a_{n+1} = a_n \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) \times 3 = \frac{3}{2}a_n$$

(3) **STEP 1** 10일 후의 미생물의 수 구하기

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 30 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 30 \times \left(\frac{3}{2}\right)^9 = 2^{-8} \times 3^{10} \times 5$$

STEP 2 $x+y$ 의 값 구하기

따라서 $2^{-8} \times 3^{10} \times 5 = 2^x \times 3^y \times 5$ 에서 $x = -8, y = 10$

$$\therefore x+y = -8+10=2$$

08-2 ㉮ 4

해결전략 | a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한 다음 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입해 본다.

STEP 1 a_1 의 값 구하기

$$a_1 = 1000 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) + 100 = 800$$

STEP 2 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

시행을 $(n+1)$ 번 했을 때의 물의 양 a_{n+1} 은 n 번 했을 때의 물의 양 a_n 의 $\left(1 - \frac{3}{10}\right)$ 만큼보다 100 L 더 많으므로

$$a_{n+1} = a_n \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) + 100$$

$$= \frac{7}{10}a_n + 100$$

STEP 3 n 의 최솟값 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{7}{10}a_1 + 100 = \frac{7}{10} \times 800 + 100 = 660$$

$$a_3 = \frac{7}{10}a_2 + 100 = \frac{7}{10} \times 660 + 100 = 562$$

$$a_4 = \frac{7}{10}a_3 + 100 = \frac{7}{10} \times 562 + 100 = 493.4$$

$\vdots$

따라서 $n=4, 5, 6, \dots$ 일 때 $a_n < 500$ 이므로 n 의 최솟값은 4이다.

08-3 ㉮ 112만 원

해결전략 | n 년이 지난 후의 근무 수당을 a_n 원으로 놓고 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 n 년이 지난 후의 근무 수당을 a_n 원으로 놓고 a_1 의 값 구하기

n 년이 지난 후의 근무 수당을 a_n 원이라고 하면

$$a_1 = 20000 + 20000 \times 1 = 40000 (\text{원})$$

STEP 2 10년이 지난 후의 근무 수당 구하기

$a_{n+1} = a_n + 20000 \times (n+1)$ 이므로 이 식에

$n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 20000 \times 2$$

$$a_3 = a_2 + 20000 \times 3$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= a_3 + 20000 \times 4 \\
 &\vdots \\
 +) \quad a_{10} &= a_9 + 20000 \times 10 \\
 \hline
 a_{10} &= a_1 + 20000 \times 2 + 20000 \times 3 + 20000 \times 4 + \cdots \\
 &\quad + 20000 \times 10 \\
 &= 40000 + 20000(2 + 3 + 4 + \cdots + 10) \\
 &= 20000 + 20000(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \\
 &= 20000 + 20000 \times \frac{10 \times 11}{2} = 1120000 \text{ (원)}
 \end{aligned}$$

따라서 10년이 지난 후의 근무 수당은 112만 원이다.

08-4 ㉡ (1) $a_1=1, a_2=2, a_3=3$

$$(2) a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (3) 55$$

해결전략 $(n+2)$ 개의 계단을 오를 때 처음에 한 계단을 오르는 경우, 두 계단을 오르는 경우로 나누어 생각한다.

- (1) • 1개의 계단을 오르는 방법은 한 번에 한 계단을 오르는 1가지 경우뿐이므로

$$a_1 = 1$$

- 2개의 계단을 오르는 방법은 한 번에 한 계단씩 오르거나 한 번에 두 계단을 오르는 2가지 경우이므로 $a_2 = 2$

- 3개의 계단을 오르는 방법은

- (i) 처음에 한 계단을 오르면 나머지 계단을 오르는 방법은 a_2 이고,

- (ii) 처음에 두 계단을 오르면 나머지 계단을 오르는 방법은 a_1 이므로

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

- (2) $(n+2)$ 개의 계단을 오르는 방법은

- (i) 처음에 한 계단을 오르면 나머지 $(n+1)$ 개의 계단을 오르는 방법은 a_{n+1} 이고,

- (ii) 처음에 두 계단을 오르면 나머지 n 개의 계단을 오르는 방법은 a_n 이므로

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

- (3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에 $n=2, 3, \dots, 7$ 을 차례로 대입하면

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34$$

$$a_9 = a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55$$

▶참고

처음 두 항을 1과 1로 한 후 그 다음 항부터는 앞의 두 수의 합이 바로 뒤의 수가 되는 수의 배열을 피보나치 수열이라고 한다.

09-1 ㉡ (1) $a_{n+1} = a_n + 4n + 5$ (2) 121

해결전략 시행 횟수가 늘어날 때마다 성냥개비의 수는 바로 전 시행에서의 성냥개비의 수보다 몇 개씩 더 늘어나는지 살펴본다.

$$(1) a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 9$$

$$a_3 = a_2 + 13$$

$$a_4 = a_3 + 17$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + 4n + 1$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 4(n+1) + 1 = a_n + 4n + 5$$

- (2) $a_{n+1} = a_n + 4n + 5$ 에 $n=29$ 를 대입하면

$$a_{30} = a_{29} + 4 \times 29 + 5$$

$$= a_{29} + 121$$

$$\therefore a_{30} - a_{29} = 121$$

09-2 ㉡ 165

해결전략 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 값을 차례로 구하여 이웃하는 두 항 사이의 규칙을 찾는다.

STEP1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 6$$

$$a_3 = a_2 + 9$$

$$a_4 = a_3 + 12$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + 3n$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 3(n+1)$$

STEP2 a_{10} 의 값 구하기

$a_{n+1} = a_n + 3(n+1)$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 3$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 4$$

$\vdots$

$$+) \quad a_{10} = a_9 + 3 \times 10$$

$$a_{10} = a_1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 3 \times 10$$

$$= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 165$$

09-3 ㉔ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

해결전략 | 조건 (나)에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 점 P_n 의 규칙을 찾는다.

STEP1 점 P_n 의 규칙 찾기

조건 (나)에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$n=1 \text{은 홀수이므로 } (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{x_1}, y_1\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$n=2 \text{는 짝수이므로 } (x_3, y_3) = \left(x_2, \frac{1}{y_2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$n=3 \text{은 홀수이므로 } (x_4, y_4) = \left(\frac{1}{x_3}, y_3\right) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$n=4 \text{는 짝수이므로 } (x_5, y_5) = \left(x_4, \frac{1}{y_4}\right) = (2, 2)$$

⋮

따라서 점 P_n 은 4개의 점 $(2, 2), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$

$\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 이 이 순서대로 반복된다.

STEP2 점 P_{30} 의 좌표 구하기

이때 $30=4 \times 7 + 2$ 이므로 점 P_{30} 의 좌표는 점 P_2 의 좌표와 같은 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 이다.

09-4 ㉔ (1) $a_{n+1}=a_n+n$ (2) $b_{n+1}=b_n+n+1$ (3) 122

해결전략 | 직선이 1개씩 더 늘어날 때마다 교점의 개수나 분할된 평면의 개수가 바로 전보다 몇 개씩 더 늘어나는지 찾는다.

$$(1) a_1=0$$

$$a_2=a_1+1$$

$$a_3=a_2+2$$

$$a_4=a_3+3$$

⋮

$$\therefore a_{n+1}=a_n+n$$

$$(2) b_1=2$$

$$b_2=b_1+2$$

$$b_3=b_2+3$$

$$b_4=b_3+4$$

⋮

$$\therefore b_{n+1}=b_n+n+1$$

$$(3) \text{ STEP1 } a_{11} \text{의 값 구하기}$$

$$a_2=1$$

$$a_3=a_2+2=1+2$$

$$a_4=a_3+3=1+2+3$$

⋮

$$\therefore a_{11}=1+2+3+\dots+10$$

$$=\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

STEP2 b_{11} 의 값 구하기

$$b_2=b_1+2=2+2$$

$$b_3=b_2+3=2+2+3$$

$$b_4=b_3+4=2+2+3+4$$

⋮

$$\therefore b_{11}=2+2+3+4+\dots+11$$

$$=1+\sum_{k=1}^{11} k = 1+\frac{11 \times 12}{2} = 67$$

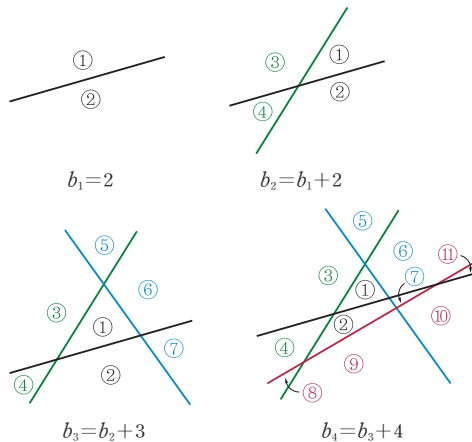
STEP3 $a_{11}+b_{11}$ 의 값 구하기

$$\therefore a_{11}+b_{11}=55+67=122$$

▶참고

(1) n 개의 직선에 직선 1개를 더 그리면 이 직선은 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 새로운 교점이 n 개 더 생긴다. 즉, $(n+1)$ 번째 직선을 그리면 교점이 n 개가 더 생기므로 $a_{n+1}=a_n+n$ 이다.

(2) n 개의 직선에 직선 1개를 더 그리면 이 직선은 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 새로운 평면이 $(n+1)$ 개 더 생긴다. 즉, $(n+1)$ 번째 직선을 그리면 평면이 $(n+1)$ 개 더 생기므로 $b_{n+1}=b_n+n+1$ 이다.



필수유형 10

397쪽

10-1 ㉔ 풀이 참조

해결전략 | $n=1$ 일 때 등식이 성립함을 보이고, $n=k$ 일 때 등식이 성립하면 $n=k+1$ 때도 등식이 성립함을 보인다.

STEP1 $n=1$ 일 때 등식이 성립함을 보이기

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

STEP2 $n=k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$ 일 때 등식이 성립함을 보이기

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

위 등식에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

10-2 17

해결전략 $2^{3k}-1=7m$ (m 은 자연수)으로 놓을 때 $2^{3(k+1)}-1=7 \times (m에 대한 식)을 풀이 됨을 보인다.$

STEP1 $f(m), g(m)$ 구하기

$$2^{3k}-1=7m에서 2^{3k}=7m+1이므로$$

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)}-1 &= 2^{3k+3}-1=8 \times 2^{3k}-1 \\ &= 8(\boxed{7m+1})-1=56m+7 \\ &= 7(\boxed{8m+1}) \end{aligned}$$

$$\therefore f(m)=7m+1, g(m)=8m+1$$

STEP2 $f(1)+g(1)$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } f(1)=8, g(1)=9이므로$$

$$f(1)+g(1)=8+9=17$$

10-3 48

해결전략 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$ 을 더한 식이

$$3-\frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}이 됨을 보인다.$$

STEP1 $f(k), g(k)$ 구하기

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \cdots + \frac{4k}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} \\ &= 3 - \frac{2k+3}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} \\ &= 3 - \frac{1}{3^k} \left\{ (2k+3) - \left(\frac{4(k+1)}{3} \right) \right\} \\ &= 3 - \frac{1}{3^k} \times \frac{2k+5}{3} = 3 - \frac{2k+5}{3^{k+1}} = 3 - \frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}} \\ &\therefore f(k) = \frac{4(k+1)}{3}, g(k) = 2(k+1) + 3 = 2k+5 \end{aligned}$$

STEP2 $f(3) \times g(2)$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } f(3)=\frac{16}{3}, g(2)=9이므로$$

$$f(3) \times g(2) = \frac{16}{3} \times 9 = 48$$

10-4 11 풀이 참조

해결전략 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$ 임을 이용하여 $n=k+1$ 일

때 주어진 등식이 성립함을 보인다.

STEP1 $n=1$ 일 때 등식이 성립함을 보이기

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2^0 + 1 = 2$$

$$(\text{우변}) = 2^1 + 1 - 1 = 2$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

STEP2 $n=m$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하고 $n=m+1$

일 때 등식이 성립함을 보이기

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (2^{k-1} + 1) = 2^m + m - 1$$

위 등식의 양변에 $2^m + 1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (2^{k-1} + 1) + 2^m + 1 &= (2^m + m - 1) + 2^m + 1 \\ &= 2 \times 2^m + m = 2^{m+1} + m \end{aligned}$$

이때 좌변은

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (2^{k-1} + 1) + 2^m + 1 \\ &= \sum_{k=1}^m (2^{k-1} + 1) + 2^{(m+1)-1} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (2^{k-1} + 1) \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2^{k-1} + 1) = 2^{m+1} + (m+1) - 1$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

필수유형 11

399쪽

11-1 11 풀이 참조

해결전략 $n=2$ 일 때 부등식이 성립함을 보이고, $n=k$ 일 때 부등식이 성립하면 $n=k+1$ 일 때도 부등식이 성립함을 보인다.

STEP1 $n=2$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로 (좌변) < (우변)

즉, 주어진 부등식이 성립한다.

STEP2 $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

$n=k+1$ 일 때

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2} = \frac{-1}{k(k+1)^2} < 0$$

이므로 $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11-2 답 2

해결전략 $(1+x)^k > 1+kx$ 가 성립한다고 가정할 때

$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$ 가 성립함을 보인다.

STEP1 $f(x), g(k)$ 구하기

$(1+x)^k > 1+kx$ 의 양변에 $\boxed{1+x}$ 를 곱하면

$$(1+x)^{\boxed{k+1}} > (1+kx)(\boxed{1+x})$$

이때

$$(1+kx)(\boxed{1+x}) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x \quad (\because k \geq 2, x > 0)$$

이므로

$$(1+x)^{\boxed{k+1}} > 1 + (k+1)x$$

$$\therefore f(x) = 1+x, g(k) = k+1$$

STEP2 $f(3)-g(1)$ 의 값 구하기

따라서 $f(3)=4, g(1)=2$ 이므로

$$f(3)-g(1)=4-2=2$$

11-3 답 풀이 참조

해결전략 $3^k > k+3$ 이 성립한다고 가정할 때 $3^{k+1} > k+4$ 가 성립함을 보인다.

STEP1 $n=2$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 3^2 = 9, (\text{우변}) = 2+3=5$$

이므로 (좌변) > (우변)

즉, 주어진 부등식이 성립한다.

STEP2 $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$3^k > k+3$$

위 부등식의 양변에 3을 곱하면

$$3^{k+1} > 3(k+3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $3(k+3) - (k+4) = 2k+5 > 0$ 이므로

$$3(k+3) > k+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 3^{k+1} > k+4 \quad \rightarrow k+4 = (k+1)+3$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

11-4 답 3

해결전략 $n=k+1$ 일 때 부등식이 성립함을 보이려면

$n=k$ 일 때의 부등식의 양변에 $\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}$ 을 곱해야 한다.

STEP1 $f(k), g(k)$ 구하기

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k+1}{2k+2} \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{2k+1}{2k+2} \\ & = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\frac{2k+2}{2k+1}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2k+1}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{2k+1} + \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (2k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3k+1+3(2k+1) \times \frac{1}{2k+1}}} \\
\therefore f(k) &= \frac{1}{2k+1}, g(k) = 2k+1
\end{aligned}$$

STEP 2 $f(4) \times g(13)$ 의 값 구하기

따라서 $f(4) = \frac{1}{9}$, $g(13) = 27$ 이므로

$$f(4) \times g(13) = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

유형 특강

400~401쪽

1 ㉠ (1) $\frac{1023}{512}$ (2) $3^9 + 2$

(1) ① $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 을

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha) \text{ 꼴로 변형하여 정리하면}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\alpha \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 2$$

② $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ 에서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항

이 $a_1 - 2 = -1$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1023}{512}$$

(2) ① $a_{n+1} = 3a_n - 4$ 를

$$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha) \text{ 꼴로 변형하여 정리하면}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha \text{ 이므로}$$

$$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$$

② $a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ 에서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항

이 $a_1 - 2 = 1$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = 1 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3^{n-1} + 2$$

$$\therefore a_{10} = 3^9 + 2$$

2 ㉠ (1) $-\frac{1}{26}$ (2) $\frac{1}{3^{10}-1}$

(1) ① $a_{n+1} = \frac{a_n}{1-3a_n}$ 의 양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1-3a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} - 3$$

② $\frac{1}{a_n} = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = b_n - 3$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$, 공차가

-3 인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times (-3) = -3n + 4$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{4-3n} \quad \therefore a_{10} = -\frac{1}{26}$$

(2) ① $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$ 의 양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 2$$

② $\frac{1}{a_n} = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n + 2$ 에서

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

따라서 수열 $\{b_n + 1\}$ 은 첫째항이 $b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 3$,

공비가 3인 등비수열이므로

$$b_n + 1 = 3 \times 3^{n-1} \quad \therefore b_n = 3^n - 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^n - 1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{1}{3^{10} - 1}$$

실전 연습 문제

402~404쪽

01 ②	02 ①	03 2^{11}	04 510	05 ③
06 ④	07 ③	08 15	09 ④	10 ②
11 ①	12 ⑤	13 -48	14 ⑤	15 ②
16 ⑤	17 풀이 참조			

01

해결전략 | 수열 $\{S_n\}$ 이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한 다음 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용한다.

STEP 1 S_n 구하기

$S_{n+1} = S_n - 2$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 공차가 -2 인 등차수열이다.

$$\therefore S_n = 7 + (n-1) \times (-2) = -2n + 9$$

STEP 2 $a_7 + a_8 + a_9$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore a_7 + a_8 + a_9 &= S_9 - S_6 \\ &= -9 - (-3) = -6\end{aligned}$$

02

해결전략 | $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

STEP1 일반항 구하기

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $a_2 - a_1 = -4$ 이므로
 $a_n = 14 + (n-1) \times (-4) = -4n + 18$

STEP2 k 의 값 구하기

$a_7 = -4 \times 7 + 18 = -10$ 이므로
 $|-10| = a_k$ 에서 $a_k = -4k + 18 = 10$
 $-4k = -8 \quad \therefore k = 2$

03

해결전략 | 로그의 성질을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 이웃하는 항들 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 수열 $\{a_n\}$ 의 관계식 구하기

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}$ 에서
 $\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \quad \dots\dots ①$$

STEP2 일반항 구하기

따라서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이므로 수열 $\{a_n\}$ 은
공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \quad \dots\dots ②$$

STEP3 $a_5 a_6$ 의 값 구하기

이때 $a_5 = 2^5$, $a_6 = 2^6$ 이므로

$$a_5 a_6 = 2^5 \times 2^6 = 2^{11} \quad \dots\dots ③$$

채점 요소	배점
① 수열 $\{a_n\}$ 의 이웃하는 항들 사이의 관계식 구하기	20 %
② 일반항 구하기	50 %
③ $a_5 a_6$ 의 값 구하기	30 %

04

해결전략 | 이차방정식의 판별식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 이웃하는 항들 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 수열 $\{a_n\}$ 의 관계식 구하기

이차방정식 $a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-a_{n+1})^2 - 4a_n^2 = 0$$

$$(a_{n+1} + 2a_n)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

$$\therefore a_{n+1} = -2a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = 2a_n$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a_{n+1} = 2a_n$$

STEP2 $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값 구하기

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} = 510$$

05

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입한다.

$a_{n+1} = a_n + 3^n$ 에 $n=1, 2, 3$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$a_3 = a_2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$

$$a_4 = a_3 + 3^3 = 18 + 27 = 45$$

06

해결전략 | 주어진 방정식에 $x=2$ 를 대입하면 a_n 의 관계식을 얻을 수 있다.

STEP1 a_n 의 관계식 구하기

$x^2 + (a_{n+1} - a_n)x - 4(n+1) = 0$ 의 한 근이 2이므로

$x=2$ 를 대입하면

$$4 + 2(a_{n+1} - a_n) - 4(n+1) = 0, \quad a_{n+1} - a_n = 2n$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2n$$

STEP2 a_n 구하기

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$a_n = a_1 + 2\{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\}$$

$$= 5 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 5 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 5$$

STEP3 $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 (k^2 - k + 5)$$

$$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - \frac{5 \times 6}{2} + 5 \times 5 = 65$$

07

해결전략 | 주어진 식을 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 꼴로 고친 다음 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입한다.

STEP 1 a_n 을 a_1 에 대한 식으로 나타내기

$$(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n \text{에서}$$

$$a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{3}{1}a_1$$

$$a_3=\frac{5}{3}a_2$$

$$a_4=\frac{7}{5}a_3$$

$\vdots$

$$\times \left) a_n=\frac{2n-1}{2n-3}a_{n-1}\right.$$

$$a_n=\frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n-3} \times a_1$$

$$=(2n-1)a_1$$

STEP 2 a_1 의 값 구하기

따라서 $a_{10}=19a_1=57$ 에서 $a_1=3$

08

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2$ 를 차례로 대입하여 a_3, a_4 를 각각 a_2 에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 a_4 를 a_2 에 대한 식으로 나타내기

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \text{에 } n=1, 2 \text{를 차례로 대입하면}$$

$$a_3=a_2+a_1=a_2+4$$

$$a_4=a_3+a_2=(a_2+4)+a_2=2a_2+4$$

STEP 2 a_2 의 값 구하기

$$\text{이때 } a_4=34 \text{이므로 } 2a_2+4=34$$

$$2a_2=30 \quad \therefore a_2=15$$

09

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 $a_3, a_4, a_5, \dots$ 를 구한 다음 수열의 항 사이의 규칙을 알아본다.

STEP 1 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 알기

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2a_n \text{에서 } a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$$

이 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_3=a_2+2a_1=4+2 \times 2=8$$

$$a_4=a_3+2a_2=8+2 \times 4=16$$

$$a_5=a_4+2a_3=16+2 \times 8=32$$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 8, 16, 32, $\dots$ 이므로 공비가 2인 등비수열이다.

STEP 2 a_9 의 값 구하기

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=2 \times 2^{n-1}=2^n$ 이므로

$$a_9=2^9=512$$

10

해결전략 | $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 차례로 구하여 수열의 규칙을 알아본다.

STEP 1 수열에서 반복되는 항 구하기

$$a_1=1 \text{은 홀수이므로 } a_2=a_1+3=1+3=4$$

$$a_2=4 \text{는 짝수이므로 } a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$a_3=2 \text{는 짝수이므로 } a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3개의 수 1, 4, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP 2 $a_{20}-a_{15}$ 의 값 구하기

$$\text{이때 } 20=3 \times 6 + 2, 15=3 \times 5 \text{이므로}$$

$$a_{20}=a_2=4, a_{15}=a_3=2$$

$$\therefore a_{20}-a_{15}=4-2=2$$

11

해결전략 | 주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 반복되는 항을 알아본다.

STEP 1 수열에서 반복되는 항 구하기

주어진 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$n=1 \text{은 홀수이므로 } a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-6}=-\frac{1}{2}$$

$$n=2 \text{는 짝수이므로 } a_3=1+a_2=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$n=3 \text{은 홀수이므로 } a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}}=1$$

$$n=4 \text{는 짝수이므로 } a_5=1+a_4=1+1=2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4개의 수 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

STEP 2 $\sum_{n=1}^{40} a_n$ 의 값 구하기

이때 $40 = 4 \times 10$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = 10 \sum_{n=1}^4 a_n = 10 \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 30$$

12

해결전략 | $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n \geq 1$)임을 이용하여 주어진 식을 S_n 에 대한 관계식으로 나타낸다.

STEP 1 S_n 과 S_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$4S_n = a_{n+1} + 5 \text{에 } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{을 대입하면}$$

$$4S_n = S_{n+1} - S_n + 5$$

$$\therefore S_{n+1} = 5S_n - 5$$

STEP 2 S_6 의 값 구하기

이 식에 $n=1, 2, \dots, 5$ 를 차례로 대입하면 $S_1 = a_1 = 1$ 이므로

$$S_2 = 5S_1 - 5 = 5 \times 1 - 5 = 0$$

$$S_3 = 5S_2 - 5 = 5 \times 0 - 5 = -5$$

$$S_4 = 5S_3 - 5 = 5 \times (-5) - 5 = -30$$

$$S_5 = 5S_4 - 5 = 5 \times (-30) - 5 = -155$$

$$S_6 = 5S_5 - 5 = 5 \times (-155) - 5 = -780$$

13

해결전략 | 주어진 식에서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한 다음 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 임을 이용한다.

STEP 1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$S_n = 2a_n + 3n \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 3(n+1) \quad \dots\dots ㉡$$

㉡ - ㉠을 하면

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n + 3$$

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 3$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 3 \quad \dots\dots ㉢$$

STEP 2 a_1 의 값 구하기

$$a_1 = S_1 \text{이고 } S_n = 2a_n + 3n \text{에서 } S_1 = 2a_1 + 3 \text{이므로}$$

$$a_1 = 2a_1 + 3 \quad \therefore a_1 = -3 \quad \dots\dots ㉣$$

STEP 3 $a_1 + a_4$ 의 값 구하기

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \text{에 } n=1, 2, 3 \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_2 = 2a_1 - 3 = -6 - 3 = -9$$

$$a_3 = 2a_2 - 3 = -18 - 3 = -21$$

$$a_4 = 2a_3 - 3 = -42 - 3 = -45 \quad \dots\dots ㉤$$

$$\therefore a_1 + a_4 = -3 + (-45) = -48 \quad \dots\dots ㉥$$

채점 요소	배점
① a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	40 %
② a_1 의 값 구하기	20 %
③ a_4 의 값 구하기	30 %
④ $a_1 + a_4$ 의 값 구하기	10 %

14

해결전략 | n 시간이 지난 후의 미생물의 수를 a_n 으로 놓고 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

n 시간이 지난 후의 미생물의 수를 a_n 이라고 하면

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = a_1 + 4 = a_1 + 2^2$$

$$a_3 = a_2 + 8 = a_2 + 2^3$$

$$a_4 = a_3 + 16 = a_3 + 2^4$$

$\vdots$

$$a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$$

STEP 2 15시간이 지난 후의 미생물의 수 구하기

$a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 14$ 를 차례로 대입하여 번끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2^2$$

$$a_3 = a_2 + 2^3$$

$$a_4 = a_3 + 2^4$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} &+ \left. \begin{array}{l} a_{15} = a_{14} + 2^{15} \\ a_{15} = a_1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{15} \\ = 5 + \frac{2^2(2^{14}-1)}{2-1} = 2^{16} + 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

따라서 15시간이 지난 후의 미생물의 수는 $2^{16} + 1$ 이다.

15

해결전략 | 점 P_n 의 좌표를 a_n 으로 놓고 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식 구하기

점 P_n 의 좌표를 a_n 이라고 하면

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

점 P_{n+2} 는 선분 $P_n P_{n+1}$ 을 3 : 2로 외분하는 점이므로

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{3a_{n+1} - 2a_n}{3 - 2} \\ &= 3a_{n+1} - 2a_n \end{aligned}$$

STEP 2 P_6 의 좌표 구하기

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하면

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \times 7 - 2 \times 3 = 15$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \times 15 - 2 \times 7 = 31$$

$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \times 31 - 2 \times 15 = 63$$

따라서 P_6 의 좌표는 63이다.

16

해결전략 | $\sum_{k=1}^{n+1} S_k = \sum_{k=1}^n S_k + S_{n+1}$ 임을 이용하여 $n=m+1$ 일 때 주어진 식이 성립함을 보인다.

STEP1 $f(m), g(m)$ 구하기

(i) $n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & (m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k \\ &= (m+2)S_{m+1} - \left(\sum_{k=1}^m S_k + S_{m+1} \right) \\ &= (m+2-1)S_{m+1} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \boxed{(m+1)}S_{m+1} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= (m+1)S_m + (m+1)a_{m+1} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \boxed{(m+1)}S_m + \boxed{(m+1)^3} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \sum_{k=1}^{m+1} k^3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(m) = m+1, g(m) = (m+1)^3$$

STEP2 $f(2)+g(1)$ 의 값 구하기

따라서 $f(2)=3, g(1)=8$ 이므로

$$f(2)+g(1)=3+8=11$$

17

해결전략 | $3^k > k(k+1)$ 이 성립한다고 가정할 때 $3^{k+1} > (k+1)(k+2)$ 가 성립함을 보인다.

STEP1 $n=2$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 3^2 = 9, (\text{우변}) = 2 \times 3 = 6$$

이므로 (좌변) > (우변)

즉, 주어진 부등식이 성립한다. ①

STEP2 $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$3^k > k(k+1)$$

이 부등식의 양변에 3을 곱하면

$$3^{k+1} > 3k(k+1) \quad \dots\dots ⑦$$

이때

$$\begin{aligned} 3k(k+1) - (k+1)(k+2) &= 2k^2 - 2 \\ &= 2(k+1)(k-1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

이므로

$$3k(k+1) > (k+1)(k+2) \quad \dots\dots ⑧$$

⑦, ⑧에서

$$3^{k+1} > (k+1)(k+2)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

..... ②

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. ③

채점 요소	배점
① $n=2$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기	30 %
② $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$ 일 때 부등식이 성립함을 보이기	60 %
③ 2 이상의 모든 자연수에 대하여 부등식이 성립함을 확인하기	10 %

상위권 도약 문제

405쪽

$$01 \ 577 \quad 02 \ \frac{5}{6} \quad 03 \ ④$$

$$04 \ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_8 = 55$$

01

해결전략 | $f(m+n) = f(m) + f(n)$ 에 $m=1$ 을 대입하면 $f(n+1)$ 과 $f(n)$ 의 관계식을 얻을 수 있다.

STEP1 $f(n)$ 구하기

$f(m+n) = f(m) + f(n)$ 에 $m=1$ 을 대입하면

$$f(n+1) = f(n) + f(1)$$

즉, $f(n+1) = f(n) + 3$ 이므로 수열 $\{f(n)\}$ 은 첫째항이 $f(1)=3$, 공차가 3인 등차수열이다.

$$\therefore f(n) = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$$

STEP2 a_{20} 의 값 구하기

$$a_{n+1} - a_n = f(n) \text{에서 } a_{n+1} - a_n = 3n$$

즉, $a_{n+1} = a_n + 3n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 19$ 를 차례로 대입하여 더하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + 3 \times 3 \\
&\vdots \\
+) \quad a_{20} &= a_{19} + 3 \times 19 \\
a_{20} &= a_1 + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) \\
&= 7 + 3 \sum_{k=1}^{19} k \\
&= 7 + 3 \times \frac{19 \times 20}{2} = 577
\end{aligned}$$

02

해결전략 | $1 - \frac{1}{n^2}$ 을 통분하여 두 분수의 곱의 형태로 나타내어 계산한다.

STEP1 일반항 구하기

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$$

이므로

$$a_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} a_{n-1} \text{에 } n=2, 3, 4, \dots \text{를 차례로 대}$$

입하여 번끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} a_1 \\
a_3 &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} a_2 \\
a_4 &= \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} a_3 \\
&\vdots \\
&\times \left) a_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} a_{n-1} \right. \\
a_n &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \\
&\quad \times \frac{n+1}{n} a_1 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} a_1 = \frac{n+1}{2n} a_1
\end{aligned}$$

$$\text{이때 } a_6 = \frac{7}{12} a_1 = \frac{21}{2} \text{에서 } a_1 = 18$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n} \times 18 = \frac{9(n+1)}{n}$$

STEP2 k 의 값 구하기

$$\text{따라서 } a_9 = \frac{9 \times 10}{9} = 10, a_3 = \frac{9 \times 4}{3} = 12 \text{이므로}$$

$$10 = k \times 12 \text{에서 } k = \frac{5}{6}$$

03

해결전략 | 주어진 식에서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

STEP1 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n k a_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

에서

$$(i) \ n=1 \text{일 때, } a_2 = a_1 = 2$$

$$(ii) \ n \geq 2 \text{일 때, } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k = n a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = (n+1) a_n$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_1 = a_2 = 2, a_{n+1} = (n+1) a_n \ (n \geq 2)$$

STEP2 $a_2 + \frac{a_{51}}{a_{50}}$ 의 값 구하기

$$a_{n+1} = (n+1) a_n \text{에 } n=50 \text{을 대입하면}$$

$$a_{51} = 51 a_{50}$$

$$\text{이때 } a_{50} \neq 0 \text{이므로 } \frac{a_{51}}{a_{50}} = 51$$

$$\therefore a_2 + \frac{a_{51}}{a_{50}} = 2 + 51 = 53$$

04

해결전략 | $(n+2)$ 개의 바둑돌을 늘어놓을 때 처음에 흰 바둑돌을 놓는 경우, 검은 바둑돌을 놓는 경우로 나누어 생각한다.

STEP1 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식 구하기

$(n+2)$ 개의 바둑돌을 늘어놓을 때

(i) 처음에 흰 바둑돌을 놓으면 두 번째에는 반드시 검은 바둑돌을 놓아야 하므로 이 경우는 n 개의 바둑돌을 늘어놓는 경우인 a_n 과 같다.

(ii) 처음에 검은 바둑돌을 놓으면 두 번째에는 어떤 바둑돌을 놓아도 상관없으므로 이 경우는 $(n+1)$ 개의 바둑돌을 늘어놓는 경우인 a_{n+1} 과 같다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

STEP2 a_8 의 값 구하기

한편, $a_1 = 2, a_2 = 3$ 이므로

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{에 } n=1, 2, \dots, 6 \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 3 = 5$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 8 = 13$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 8 + 13 = 21$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 13 + 21 = 34$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 21 + 34 = 55$$

▶참고 1개의 바둑돌을 놓는 방법은 $\textcircled{H}$, $\textcircled{B}$ 의 2가지이므로 $a_1 = 2$

흰 바둑돌이 서로 이웃하지 않도록 2개의 바둑돌을 놓는 방법은

$\textcircled{H}\textcircled{B}$, $\textcircled{B}\textcircled{H}$, $\textcircled{B}\textcircled{B}$ 의 3가지이므로 $a_2 = 3$